

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 8

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles

$$\begin{aligned}(E_1) \quad & y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0 \\(E_2) \quad & y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 10 \cos(x) \\(E_3) \quad & y''(x) + y'(x) + y(x) = 0 \\(E_4) \quad & y''(x) + y'(x) + y(x) = x^2 + 2x + 2 \\(E_5) \quad & y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = (x^3 + x)e^{2x}.\end{aligned}$$

Exercice 2

1) Pour quelles valeurs de A et B la fonction $x \mapsto (A + B \ln(x))e^{-x}$ est-elle solution de l'équation différentielle

$$(E_6) \quad y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = \frac{1-x}{x^2}e^{-x}$$

2) Déterminer la solution générale de (E_6) .

3) Déterminer la solution de (E_6) telle que $y(1) = 0$ et $y'(1) = 0$.

Exercice 3

On considère la suite définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $4u_{n+1} = 3u_n + 1$.

1) Faire une représentation graphique.

2) Donner l'expression du terme général u_n en fonction de n et u_0 . Convergence de la suite u_n ?

3) Mêmes questions pour la suite définie par $3v_{n+1} = 4v_n - 1$.

Exercice 4

Soit A une matrice vérifiant $A^2 = -A + 6 \text{Id}$ (c.f. dernier exercice feuille 6).

1) Montrer par récurrence qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = a_n A + b_n \text{Id},$$

et que (a_n) et (b_n) satisfont les relations $a_{n+1} = b_n - a_n$, $b_{n+1} = a_n$.

2) En déduire que (a_n) satisfait la relation de récurrence

$$a_{n+1} + a_n - 6a_{n-1} = 0.$$

Déterminer alors a_n et b_n .