

Travaux Dirigés n° 1

Exercice 1

Montrer que l'ensemble des polynômes de degré supérieur ou égal à 2 n'est pas un sous-espace de F_4 ensemble des polynômes à coefficients réels.

Exercice 2

Dans F_3 , soit F l'ensemble des fonctions vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(x) = 0$; montrer que F est un sous-espace de F_3 et que la famille $(\sin(x), \cos(x))$ est une famille libre de F .

Exercice 3

Soit E_3 l'espace vectoriel des trinômes (polynômes de degré inférieur ou égal à 2); quelle est sa dimension?

1) Soient $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x(x-1)$ et $p_3(x) = x(x-1)(x-2)$; montrer que (p_1, p_2, p_3) forment une base de E et déterminer les coordonnées dans cette base de $p(x) = x^2$.

2) Montrer que l'application φ qui à un polynôme P associe $P + P'$ (où P' est le polynôme dérivé) est un endomorphisme de E_3 .

a) Quelle est sa matrice dans la base $(1, x, x^2)$?

b) Montrer que φ est bijective; en déduire que pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à 2, il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) + P'(x) = Q(x)$.

c) Application : $Q(x) = 2x^2 + 5x + 6$, déterminer P .

Exercice 4

On considère l'ensemble E des suites (u_n) vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Soit v la suite de E telle que $v_0 = 1$ et $v_1 = 0$ et w la suite de E telle que $w_0 = 0$ et $w_1 = 1$.

1) Calculer les dix premiers termes de chaque suite.

2) Déterminer les dix premiers termes de la suite $v + w$

3) Soit x une suite de E telle que $x_2 = 5$, $x_3 = 7$ et $x_4 = 12$; montrer que x est combinaison linéaire de v et w et préciser les coefficients de cette combinaison.

Exercice 5

Soit $E = \mathbb{C}^2 = \{(z, z') | z \in C, z' \in \mathbb{C}\}$ muni de sa structure d'espace vectoriel sur C .

Montrer que les deux couples $z_1 = (1, 0)$ et $z_2 = (0, 1)$ constituent une base $\mathcal{B}$ de E .

Déterminer les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de $z_3 = (2 + i, 1 - i)$ et $z_4 = (2i, 1)$.

Réciproquement, montrer que (z_3, z_4) est une autre base de E notée $\mathcal{B}'$: quelles sont les coordonnées de z_1 et z_2 dans $\mathcal{B}'$.