

UNIVERSITE FRANCOIS RABELAIS
FACULTE DE DROIT, D'ECONOMIE ET DES SCIENCES SOCIALES

Année 1998-1999

Remplacement C.C. - du 1^{er} semestre - juin 1999 - **U.E.**

DEUG Économie-Gestion 2^{ème} année

Durée : 1 heure

CALCULATRICE AUTORISÉE : Casio FX 180P(+)

Mathématiques

Exercice 1

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer une application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que A soit la matrice de φ relativement à la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.
- 2) Démontrer que $\lambda = -1$ et $\lambda_2 = 2$ sont valeurs propres de A .
- 3) Trouver les sous-espaces propres E_1 et E_2 associés à λ_1 et λ_2 .
- 4) Dédire une base $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ telle que la matrice de φ relativement à $\mathcal{B}'$ soit diagonale.
- 5) Quelle est la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ayant A pour matrice ? En déduire la signature de q .

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - yz + 2x$.

- 1) Montrer que f n'admet qu'un point stationnaire (x_0, y_0, z_0) .
- 2) Déterminer la matrice Hessienne $H(x_0, y_0, z_0)$ de f en (x_0, y_0, z_0) .
- 3) En déduire la nature du point (x_0, y_0, z_0) .
- 4) Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}^3$.
- 5) Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$; déterminer le minimum m et le maximum M de f sur D ; on déterminera $(x_1, y_1, z_1) \in D$ et $(x_2, y_2, z_2) \in D$ tels que $f(x_1, y_1, z_1) = m$ et $f(x_2, y_2, z_2) = M$.

UNIVERSITE FRANCOIS RABELAIS
FACULTE DE DROIT, D'ECONOMIE ET DES SCIENCES SOCIALES

Année 1998-1999

Remplacement Examen - du 1^{er} semestre - juin 1999 - U.E.

DEUG Économie-Gestion 2^{ème} année

Durée : 1 heure 30

CALCULATRICE AUTORISÉE : Casio FX 180P(+)

Mathématiques

Exercice I

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1) Montrer que M est diagonalisable et déterminer les sous-espaces propres correspondants.
- 2) Soit $q : (a, b, c, d) \mapsto ad - bc$.
 - a) Montrer que q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$.
 - b) Quelle est la matrice A de q relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$?
 - c) Par un calcul direct, ou en utilisant la matrice A , déterminer une décomposition en carrés de q et la signature de q .

Exercice 2

Soit E l'ensemble des suites (u_n) à valeurs réelles satisfaisant la relation

$$\forall n \quad u_{n+3} = 3u_{n+2} + 3u_{n+1} - 4u_n$$

- 1) On considère le polynôme

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 4$$

Vérifier que $x_1 = 4$ est racine de P et déterminer les autres racines (on donnera la forme trigonométrique des racines complexes).

- 2) On considère la suite v de E définie par $v_0 =, v_1 =, v_2 =$.
 - a) Déterminer l'expression du terme général de la suite (v_n) ; calculer $v_{1999}, v_{2000}, v_{2001}$.
 - b) En déduire que v_n reste bornée quelque soit n .
- 3) Soit w une suite quelconque de E .
 - a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur w_0, w_1 et w_2 pour que (w_n) soit bornée.
 - b) On suppose que cette condition **n'est pas** satisfaite, déterminer la limite de $\frac{w_{n+1}}{w_n}$.

UNIVERSITE FRANCOIS RABELAIS
FACULTE DE DROIT, D'ECONOMIE ET DES SCIENCES SOCIALES

Année 1998-1999

Remplacement C.C. - du 2^{ème} semestre - sept 1999 - U.E.

DEUG Économie-Gestion 2^{ème} année

Durée : 1 heure

CALCULATRICE AUTORISÉE : Casio FX 180P(+)

Mathématiques

Exercice 1

1) On pose $I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx$ et $J_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx$.

a) Effectuer le changement de variable $t = \pi/2 - x$ dans I_1 .

b) Calculer $I_1 + J_1$, en déduire I_1 et J_1 .

2) a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$Q(x) = \frac{x^2 + 1}{2x^2(x + 1)}$$

b) Calculer $K_1 = \int_1^2 Q(x) dx$.

c) En déduire $F(x) = \int_0^x \frac{\text{ch}(t)}{e^t + 1} dt$.

Exercice 2

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1, y \geq 1, x + y \leq 3\}$. Calculer

$$I_2 = \iint_D \frac{1}{(x + y)^3} dx dy$$

Exercice 3

1) Soit $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ et $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$. a)
Calculer

$$I_3 = \iint_P \frac{xy}{1 + x^2 + y^2} dx dy$$

b) En déduire $J_3 = \iint_T \frac{xy}{1 + x^2 + y^2} dx dy$.

2) Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 1, x \leq y, x^2 + y^2 \geq 1\}$.

a) Définir D à l'aide des coordonnées polaires.

b) Calculer

$$K_3 = \iint_D \frac{xy}{1 + x^2 + y^2} dx dy$$

On pourra utiliser les coordonnées cartésiennes ou les coordonnées polaires et éventuellement le résultat du b).

UNIVERSITE FRANCOIS RABELAIS
FACULTE DE DROIT, D'ECONOMIE ET DES SCIENCES SOCIALES

Année 1998-1999

Remplacement Examen - du 2^{ème} semestre - sept 1999 - U.E.

DEUG Économie-Gestion 2^{ème} année

Durée : 1 heure 30

CALCULATRICE AUTORISÉE : Casio FX 180P(+)

Mathématiques

Exercice 1

- 1) Mettre le trinôme $x^2 - 4x + 3$ sous forme canonique.
- 2) Calculer

$$I_1 = \int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}} dx = \int_{-1}^0 \frac{(x - 2) + 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}} dx$$

Exercice 2

Soit $\mathcal{P}$ le pavé $[0; 1] \times [0; 1]$; calculer

$$I_2 = \iint_{\mathcal{P}} x(1 + x^2 + y^2) dx dy$$

Exercice 3

Résoudre l'équation différentielle

$$(E_1) \quad (1 - x^2)y'(x) + xy(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Exercice 4

Résoudre l'équation différentielle

$$(E_2) \quad y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

On pourra démontrer la relation : $\int \operatorname{argsh}(x) dx = x \operatorname{argsh}(x) - \sqrt{1 + x^2} + C^{te}.$