

Première partie

Algèbre

1 Introduction

1.1 Espaces vectoriels

Dans toute la suite K désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Définition 1 *Un espace vectoriel sur K est un ensemble E muni d'une loi de composition interne traditionnellement notée $+$ et d'une loi de composition externe définie sur $K \times E$ à valeurs dans E appelée multiplication par un scalaire, de plus il existe un élément noté $\tilde{0}$ (vecteur nul) et à chaque élément $x \in E$ on associe un élément noté $-x$ appelé opposé de x avec pour tout $x, y, z \in E$ et tout $\lambda, \mu \in K$*

$$\begin{array}{ll}(x + y) + z = x + (y + z) & \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \\ x + y = y + x & (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \\ x + \tilde{0} = x & \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x \\ x + (-x) = \tilde{0} & 1.x = x\end{array}$$

Exemple : :

- ✓ $\mathbb{R}^n$ est bien entendu un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$,
- ✓ $\mathbb{C}^2$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et aussi sur $\mathbb{C}$,
- ✓ E_1 constitué des fonctions définies sur $\mathbb{R}$,
- ✓ E_2 constitué des fonctions définies sur $[0, 1]$,
- ✓ E_3 constitué des suites réelles,
- ✓ E_4 constitué des matrices 3x3 à coefficients réels, etc ...

Définition 2 *Un sous-espace vectoriel F de E est une partie non vide de E , stable pour l'addition et la multiplication, c'est-à-dire vérifiant*

$$\forall x, y \in F \quad x + y \in F \quad \text{et} \quad \forall x \in F, \forall \lambda \in K, \quad \lambda x \in F.$$

Remarque : : Un sous-espace est donc en fait aussi un espace vectoriel par lui-même.

Exemple :

- ✓ F_1 constitué des fonctions continues est un sous-espace de E_1 ,

- ✓ F_2 constitué des fonctions dérivables est un sous-espace de E_1 et de F_1 ,
- ✓ F_3 constitué des fonctions C^∞ (indéfiniment dérivables) est un sous-espace de E_1 , de F_1 , de F_2 ,
- ✓ F_4 constitué des polynômes est un sous-espace de E_1 , F_1 , F_2 et F_3 ,
- ✓ les suites convergentes constituent un sous-espace de E_3 ,
- ✓ les matrices symétriques un sous-espace de E_4 .

Contre-exemple : les fonctions positives ne sont pas un sous-espace de E_1 , les suites géométriques ne sont pas un sous-espace de E_3 .

DÉMONSTRATION : Pour F_1 (resp. F_2 , F_3) il suffit de vérifier que la somme de deux fonctions continues (resp. dérivables, indéfiniment dérivables) sur $\mathbb{R}$ est une fonction continue (resp. dérivable, indéfiniment dérivable) sur $\mathbb{R}$, de même pour le produit par un scalaire. Même raisonnement pour les polynômes. $\square$

Exercice 1 Justifier les autres exemples.

Montrer que les fonctions polynômes paires (resp. impaires) constituent un sous-espace de F_4 .

Montrer que l'ensemble des polynômes de degré supérieur ou égal à 2 n'est pas un sous-espace de F_4 .

Définition 3 Les définitions concernant famille libre, famille génératrice, base et dimension restent identiques à celles données dans le cadre de $\mathbb{R}^n$.

Remarque : Il est possible qu'un espace vectoriel ou un sous-espace vectoriel soit de dimension infinie, c'est-à-dire qu'il existe une base formée d'une infinité de vecteurs : par exemple E_1 , E_2 , E_3 , F_1 , F_2 et F_3 sont de dimension infinie, alors que E_4 est de dimension finie.

Pour F_4 on peut montrer que la famille des monômes $(1, x, x^2, x^3, \dots)$ est à la fois libre et génératrice : elle constitue une base (base canonique) de F_4 ; par contre il est impossible d'énumérer les éléments d'une base de F_3 .

Exercice 2 Dans F_3 , soit F l'ensemble des fonctions vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(x) = 0$; montrer que F est un sous-espace de F_3 et que la famille $(\sin(x), \cos(x))$ est une famille libre de F .

Soit E l'espace vectoriel des trinômes (polynômes de degré inférieur ou égal à 2); quelle est sa dimension ? Soient $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x(x-1)$ et $p_3(x) = x(x-1)(x-2)$; montrer que (p_1, p_2, p_3) forment une base de E et déterminer les coordonnées dans cette base de $p(x) = x^2$.

Définition 4 Deux sous-espaces F_1 et F_2 de E sont dits supplémentaires (ou en somme directe) si tout vecteur de E s'écrit d'une manière unique comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2 .

Notation : $E = F_1 \oplus F_2$.

Proposition 1.1 Il est équivalent de dire que la réunion d'une base de F_1 et d'une base de F_2 constitue une base de E .

Si E est de dimension finie, il y a équivalence avec $\dim(F_1) + \dim(F_2) = \dim(E)$ et $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur. $\square$

Exemple : Soient P_1 le sous-espace constitué des fonctions polynômes paires et P_2 le sous-espace constitué des fonctions impaires; on a $F_4 = P_1 \oplus P_2$.

1.2 Applications linéaires

Définition 5 Soient E et F deux espaces vectoriels ; une application f de E vers F est dite linéaire si et seulement si elle vérifie

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in K \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

Une application linéaire de E dans lui-même est aussi appelée un endomorphisme de E .

Exemple : La dérivation dans F_3 , c'est-à-dire l'application qui à une fonction f associe sa dérivée f' , est linéaire ; en effet la dérivée de $f + g$ est $f' + g'$ et celle de λf est $\lambda f'$.

Proposition 1.2 Une application linéaire de E dans F est parfaitement déterminée par l'image d'une base de E .

En dimension finie, soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F : la matrice de f relativement à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est la matrice dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est constitué des coordonnées de $f(e_j)$ dans $\mathcal{B}'$.

Remarque : Les définitions du noyau et de l'image d'une application linéaire restent identiques :

$$\text{Ker}(f) = \{x \in E | f(x) = \tilde{0}\} \quad \text{Im}(f) = \{y \in F | \exists x \in E \text{ tel que } f(x) = y\}$$

Remarque : La plupart des théorèmes énoncés dans le cadre de $\mathbb{R}^n$ restent vrais pour des espaces vectoriels généraux, sauf ceci

Proposition 1.3 En dimension infinie, pour une application linéaire f , il n'y a pas équivalence entre f est injective et f est surjective.

DÉMONSTRATION : Dans l'espace vectoriel des polynômes l'application qui à un polynôme P associe le polynôme dérivé P' est bien définie, linéaire, surjective mais pas injective. $\square$

Remarque : On peut caractériser ainsi les espaces de dimension infinie : il existe des applications linéaires injectives qui ne sont pas surjectives (ou des applications surjectives qui ne sont pas injectives).

Définition 6 Soit E un espace vectoriel ; on appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E vers K , c'est-à-dire une application linéaire qui à un vecteur associe un nombre réel (ou complexe si $K = \mathbb{C}$).

Exemple : Soit $E = E_2$ l'espace vectoriel des fonctions φ continues sur $[0, 1]$: les applications suivantes sont des formes linéaires : $\varphi \mapsto \varphi(0)$, $\varphi \mapsto \int_0^1 \varphi(t) dt$.

L'application qui à un polynôme P associe $P(0) + 2P'(1)$ est une forme linéaire sur F_4 .

L'application qui à une matrice A associe sa trace (la somme des éléments diagonaux $a_{11} + a_{22} + a_{33}$) est une forme linéaire sur E_4 .

Définition 7 On appelle forme bilinéaire définie sur E , toute application $f : E \times E \rightarrow K$ telle que pour tout $x \in E$ l'application $y \mapsto f(x, y)$ est une forme linéaire et pour tout $y \in E$ l'application $x \mapsto f(x, y)$ est une forme linéaire.

Exemple : Dans $E = \mathbb{R}^n$ on définit le produit scalaire de deux vecteurs $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ par $X.Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ noté aussi $\langle X, Y \rangle$; le produit scalaire est une forme bilinéaire.

Dans E_2 l'application $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t) dt$ est une forme bilinéaire.

Exercice 3 Justifier que le produit scalaire est bien une forme bilinéaire, en déduire que, pour tout $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$X.(Y + Z) = X.Y + X.Z \quad (X + Y).Z = X.Z + Y.Z \quad X.(\lambda Y) = (\lambda X).Y = \lambda(X.Y)$$

Définition 8 Soit E de dimension finie rapporté à la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$; et f une forme bilinéaire sur E ; on appelle matrice de f relativement à $\mathcal{B}$ la matrice de terme général $a_{ij} = f(e_i, e_j)$.

Proposition 1.4 Réciproquement si on se donne une matrice $n \times n$, $A = (a_{ij})$, il existe une unique forme bilinéaire définie sur $\mathbb{R}^n$ telle que sa matrice (relativement à la base canonique) soit A ; elle est définie par

$$(X, Y) \mapsto {}^t X A Y = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j$$

Rappel : les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sont toujours écrits en colonne, ${}^t X$ désigne le vecteur transposé de X qui est donc un vecteur ligne.

Définition 9 Une forme bilinéaire f est dite symétrique si elle vérifie, pour tout couple (x, y) de vecteurs de E , $f(x, y) = f(y, x)$.

Proposition 1.5 Soit E de dimension finie rapporté à une base $\mathcal{B}$, f une forme bilinéaire de matrice $A = (a_{ij})$ relativement à $\mathcal{B}$. f est symétrique si et seulement si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout couple de réels $1 \leq i, j, \leq n$, si et seulement si la matrice A est symétrique, c'est-à-dire vérifie ${}^t A = A$.

2 Diagonalisation

2.1 Rappels

Définition 10 Soit f une application linéaire de E dans E . Un scalaire $\lambda \in K$ est dit valeur propre de f s'il existe (au moins) un vecteur **non nul** x tel que $f(x) = \lambda x$, un tel vecteur est dit vecteur propre associé à λ .

Proposition 2.1 Soit f une application linéaire de E dans E et $\lambda \in K$ une valeur propre de f ; l'ensemble E_λ des x tels que $f(x) = \lambda x$ est un sous-espace vectoriel de E appelé sous-espace propre associé à λ .

Exercice 4 Justifier que $E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$, en déduire la démonstration de la Proposition 2.1.

Rappel : Soit E de dimension finie et f un endomorphisme de E ; on rappelle que le déterminant de la matrice de f est indépendant de la base utilisée pour calculer cette matrice : ce déterminant est appelé déterminant de f .

Définition 11 Soit E de dimension finie et f un endomorphisme de E , on appelle polynôme caractéristique de f le polynôme

$$P_f(\lambda) = \det(f - \lambda \text{Id})$$

Remarque : De même, si A est une matrice, on appelle polynôme caractéristique de A le polynôme $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$: c'est donc le polynôme caractéristique de n'importe quel endomorphisme admettant A pour matrice dans une certaine base.

Proposition 2.2 Soit E de dimension finie et f un endomorphisme de E , λ est valeur propre de f si et seulement si λ est racine du polynôme caractéristique $P_f(\lambda)$.

Exercice 5 Soient x_1 un vecteur propre de f associé à λ_1 et x_2 un vecteur propre de f associé à λ_2 avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$; montrer que (x_1, x_2) est une famille libre.

Proposition 2.3 Plus généralement, soient $x_1, \dots, x_k$ des vecteurs propres de f associés à des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ deux à deux distinctes; la famille $(x_1, \dots, x_k)$ est libre.

DÉMONSTRATION : Admise □

Corollaire 2.4 Soit E de dimension finie n ; un endomorphisme f de E possédant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

Rappel : Un réel λ est racine d'un polynôme $P(X)$ si et seulement si $P(\lambda) = 0$. Si λ est racine d'un polynôme $P(X)$ de degré n on peut écrire $P(X)$ sous la forme $P(X) = (X - \lambda)P_1(X)$ où P_1 est un polynôme de degré $n - 1$; si $P_1(\lambda) \neq 0$ on dit que λ est racine simple de $P(X)$, sinon on dit que λ est racine multiple de $P(X)$.

Définition 12 Soit λ une racine d'un polynôme $P(X)$: il existe un unique entier k et un polynôme $Q(X)$ tel que l'on ait

$$P(X) = (X - \lambda)^k Q(X) \quad \text{avec} \quad Q(\lambda) \neq 0.$$

L'entier k s'appelle multiplicité de la racine : $k = 1$ pour une racine simple, $k = 2$ pour une racine double, etc ...

Proposition 2.5 Soit E de dimension finie n , f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f . La dimension du sous-espace propre associé à λ est inférieure ou égale à la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique.

DÉMONSTRATION : Soit E_λ le sous-espace propre considéré, p sa dimension et $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E_λ . On peut trouver des vecteurs $e_{p+1}, \dots, e_n$ de façon que $(e_1, \dots, e_n)$ constitue une base $\mathcal{B}$ de E . La matrice de f dans $\mathcal{B}$ se présente sous la forme

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \lambda & 0 & \dots & 0 & ? \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & ? \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \vdots \\ & & \tilde{0} & & B \end{array} \right)$$

où $\tilde{0}$ désigne un bloc de zéros, $?$ des coefficients inconnus et B une matrice carrée à $n - p$ lignes.

Si on calcule le polynôme caractéristique de f à l'aide de cette matrice, en développant par rapport à la première colonne, puis à la seconde, ..., on obtient

$$P_f(X) = (\lambda - X)^p \det(B - X \text{Id}).$$

Par définition de la multiplicité k de λ dans $P_f(X)$ on a donc $p \leq k$. □

Théorème 1 Soit E un espace vectoriel sur K de dimension finie n . Un endomorphisme f de E est diagonalisable sur K si et seulement si

- ✓ Le polynôme caractéristique admet n racines comptées avec leur multiplicité **et**
- ✓ La dimension de chaque sous-espace propre est exactement égale à la multiplicité dans $P_f(\lambda)$ de la valeur propre associée .

DÉMONSTRATION : Si f est diagonalisable, il existe une base où la matrice de f est diagonale, avec les vecteurs propres sur la diagonale ; en calculant le polynôme caractéristique dans cette base on a le résultat annoncé.

Réciproquement, on choisit une base dans chacun des sous-espaces propres, la réunion de tous ces vecteurs est une famille de n vecteurs ; en procédant comme à la Proposition 2.3 on montre que cette famille est libre : c'est donc une base de E formée de vecteurs propres. $\square$

Exemple : Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On se place dans $E = \mathbb{R}^2$.

Le polynôme caractéristique de A est égal $(1 - \lambda)^2$: $\lambda = 1$ est valeur propre double, le sous-espace propre correspondant est l'ensemble $\{(x, y) | y = 0\}$ qui est de dimension 1 : A n'est pas diagonalisable (la deuxième condition n'est pas remplie).

Le polynôme caractéristique de B est égal à $\lambda^2 + 1$ qui ne possède pas de racine dans $K = \mathbb{R}$: B n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

On se place dans $E = \mathbb{C}^2$ considéré comme espace vectoriel sur $K = \mathbb{C}$.

Les matrices A et B sont des matrices à coefficients dans $\mathbb{C}$ et représentent des applications linéaires de E dans lui-même. Le même argument que ci-dessus montre que A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Par contre, sur $\mathbb{C}$, le polynôme caractéristique $P_B(\lambda)$ possède deux racines distinctes i et $-i$: la matrice B est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Remarque : Il est facile de voir que B correspond dans le plan à une rotation d'angle $+\pi/2$ tandis que le complexe i a aussi pour argument $+\pi/2$: la multiplication par i correspond donc à une rotation de $+\pi/2$.

Exercice 6 Déterminer, dans $\mathbb{C}^2$, les vecteurs propres associés aux valeurs propres i et $-i$ de B .

Indication : ils sont de la forme (z_1, z_2) avec z_1 et z_2 complexes.

Exercice 7 Soient A et B les matrices définies par

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Vérifier que le polynôme caractéristique de A est donné par $P_A(\lambda) = (2 - \lambda)^3(1 - \lambda)^2$; $\lambda_1 = 1$ est racine double et $\lambda_2 = 2$ est racine triple : il y a donc 5 racines comptées avec leur multiplicité.

Montrer que le sous-espace propre E_1 associé à $\lambda_1 = 1$ est de dimension 2, et que le sous-espace propre E_2 associé à $\lambda_2 = 2$ est de dimension 3 ; en déduire que A est diagonalisable.

Vérifier B possède le même polynôme caractéristique que A , que le sous-espace propre E'_1 associé à $\lambda_1 = 1$ est de dimension 2 mais que le sous-espace propre E'_2 associé à $\lambda_2 = 2$ est de dimension 2. Il est impossible de trouver 5 vecteurs propres pour B indépendants (pour construire une base) : on ne peut choisir que deux vecteurs dans E'_1 et tout système de trois vecteurs dans E'_2 est lié. En conclusion, B n'est pas diagonalisable.

3 Matrice symétrique réelle, forme quadratique

3.1 Définition

Rappel : Soit P un polynôme par rapport aux variables x, y, z ; c'est donc une combinaison linéaire de monômes de la forme $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ avec α, β, γ entiers positifs ou nuls, l'entier $\alpha + \beta + \gamma$ est le degré total du monôme considéré. On dit que P est homogène de degré k si tous les monômes de P ont exactement k pour degré total. Par exemple, un polynôme homogène de degré 2 à trois variables x, y, z est de la forme

$$P(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz$$

Remarque : On a la définition équivalente suivante : P est homogène de degré k si et seulement si pour tous réels x, y, z et pour tout réels μ on a $P(\mu x, \mu y, \mu z) = \mu^k P(x, y, z)$.

Généralisation immédiate à un nombre quelconque de variables.

Définition 13 Soit f une forme bilinéaire sur E , on appelle forme quadratique associée à f l'application $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $q(x) = f(x, x)$

Remarque : Si $E = \mathbb{R}^n$, f ayant pour matrice $A = (a_{ij})$, on a

$$q(x) = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j$$

c'est-à-dire que q est un polynôme homogène de degré 2 par rapport aux variables $x_1, \dots, x_n$ coordonnées du vecteur x .

Remarque : Si on appelle A la matrice de terme général a_{ij} , la forme quadratique est définie par

$$X \mapsto {}^t X A X$$

Exercice 8 Le polynôme homogène de degré 2 à deux variables x_1 et x_2 le plus général est donné par

$$P(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

Déterminer la forme quadratique associée à P , c'est-à-dire déterminer une matrice carrée symétrique telle que

$$P(x_1, x_2) = (x_1, x_2) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Proposition 3.1 *Réciproquement, si on se donne un polynôme homogène q de degré 2, il existe une unique forme bilinéaire symétrique f associée à q .*

DÉMONSTRATION : On vérifiera que $f(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y))$ □

Proposition 3.2 *Soient A une matrice ayant n colonnes et p lignes, et B une matrice ayant q colonnes et n lignes : on peut définir le produit AB . On a*

$${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$$

DÉMONSTRATION : Les coefficients de la matrice AB sont les produits des lignes de A et des colonnes de B ; transposer revient à échanger les lignes et les colonnes des matrices : il faut donc changer l'ordre des matrices transposées.

Les détails sont laissés au lecteur. □

Proposition 3.3 *Soit A une matrice **symétrique** ; on a alors pour tous vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$*

$$\langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle$$

DÉMONSTRATION : Vérification immédiate car les lignes et les colonnes de A sont identiques. On a aussi

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= {}^t(AX)Y \\ &= {}^tX {}^tAY \\ &= {}^tX AY \quad \text{car } A \text{ est symétrique} \\ &= \langle x, Ay \rangle \end{aligned}$$

□

3.2 Diagonalisation

Proposition 3.4 *Soit A une matrice symétrique **réelle**. Les valeurs propres de A sont réelles.*

DÉMONSTRATION : Voici l'idée de la démonstration : la matrice A admet au moins une valeur propre complexe λ (tout polynôme à coefficients réels possède des racines dans $\mathbb{C}$) associée à un vecteur propre x .

Le complexe conjugué $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre de A (les racines d'un polynôme à coefficients réels sont conjuguées) associée au vecteur propre $\bar{x}$ conjugué de x . On a alors

$$\langle \bar{x}, Ax \rangle = \langle \bar{x}, \lambda x \rangle \tag{1}$$

$$= \langle A\bar{x}, x \rangle \quad \text{car } A \text{ est symétrique réelle} \tag{2}$$

$$= \langle \bar{\lambda}\bar{x}, x \rangle \tag{3}$$

d'où on tire $\lambda \langle \bar{x}, x \rangle = \bar{\lambda} \langle \bar{x}, x \rangle$. Comme $\langle \bar{x}, x \rangle \neq 0$ on obtient $\lambda = \bar{\lambda}$ c'est-à-dire $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Proposition 3.5 Soit A une matrice symétrique réelle, x_1 un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1 . L'ensemble

$$F = \{x \in E \mid \langle x, x_1 \rangle = 0\}$$

des vecteurs orthogonaux à x_1 est un sous-espace vectoriel de E qui est stable par A c'est-à-dire que

$$\forall x \in F, \quad Ax \in F$$

DÉMONSTRATION : Soient x et y dans F et $k \in \mathbb{R}$. Par hypothèse on a $\langle x, x_1 \rangle = 0$ et $\langle y, x_1 \rangle = 0$, d'où

$$\langle x + y, x_1 \rangle = \langle x, x_1 \rangle + \langle y, x_1 \rangle = 0 + 0 = 0 \quad \text{et} \quad \langle kx, x_1 \rangle = k\langle x, x_1 \rangle = 0.$$

Ce qui prouve que $x + y$ et kx appartiennent à F qui est donc un sous-espace vectoriel de E . Pour x dans F on a donc, puisque A est symétrique réelle,

$$\langle Ax, x_1 \rangle = \langle x, Ax_1 \rangle = \langle x, \lambda x_1 \rangle = \lambda \langle x, x_1 \rangle = 0$$

ce qui prouve que Ax appartient à F . □

Exercice 9 Soient x et y deux vecteurs non nuls tels que $\langle x, y \rangle = 0$; montrer que (x, y) est une famille libre.

Théorème 2 Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable, en outre on peut choisir la matrice de passage P de façon que $P^{-1} = {}^tP$.

DÉMONSTRATION : La Proposition 3.4 montre l'existence d'une valeur propre réelle λ_1 associée à un vecteur propre e_1 , soit F le sous-espace formé des vecteurs orthogonaux à e_1 . Soit $e_2, \dots, e_n$ une base de F ; on peut facilement montrer, comme dans l'exercice précédent, que $e_1, e_2, \dots, e_n$ est une base de E . Dans cette base, la matrice de A s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & B & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où B est une matrice à n_1 lignes et $n - 1$ colonnes ; pour la première colonne, cela résulte de la définition d'un vecteur propre ; pour les autres colonnes, lorsque $i \geq 2$, Ae_i appartient à F et sa première coordonnée dans la base considérée est donc nulle.

On recommence le même raisonnement avec la matrice B qui est toujours symétrique et de dimension $n - 1$.

On construit ainsi, une base de vecteurs qui sont deux à deux orthogonaux et quitte à les diviser par une quantité adéquate on peut les choisir tels que $\langle e_i, e_i \rangle = 1$ pour tout i . La matrice de passage P est la matrice dont les colonnes sont les e_i : il est facile de constater, en faisant le produit ligne par colonne, que le produit de matrices ${}^tP P$ est égal à l'identité. □

Exemple : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

dont le polynôme caractéristique est $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 25$. Pour la valeur propre $\lambda_1 = 5$ le sous-espace propre est $E_1 = \{(x, y) \mid x = 2y\}$. Soit $e_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ un vecteur de E_1 tel que $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$.

Pour la valeur propre $\lambda_2 = -5$ le sous-espace propre est $E_2 = \{(x, y) | y = -2x\}$. Soit $e_2 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$ un vecteur de E_2 tel que $\langle e_2, e_2 \rangle = 1$. On vérifie que e_1 et e_2 sont bien orthogonaux, la matrice de passage P est donc définie par

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Une calcul immédiat montre que ${}^t P P = \text{Id}$, on a donc

$$A = {}^t P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} P$$

Exercice 10 Montrer que si une matrice Q vérifie ${}^t Q Q = \text{Id}$ les vecteurs colonnes de Q forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Remarque : Le calcul précédent montre que la forme quadratique associée à A peut encore s'écrire

$$q(x_1, x_2) = (x_1, x_2) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2) {}^t P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = {}^t Y \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} Y$$

avec

$$Y = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x_1}{\sqrt{5}} + \frac{x_2}{\sqrt{5}} \\ \frac{x_1}{\sqrt{5}} - \frac{2x_2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

on peut donc écrire

$$q(x_1, x_2) = 5\left(\frac{2x_1}{\sqrt{5}} + \frac{x_2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 5\left(\frac{x_1}{\sqrt{5}} - \frac{2x_2}{\sqrt{5}}\right)^2 = (2x_1 + x_2)^2 - (x_1 - 2x_2)^2$$

3.3 Signature

En s'inspirant de la remarque précédente, on peut montrer que n'importe quelle forme quadratique peut s'exprimer comme une somme (ou une différence) de carrés de formes linéaires ; mais on peut obtenir, par d'autres procédés, des décompositions différentes.

Exemple : On a

$$q_1(x, y) = 4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2$$

$$q(x, y) = 3x^2 + 8xy - 3y^2 = (2x + y)^2 - (x - 2y)^2 = 3\left(x + \frac{4}{3}y\right)^2 - \frac{25}{3}y^2$$

$$q_2(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz = (x + y + z)^2 + (y - z)^2$$

Proposition 3.6 *Lorsqu'on décompose une forme quadratique en somme (ou différences) de carrés il y a toujours le même nombre de termes positifs et le même nombre de termes négatifs.*

DÉMONSTRATION : Admise : on montre que le nombre de carrés positifs correspond exactement au nombre de valeurs propres positives de la matrice associée.

Définition 14 *On appelle signature de la forme quadratique le nombre de termes positifs et négatifs figurant dans une décomposition en carrés.*

Exemple : q et q_1 ont pour signature $(1, 1)$ tandis que q_2 a pour signature $(2, 0)$.

3.4 Retour des déterminants emboîtés

Soit A une matrice carrée à n lignes associée au système $AX = B$, $D_1, \dots, D_n$ les déterminants emboîtés issus de la matrice A . En utilisant la méthode du pivot de Gauss, on peut mettre le système sous forme triangulaire avec pour nouvelle matrice G ; soient $p_1, \dots, p_n$ les coefficients situés sur la diagonale de G . On montre que, si tous les D_i sont non nuls, on a

$$p_1 = D_1, \quad p_2 = \frac{D_2}{D_1}, \quad p_3 = \frac{D_3}{D_2}, \quad \dots, \quad p_n = \frac{D_n}{D_{n-1}}.$$

Si la matrice A est symétrique et les D_i non nuls, on peut écrire

$$A = {}^t G D G$$

où D est une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont donnés par

$$d_{11} = \frac{1}{D_1}, \quad d_{22} = \frac{D_2}{D_1}, \quad \dots, \quad d_{nn} = \frac{D_{n-1}}{D_n}$$

c'est-à-dire les inverses des termes diagonaux de G .

Exemple : Soit B définie ci-dessous; en faisant les opérations $L_2 - L_1$ et $L_3 - L_2$ on aboutit à la matrice G

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a $D_1 = 1$, $D_2 = 2$ et $D_3 = 6$, ce qui correspond bien aux valeurs des pivots; on vérifie que

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11 En déduire une décomposition en carré de la forme quadratique q associée à B et, dans le cas général, montrer que q est définie positive si tous les D_i sont positifs. Énoncer la condition pour q définie négative.

4 Application : convexité et extrema

4.1 Formule de Taylor

Soit f une fonction de n variables définie sur une partie $\mathcal{D}$ contenant une boule de centre x et h un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $x + h \in \mathcal{D}$. On note Df_x est la différentielle de f et H_x est la matrice hessienne de f évaluées en x . La formule de Taylor montre qu'il existe une fonction ε telle que

$$f(x + h) = f(x) + Df_x(h) + \frac{1}{2} {}^t h H_x h + \varepsilon(\|h\|) \|h\|^2$$

avec $\lim_{r \rightarrow 0} \varepsilon(r) = 0$.

Rappel : Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}^n$, le segment $[xy]$ est l'ensemble des points compris entre x et y c'est-à-dire l'ensemble des éléments qui s'écrivent sous la forme $kx + (1 - k)y$ avec $k \in [0, 1]$.

Une autre expression de la Formule de Taylor est la suivante :

Proposition 4.1 Soit f une fonction de n variables définie sur $\mathcal{D}$, x et y deux points de $\mathcal{D}$ tels que le segment $[xy]$ soit inclus dans $\mathcal{D}$; il existe un point $z \in [xy]$ tel que

$$f(y) = f(x) + Df_x(y - x) + \frac{1}{2} {}^t (y - x) H_z (y - x)$$

4.2 Extremas

Soit f une fonction de n variables, $x \in \mathbb{R}^n$ un point stationnaire pour f et h un vecteur de $\mathbb{R}^n$. La formule de Taylor montre que

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{2} {}^t h H_x h + \varepsilon(\|h\|) \|h\|^2$$

où H est la matrice hessienne de f en x et ε une fonction telle que $\lim_{r \rightarrow 0} \varepsilon(r) = 0$.

On peut énoncer différemment les conditions suffisantes d'extrémalité :

Théorème 3 Soit x un point stationnaire pour $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et H_x la matrice hessienne de f en x .

1. Si les valeurs propres de H_x sont toutes strictement positives, x est un minimum pour f .
2. Si H_x est de signature $n, 0$, x est un minimum pour f .
3. Si les valeurs propres de H_x sont toutes strictement négatives, x est un maximum pour f .
4. Si H_x est de signature $0, n$, x est un maximum pour f .
5. Si H_x possède des valeurs propres strictement positives et des valeurs propres strictement négatives, x est un point selle.
6. Si H_x est de signature p, q avec p et q non nuls, x est un point selle.

DÉMONSTRATION : Les conditions 1 et 2 sont équivalentes entre elles et entraînent que $q(h) \geq 0$; ce n'est pas suffisant pour conclure ! En effet, il faut montrer que le terme complémentaire $\varepsilon(\|h\|) \|h\|^2$ peut être négligé. Soit μ la plus petite valeur propre de H_x , qui est strictement positive; nous admettrons que $q(h) \geq \mu \|h\|^2$. On choisit $\|h\|$ suffisamment petit pour avoir $\varepsilon(\|h\|) < \mu$, on a alors $f(x+h) > f(x)$ ce qui prouve que $f(x)$ est un minimum local de f .

Raisonnement analogue pour les conditions 3 et 4 avec $q(\|h\|) < 0$.

Pour les conditions 5 et 6, $q(\|h\|)$ prend des valeurs positives et négatives, le point considéré n'est donc pas un minimum ni un maximum. $\square$

Définition 15 Une forme quadratique, ou une matrice symétrique, vérifiant les conditions 1 ou 2 (resp. 3 ou 4) est dite définie positive (resp. négative).

Remarque : Si une des valeurs propres est nulle, le noyau de H n'est pas réduit au vecteur nul, on peut choisir des accroissements h aussi petits que l'on veut, tels que $q(\|h\|) = 0$; le signe de $f(x+h) - f(x)$ est celui de $\varepsilon(\|h\|) \|h\|^2$ dont on ne sait rien : on ne peut tirer aucune conclusion.

Exemple : $f(x, y) = xy$; la matrice hessienne en $(0, 0)$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

correspond à une forme quadratique $q(h, k) = hk = \frac{1}{4}((h+k)^2 - (h-k)^2)$ de signature $(1, 1)$: l'origine est un point selle.

Remarque : Comme on l'a montré au paragraphe précédent, la condition usuelle avec les déterminants emboîtés est équivalente à dire que la Hessienne est définie positive ou négative.

4.3 Convexité

Définition 16 On dit que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est convexe si quels que soient x et y dans Ω , le segment $[xy]$ est inclus dans Ω .

Exercice 12 Montrer que l'intersection de deux ensembles convexes est convexe.

Définition 17 Soit f définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ convexe ; on dit que f est convexe si

$$\forall x, y \in \Omega, \forall k \in [0; 1] \quad f(kx + (1 - k)y) \leq kf(x) + (1 - k)f(y)$$

Exercice 13 1) Montrer que si f et g sont convexes et si k_1 et k_2 sont positifs ou nuls alors $k_1f + k_2g$ est convexe.

2) Montrer que si g est convexe sur $\mathbb{R}^n$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0\}$ est convexe.

Proposition 4.2 Soit f une fonction convexe, deux fois différentiable, définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ convexe ; il y a équivalence entre

f est convexe et

en chaque point $x \in \Omega$, les valeurs propres de la matrice hessienne H_x sont toutes positives.

DÉMONSTRATION : Admise

Corollaire 4.3 Si f est convexe, alors un point stationnaire de f est nécessairement un minimum global.

DÉMONSTRATION : Soit x le point stationnaire de f et y un point quelconque de Ω ; la Formule de Taylor montre qu'il existe un point $z \in [xy] \subset \Omega$ tel que

$$f(y) = f(x) + \frac{1}{2} {}^t(y - x)H_z(y - x)$$

et la convexité de f montre que ${}^t(y - x)H_z(y - x)$ est positif ou nul, donc que $f(y) \geq f(x)$: f présente en x un minimum global. $\square$

Remarque : Dans ce cas particulier, même si une des valeurs propres de la matrice hessienne en x est nulle, on peut néanmoins conclure !

Exercice 14 On suppose que f est convexe sur Ω et que x et y sont deux points distincts de Ω , stationnaires pour f ; montrer que f est constante sur le segment $[xy]$.

Proposition 4.4 Soit f une fonction convexe, deux fois différentiable, définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ convexe ; on suppose que f est minorée (i.e. f ne tends pas vers moins l'infini) sur Ω . Alors f admet un unique minimum sur Ω .

DÉMONSTRATION : Admise $\square$

Remarque : Si ce minimum est intérieur à Ω , c'est un point stationnaire. Mais ce minimum peut avoir lieu sur le bord de Ω auquel cas on ne peut rien dire des dérivées partielles en ce point (si elles existent!).

La valeur minimum de f est unique, mais il peut être atteint en plusieurs points !

Exercice 15 Soient $f, g_1, \dots, g_p$ des fonctions convexes différentiables définies sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{D}$ l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant les contraintes $g_1(x) \leq 0, \dots, g_p(x) \leq 0$.

a) Montrer que $\mathcal{D}$ est convexe.

b) Soit L la fonction de $n + p$ variables définies par $L(x, \lambda_1, \dots, \lambda_p) = f(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i(x)$. On suppose que $(x_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathcal{D}$ est un point stationnaire pour L et qu'en ce point on a

$$(*) \quad \forall i, 1 \leq i \leq p \quad \lambda_i g_i(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_i \geq 0$$

Montrer qu'en x_0 , f admet un minimum sous contrainte. (Méthode de Kuhn et Tucker).

Remarque : On peut montrer que les conditions précédentes (*) sont des conditions nécessaires pour un extremum sous contraintes, même sans les hypothèses de convexité.

5 Application : suites et récurrences linéaires

Equation caractéristique, ensemble des solutions.

Cas des racines complexes.

Cas des équations avec second membre.

6 Extrema avec et sans contrainte

Deuxième partie

Analyse

7 Suites et Mathématiques Financières

Suite arithmétique, suite géométrique : définition, convergence, somme des termes.

Interêts simples : traites, effets de commerce.

Intérêts composés : actualisation, rente, amortissement d'un emprunt, obligations.

Fonctions usuelles

8 Fonctions trigonométriques

8.1 Introduction

La seule méthode rigoureuse pour définir les fonctions circulaires consiste à passer par l'exponentielle complexe. D'après la formule de Taylor appliquée à la fonction exponentielle naturelle, on a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Rien n'interdit de définir pour $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

à condition de justifier la convergence. Il est facile d'admettre que la propriété fondamentale de l'exponentielle reste vraie

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

et que si x est réel, alors $z = e^{ix}$ et $z' = e^{-ix}$ sont complexes conjugués. Ceci montre que $zz' = z\bar{z} = |z|^2 = e^0 = 1$. On définit alors deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\cos : x \mapsto \Re(e^{ix}) \quad \sin : x \mapsto \Im(e^{ix})$$

Il revient au même d'écrire

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos(x) + i \sin(x) \\ e^{-ix} &= \cos(-x) + i \sin(-x) &= \bar{e^{ix}} = \cos(x) - i \sin(x) \\ \cos(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin(x) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned}$$

Les deux dernières relations constituent les **Formules d'Euler** ; on voit immédiatement que la fonction $\cos$ est paire et la fonction $\sin$ impaire.

On montre enfin que la fonction $x \mapsto e^{ix}$ est dérivable (en un sens à préciser car il s'agit d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$) avec

$$(e^{ix})' = ie^{ix}$$

ce qui conduit à

$$(\cos(x) + i \sin(x))' = i(\cos(x) + i \sin(x)) = -\sin(x) + i \cos(x)$$

d'où on tire

Proposition 8.1 *Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec*

$$(\sin(x))' = \cos(x) \quad (\cos(x))' = -\sin(x)$$

8.2 Fonctions hyperboliques

Définition 18 On définit les fonctions sinus ($x \mapsto \text{sh}(x)$), cosinus ($x \mapsto \text{ch}(x)$) et tangente ($x \mapsto \text{th}(x)$) hyperboliques par les relations suivantes :

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$$

On remarquera l'analogie avec les Formules d'Euler.

On vérifie immédiatement les propriétés suivantes

1. sh et th sont impaires, ch est paire,
2. Pour tout réel x on a : $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$; on a donc $\forall x, \text{ch}(x) \geq 1$.
3. Les fonctions hyperboliques sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ avec

$$(\text{sh}(x))' = \text{ch}(x) \quad (\text{ch}(x))' = \text{sh}(x) \quad (\text{th}(x))' = 1 - \text{th}^2(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}$$

4. $\forall x, |\text{th}(x)| < 1$; en outre $\text{th}(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.

Exercice 16 Dresser la tableau de variation des fonctions sh, ch et th et tracer leurs représentations graphiques.

8.3 Fonctions circulaires

Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique, de centre O de rayon 1, dont une équation cartésienne est $x^2 + y^2 = 1$. A chaque point $M(x, y)$ de $\mathcal{C}$ on peut associer (au moins) un réel θ tel que

$$x = \cos(\theta) \quad y = \sin(\theta)$$

et réciproquement à chaque réel θ on sait associer un point $M(x, y)$ de $\mathcal{C}$; ceci définit donc les fonctions sinus et cosinus. On pose, lorsque cela est défini,

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

On vérifie immédiatement les propriétés suivantes

1. sin et tan sont impaires, cos est paire,
2. sin et cos sont 2π -périodiques, tan est π -périodique, avec

$$\begin{aligned} \sin(x + 2\pi) &= \sin(x) & \cos(x + 2\pi) &= \cos(x) \\ \sin(x + \pi) &= -\sin(x) & \cos(x + \pi) &= -\cos(x) \\ \sin(\pi - x) &= \sin(x) & \cos(\pi - x) &= -\cos(x) \\ \sin(\pi/2 - x) &= \cos(x) & \cos(\pi/2 - x) &= \sin(x) \\ \tan(x + \pi) &= \tan(x) & \tan(\pi/2 - x) &= \cotan(x) = \frac{1}{\tan(x)} \end{aligned}$$

3. Pour tout réel x on a : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$; on a donc $\forall x, |\cos(x)| \leq 1, |\sin(x)| \leq 1$.
4. Les fonctions trigonométriques sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ avec

$$(\sin(x))' = \cos(x) \quad (\cos(x))' = -\sin(x) \quad (\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Exercice 17 Dresser la tableau de variation des fonctions sin, cos et tan et tracer leurs représentations graphiques.

9 Fonctions réciproques

9.1 Existence

Proposition 9.1 Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle $I = [a, b]$. La fonction f réalise une bijection de I sur l'intervalle J de bornes $f(a)$ et $f(b)$; la bijection réciproque f^{-1} étant définie par

$$f : x \mapsto y = f(x) \quad f^{-1} : y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

Si de plus f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) \neq 0$, la fonction f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ avec

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

DÉMONSTRATION : Admise □

Remarque : La propriété précédente se généralise à un intervalle ouvert $I =]a, b[$ (avec a et b éventuellement infinis) en remplaçant l'intervalle J par l'intervalle dont les bornes sont $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$. (La monotonie de f assure l'existence de ces limites qui peuvent être infinies).

On peut adapter la Propriété à un intervalle I semi-ouvert, du type $[a, b[$.

9.2 Hyperboliques réciproques

Proposition 9.2 La fonction sh est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$; elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la bijection réciproque étant notée argsh :

$$y = \text{argsh}(x) \iff x = \text{sh}(y)$$

Proposition 9.3 La fonction ch est continue et strictement monotone sur $I = [0, +\infty[$; elle réalise une bijection de I dans $[1, +\infty[$, la bijection réciproque étant notée argch :

$$x = \text{ch}(y) \iff \begin{cases} x \geq 1 \\ y \end{cases} = \text{argch}(x)$$

Proposition 9.4 La fonction th est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$; elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $] -1, 1[$, la bijection réciproque étant notée argth :

$$x = \text{th}(y) \iff \begin{cases} -1 < x < 1 \\ y \end{cases} = \text{argth}(x)$$

Exercice 18 A partir de la relation

$$x = \text{sh}(y) \iff 2x = e^y - e^{-y} = e^y - \frac{1}{e^y}$$

exprimer $Y = e^y$ en fonction de x .

En déduire les relations :

$$\begin{aligned} \text{argsh}(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ \text{argch}(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \\ \text{argth}(x) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{aligned}$$

9.3 Trigonométries réciproques

Proposition 9.5 *La fonction f définie sur l'intervalle $I = [-\pi/2, \pi/2]$ par $f(x) = \sin(x)$ est continue et strictement monotone : elle définit une bijection de I vers l'intervalle $J = [-1, 1]$. La bijection réciproque notée, $\arcsin$, est caractérisée par*

$$y = \arcsin(x) \iff \begin{cases} -\pi/2 \leq y \leq \pi/2 \\ x = \sin(y) \end{cases}$$

Proposition 9.6 *La fonction f définie sur l'intervalle $I = [0, \pi]$ par $f(x) = \cos(x)$ est continue et strictement monotone : elle définit une bijection de I vers l'intervalle $J = [-1, 1]$. La bijection réciproque notée, $\arccos$, est caractérisée par*

$$y = \arccos(x) \iff \begin{cases} 0 \leq y \leq \pi \\ x = \cos(y) \end{cases}$$

On remarquera que la fonction $\arccos$ (comme la fonction $\cos$) est une fonction décroissante.

Proposition 9.7 *La fonction f définie sur l'intervalle $I =]-\pi/2, \pi/2[$ par $f(x) = \tan(x)$ est continue et strictement monotone : elle définit une bijection de I vers l'intervalle $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$. La bijection réciproque notée, $\arctg$, est caractérisée par*

$$y = \arctg(x) \iff \begin{cases} -\pi/2 < y < \pi/2 \\ x = \tan(y) \end{cases}$$

Remarque : Il faut bien faire attention au domaine de définition des fonctions trigonométriques : on a $\cos(-\pi/3) = 1/2$ mais $\arccos(1/2) = \pi/3$; de même $\sin(5\pi/6) = 1/2$ mais $\arcsin(1/2) = \pi/6$.

9.4 Dérivées

10 Décomposition en éléments simples

Soient P et Q deux fonctions polynômes à coefficients réels, $a_1, \dots, a_n$ les racines de Q avec leurs multiplicités respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_n$; sans nuire à la généralité on peut donc supposer que

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_n)^{\alpha_n}$$

Proposition 10.1 *Supposons que $\deg(P) < \deg(Q)$; il existe des complexes A_{ij} , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq \alpha_i$ tels que*

$$\forall x, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{j=\alpha_1} \frac{A_{1j}}{(x - a_1)^j} + \dots + \sum_{j=1}^{j=\alpha_n} \frac{A_{nj}}{(x - a_n)^j}$$

Cette décomposition est appelée décomposition en éléments simples de premières espèces. On admettra que

1. Il y a unicité d'une telle décomposition.
2. Les A_{ij} correspondant à des a_i réels sont aussi réels,
3. Les A_{ij} correspondant à des a_i complexes conjugués, sont aussi complexes conjugués.

4. Si $\deg(P) \geq \deg(Q)$, : il existe un polynôme $B(x)$ et un polynôme $R(x)$ de degré strictement inférieur à $\deg(Q)$ tel que

$$P(x) = B(x)Q(x) + R(x)$$

(on dit qu'on effectue la division euclidienne de P par Q), en écrivant

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B(x)Q(x) + R(x)}{Q(x)} = B(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

on est ramené à décomposer $R(x)/Q(x)$.

Dans le cas de racines complexes conjuguées, on peut regrouper les termes conjugués pour obtenir une décomposition en éléments simples de deuxième espèce.

Supposons que la décomposition de $Q(x)$ fasse apparaître un facteur irréductible sur $\mathbb{R}$

$$(x^2 + bx + c)^\alpha$$

Les éléments simple correspondants seront de la forme

$$\sum_{j=1}^{\alpha} \frac{B_j x + C_j}{(x^2 + bx + c)^j}$$

Exemple : Soit $Q(x) = (x+1)^3(x^2+x+1)^2$; cherchons à décomposer $1/Q(x)$.

En éléments simples de première espèce (sur $\mathbb{C}$), les racines de $x^2 + x + 1$ sont les nombres complexes j et $\bar{j}$ définis par

$$j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \bar{j} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

On a donc $Q(x) = (x+1)^3(x-j)^2(x-\bar{j})^2$, ce qui fournit la décomposition suivante

$$\frac{1}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x+1} + \frac{A_{12}}{(x+1)^2} + \frac{A_{13}}{(x+1)^3} + \frac{A_{21}}{x-j} + \frac{A_{22}}{(x-j)^2} + \frac{A_{31}}{x-\bar{j}} + \frac{A_{32}}{(x-\bar{j})^2}$$

avec par définition $A_{31} = \bar{A}_{21}$ et $A_{32} = \bar{A}_{22}$. Un calcul sordide donne les valeurs

$$A_{11} = A_{13} = 1, A_{12} = 2,$$

En éléments simples de deuxième espèce (sur $\mathbb{R}$) : on peut partir de la décomposition précédente sur $\mathbb{C}$ et regrouper les termes conjugués.

Il est aussi rapide de chercher directement la décomposition

$$\frac{1}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x+1} + \frac{A_{12}}{(x+1)^2} + \frac{A_{13}}{(x+1)^3} + \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + x + 1} + \frac{B_2 x + C_2}{x^2 + x + 1}$$

et obtenir

$$B_2 = 0, C_2 = -1, B_1 = -1, C_1 = -2.$$

Intégration

11 Primitives

Définition 19 Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point et f une fonction définie sur I ; on appelle **primitive** de f toute fonction F définie et dérivable sur I vérifiant $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Proposition 11.1 Soit F et G deux primitives de f sur I , il existe une constante C telle que $\forall x \in I, G(x) = F(x) + C$.

DÉMONSTRATION : La dérivée de $G - F$ est nulle sur I , donc $G - F$ est constante. $\square$

NOTATION : L'ensemble des primitives de g sera noté $\int g(t) dt$; par exemple, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C^{\text{te}}$$

Proposition 11.2 Soient F une primitive de f sur I et G une primitive de g sur le même intervalle I et λ un réel ; la fonction $\lambda F + G$ est une primitive de $\lambda f + g$.

DÉMONSTRATION : La dérivée de $\lambda F + G$ sur I est $\lambda F' + G' = \lambda f + g$. $\square$

Exemple : La fonction $x^4 + 2x^3 - 1999$ est une primitive de $4x^3 + 6x^2$.

Proposition 11.3 Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$; une primitive de $f(ax+b)$ est la fonction $\frac{1}{a}F(ax+b)$.

DÉMONSTRATION : D'après la formule de dérivation des fonctions composées, la dérivée de $F(ax+b)$ est $aF'(ax+b) = af(ax+b)$. $\square$

Exemple : Une primitive de $\cos(2x + \frac{\pi}{4})$ est $\frac{1}{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4})$.

Théorème 4 Soit f une fonction continue sur un intervalle I non vide et non réduit à un point, $a \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ donné. Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(a) = y_0$.

DÉMONSTRATION : Admise. $\square$

Exemple : La fonction logarithme népérien est définie comme la primitive de $f(x) = 1/x$ définie sur $]0, +\infty[$ qui s'annule pour $a = 1$.

Définition 20 Soit f définie et continue sur un intervalle $[a, b]$; on appelle **intégrale** de f sur $[a, b]$, notée $\int_a^b f(t) dt$, le réel défini par

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur I .

Remarque :

- ✓ Le résultat ne dépend pas de la primitive choisie, puisqu'elle est définie à une constante additive près.
- ✓ La primitive de f qui s'annule pour $x = a$ est donc

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

✓ Si $b < a$ on pose par définition

$$\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$$

Proposition 11.4 Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, λ un réel; on a

$$\int_a^b (\lambda f(t) + g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

DÉMONSTRATION : voir Proposition 11.2. □

Proposition 11.5 (Relation de Chasles) Soient a, b, c trois réels et f définie sur le plus grand des intervalles de bornes a, b et c . On a alors

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt$$

DÉMONSTRATION : Laisée au lecteur.

Proposition 11.6 Soit f positive ou nulle sur $[a, b]$ (avec $a < b$); on a alors

$$\int_a^b f(t) dt \geq 0$$

DÉMONSTRATION : Soit F une primitive de f ; sa dérivée f étant positive sur I , la fonction F est croissante sur I , on a donc $F(a) \leq F(b)$. □

Corollaire 11.7 Soient f et g continues sur $[a, b]$ avec $\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$. On a

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$$

Proposition 11.8 (Formule de la moyenne) Soit f une fonction continue sur $I = [a, b]$; on appelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$ le réel

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Soit m (resp. M) le minimum (resp. le maximum) de f sur $[a, b]$; on a

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq M$$

En particulier, si f est continue, il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \mu$.

DÉMONSTRATION : On a donc $\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$; en intégrant cette relation entre a et b on obtient

$$\int_a^b m dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b M dt \tag{4}$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a) \tag{5}$$

d'où la relation annoncée. La dernière affirmation est une simple application du théorème des valeurs intermédiaires. $\square$

Remarque : On suppose connue la notion d'aire d'une partie du plan ; soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a, b]$, on note

$$\Omega_t = \{(x, y) \mid a \leq x \leq t, \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$$

et $F : t \mapsto \mathcal{A}(\Omega_t)$. Par définition $F(x+h) - F(x)$ représente l'aire du domaine limité par les droites verticales d'abscisses x et $x+h$, l'axe des abscisses et la représentation graphique de f . On peut considérer, si h est assez petit que cette aire correspond à celle d'un rectangle de base h et de hauteur z où $z = f(c)$ pour un certain c compris entre x et $x+h$. Si on calcule le taux d'accroissement de F entre x et $x+h$ on obtient

$$\tau_x(h) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{hz}{h} = z = f(c)$$

Lorsque h tend vers 0, $\tau_x(h)$ a pour limite $f(x)$ car f est continue : ce qui montre que F est dérivable, avec $F'(x) = f(x)$, autrement dit F est une primitive de f sur $[a, b]$.

Corollaire 11.9 *Avec les notations précédentes*

$$\mathcal{A}(\Omega_b) = \int_a^b f(t) dt$$

12 Intégration

12.1 Intégration par parties

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, le réel $f(b) - f(a)$ est noté

$$[f]_a^b \quad \text{ou encore} \quad [f(x)]_{x=a}^{x=b}$$

Proposition 12.1 *Soient f et g deux fonctions continues et dérivables sur $[a, b]$ telles que f' et g' soient aussi continues. On a alors*

$$\int_a^b f'(t)g(t) dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)g'(t) dt$$

DÉMONSTRATION : La fonction fg est dérivable, avec pour dérivée $f'g + fg'$. Une primitive de $f'g + fg'$ est donc fg , c'est-à-dire

$$\int_a^b (f'(t)g(t) + f(t)g'(t)) dt = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

Le terme de gauche s'écrit encore $\int_a^b f'(t)g(t) dt + \int_a^b f(t)g'(t) dt$ d'où la formule annoncée. $\square$

Exemple : Calculer $\int_1^2 (3x^2 + 2x + 1) \ln(x) dx$.

On applique la formule avec $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ et $g(x) = \ln(x)$; il faut donc déterminer f , c'est-à-dire calculer une primitive de $3x^2 + 2x + 1$, puis calculer une primitive du terme fg' .

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2x + 1 & f(x) &= x^3 + x^2 + x \\ g(x) &= \ln(x) & g'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}\int_1^2 (3x^2 + 2x + 1) \ln(x) dx &= [(x^3 + x^2 + x) \ln(x)]_1^2 - \int_1^2 (x^3 + x^2 + x) \frac{1}{x} dx \\ &= 14 - \int_1^2 (x^2 + x + 1) dx \\ &= 14 \ln(2) - \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_1^2 = 14 \ln(2) - \frac{7}{2}\end{aligned}$$

On peut aussi appliquer plusieurs fois le procédé.

Exemple : Calculer $\int x^2 \sin(x) dx$.

Si on intègre x^2 et si on dérive $\sin(x)$ l'intégrale à calculer dans le terme de droite sera $\int \frac{1}{3}x^3 \cos(x) dx$ ce qui n'est guère plus simple, par contre si on dérive x^2 et qu'on intègre $\sin(x)$ on fera apparaître $\int 2x \cos(x) dx$: le calcul n'est pas immédiat mais on peut recommencer ...

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(x) dx &= [-x^2 \cos(x)]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2x \cos(x) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} 2x \cos(x) dx \\ &= [2x \sin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2 \sin(x) dx \\ &= \pi + [\cos(x)]_0^{\pi/2} = \pi + 1\end{aligned}$$

12.2 Changement de variable

Théorème 5 Soit g une fonction admettant une dérivée continue sur $[a, b]$ et deux réels A et B tels que

$$a \leq t \leq b \quad \text{entraîne} \quad A \leq g(t) \leq B$$

et f une fonction continue sur $[A, B]$. On a

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(s) ds = \int_a^b f(g(t)) g'(t) dt$$

DÉMONSTRATION : On applique la formule de dérivation des fonctions composées. Soit F une primitive de f ; la fonction $F \circ g$ est définie sur $[a, b]$ et dérivable avec

$$(F \circ g)'(u) = F'(g(u)) g'(u) = f(g(u)) g'(u)$$

La fonction g' étant continue, on a donc par définition d'une primitive

$$\int_a^b f(g(t)) g'(t) dt = F(g(b)) - F(g(a))$$

D'autre part, puisque $F = \int f(t) dt$, on peut écrire

$$F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s) ds$$

□

Remarque : En pratique, dans $\int f(s) ds$, on pose $s = g(t)$, on remplace ds par $g'(t)dt$, puis on change les bornes d'intégration : pour $t = a$ on a $s = g(a)$.

En particulier, dans un changement de variables, l'élément ds se comporte comme une différentielle. On choisit souvent comme changement de variables une fonction g monotone qui établit alors une bijection entre $[a, b]$ et $[A, B]$.

Exemple : : Calculer $I_1 = \int_0^4 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$

Posons $x = t^2$ ce qui conduit à $dx = 2t dt$ et

$$I_1 = \int_0^2 \frac{2t dt}{t^2 + t} = \int_0^2 \frac{2 dt}{t + 1} = [\ln(t + 1)]_0^2 = \ln(3)$$

Calculer $I_2 = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$.

On peut remarquer que I_2 représente l'aire du demi-disque de centre 0 et de rayon 1 situé dans le demi-plan $y \geq 0$.

On pose $x = \sin(\theta)$, on a alors $dx = \cos(\theta) d\theta$, et

$$I_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2(\theta)} \cos(\theta) d\theta$$

Sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$, $\cos(\theta)$ est positif, et compte tenu de $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ on a

$$I_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta) d\theta$$

On calcule la dernière intégrale par linéarisation (c.f. plus loin) à partir de

$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

d'où

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta) d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi/2 = I_2$$

12.3 Linéarisation

12.4 Fractions rationnelles

13 Intégrales multiples

13.1 Définition

Intégrale de Riemann : sommes de Darboux.

13.2 Fubini-Tonelli

13.3 Changement de variable

Cas général, cas particulier des coordonnées polaires.

13.4 Applications

Aire, volume, moments d'inertie.

Applications aux statistiques

Equations différentielles

FIG. 1 – Courbes intégrales de $x' = (1 - x^2)t$.

)

14 Equations du premiers ordre

14.1 Définitions

Définition 21 Soient $(u, v) \mapsto \varphi(u, v)$ une fonction réelle de deux variables réelles définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$, $t \mapsto x(t)$ une fonction réelle définie et **dérivable** sur un intervalle $[t_0, t_1]$ telle que pour tout $t \in [t_0, t_1]$, $(t, x(t))$ est contenue dans D .

On dit que x est solution de l'équation différentielle du premier ordre

$$x' = \varphi(t, x) \quad (6)$$

si elle vérifie, pour tout $t \in [t_0, t_1]$: $x'(t) = \varphi(t, x(t))$

Remarque : Cette forme est dite résolue en x' ; le cas le plus général correspondrait à une relation de la forme $\Phi(t, x, x') = 0$.

Si φ est la la forme $\varphi(t, x(t)) = a(t)x(t) + b(t)$, où a et b sont deux fonctions numériques, l'équation (6) est dite linéaire. Dans le cas particulier où a et b sont deux fonctions constantes, l'équation (6) est dite linéaire à coefficients constants.

Si φ ne dépend pas explicitement de t , l'équation (6) est dite autonome.

Exemple :

$$y'(t) + y^2(t) = t \quad (7)$$

$$(1 + t^2)y'(t) + 2ty(t) = 1 \quad (8)$$

$$y'(t) + (1 + 2t)y(t) = t^3 + 2 \quad (9)$$

$$t^2y'(t) + 2ty(t) - y^2(t) = t^2 \quad (10)$$

Résoudre (6) c'est déterminer un intervalle $[t_0, t_1]$ et une fonction **dérivable** sur $[t_0, t_1]$ satisfaisant la relation : $x'(t) = \varphi(t, x(t))$.

On appelle problème différentiel de valeur initiale, ou problème de Cauchy, la recherche d'une solution de (6) ayant une valeur donnée x_0 en un point donné t_0 .

Remarque : Interprétation géométrique :

La fonction x étant solution, l'ensemble $\mathcal{C}$ des points $(t, x(t))$ est appelé courbe intégrale de l'équation : en chaque point la tangente à $\mathcal{C}$ a pour pente $\varphi(t, x(t))$. Sur la figure 1, chacune des flèches a pour pente la valeur de $\varphi(t, x(t))$ calculée à l'origine de celle-ci ; on a aussi représenté quelques courbes intégrales et l'on peut vérifier qu'elles "suivent bien les flèches".

Réciproquement, la recherche d'une courbe admettant en chaque point $M(x, y)$ une tangente dont la pente m est une fonction donnée de M : $(x, y) \mapsto m = \varphi(x, y)$ revient à résoudre l'équation différentielle

$$y'(x) = \varphi(x, y(x))$$

14.2 Existence et unicité

Définition 22 Soit $\varphi : (u, v) \mapsto \varphi(u, v)$ une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$; on dit que φ satisfait une condition de Lipschitz¹, par rapport à v , s'il existe $k > 0$ tel que pour tout (u, v_1) et (u, v_2)

¹Lipschitz Rudolf Otto Sigismund : Mathématicien allemand 1832-1903

appartenant à $\mathcal{D}$ on ait

$$|\varphi(u, v_1) - \varphi(u, v_2)| \leq k|v_1 - v_2|$$

Remarque : Cette condition est satisfaite si $\partial\varphi/\partial v$ est bornée sur $\mathcal{D}$, en particulier si $\partial\varphi/\partial v$ est continue et $\mathcal{D}$ est borné.

Théorème 6 Supposons que φ satisfait une condition de Lipschitz sur un pavé

$$|t - t_0| \leq a \quad \text{et} \quad |x - x_0| \leq b$$

Il existe une unique solution x définie sur un intervalle ouvert contenant t_0 , de (6) telle que $x(t_0) = x_0$.

Exemple : La solution du problème aux conditions initiales

$$y'(t) = y^2(t) \quad \text{avec} \quad y(-1) = 1$$

(correspondant à $\varphi(t, y(t)) = y^2(t)$) qui est une fonction tout à fait raisonnable!) est donnée par $y(t) = 1/t$: cette fonction ne peut être prolongée au delà de $t = 0$.

Considérons l'équation

$$x'(t) = \sqrt{x(t)} \tag{11}$$

avec $\varphi(t, x) = \sqrt{x}$ qui ne satisfait pas une condition de Lipschitz sur un pavé contenant $(0, 0)$. Les fonctions

$$x_1(t) = 0 \quad x_2(t) = \frac{t^2}{4}$$

sont solutions de (11) sur $[0, +\infty[$ avec $x_1(0) = x_2(0) = 0$.

Dans la suite, on n'utilisera pas ce théorème, mais on pourra vérifier dans chaque cas particulier l'existence et l'unicité de la solution du problème aux conditions initiales.

14.3 Equation à variables séparables

Définition 23 Soit f une fonction continue, **non nulle** sur un intervalle $[x_1, x_2]$ et g une fonction continue sur $[a, b]$. On considère l'équation suivante

$$f(x(t))x'(t) = g(t) \tag{12}$$

Exemple :

$$\cos(x(t))x'(t) = t \tag{13}$$

$$\frac{u'(t)}{1 - 3u + 2u^2} = \frac{1}{t} \tag{14}$$

$$x(t)x'(t)(1 + 2x^2(t)) = 1 + t. \tag{15}$$

Proposition 14.1 Soit F une primitive de f ; pour tout $t_0 \in]a, b[$ et pour tout $x_0 \in]x_1, x_2[$ l'équation (12) admet une unique solution vérifiant $x(t_0) = x_0$, définie sur un intervalle contenant t_0 par :

$$F(x(t)) = F(x(t_0)) + \int_{t_0}^t g(s) ds.$$

DÉMONSTRATION : Il s'agit d'appliquer habilement le théorème de dérivation des fonctions composées. Comme f est continue, elle admet une primitive F : la fonction $t \mapsto f(x(t))x'(t)$ est la dérivée de la fonction composée $t \mapsto F(x(t))$. On a donc, en intégrant entre t_0 et t ,

$$F(x(t)) - F(x(t_0)) = \int_{t_0}^t g(s) ds \quad (16)$$

Réciproquement, toute fonction x dérivable et vérifiant (16) est une solution de (12).

Le seul problème est de déterminer x à partir de la relation (16). On montre qu'il est toujours possible d'inverser (i.e. déterminer la bijection réciproque) la fonction F ; pratiquement la relation obtenue ne permet pas toujours d'obtenir une expression explicite de $x(t)$.

Exemple : Pour l'équation (13), l'équation devient $(\sin(x(t)))' = t$ et par intégration

$$\sin(x(t)) = \frac{t^2}{2} + C^{te} \quad (17)$$

Déterminons la solution x_1 de (13) telle que $x_1(0) = 0$ et la solution x_2 telle que $x_2(2) = \pi$. Pour x_1 , en reportant dans (17) on obtient $\sin(0) = 0 + C^{te}$ d'où $x_1(t) = \arcsin(t^2/2)$; pour x_2 on trouve $\sin(\pi) = 2 + C^{te}$ ce qui conduit à $\sin(x_2(t)) = \frac{t^2}{2} - 2$ et compte-tenu de l'intervalle de définition de x_2 on obtient

$$x_2(t) = \arcsin\left(\frac{t^2}{2} - 2\right) + \pi$$

Pour l'équation (14), elle se ramène à chercher une primitive de la fonction rationnelle

$$u \mapsto \frac{1}{1 - 3u + 2u^2} = \frac{1}{u - 1} - \frac{2}{2u - 1}$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \ln |u(t) - 1| - \ln |2u(t) - 1| &= \ln |t| + C^{te} \\ \frac{u(t) - 1}{2u(t) - 1} &= K t \\ u(t)(1 - 2Kt) &= 1 - Kt \\ u(t) &= \frac{1 - 2Kt}{1 - Kt} \end{aligned}$$

la valeur de K étant déterminée par les conditions initiales, sous réserve que $u(t_0)$ ne soit pas un zéro du dénominateur de la fraction rationnelle.

Pour l'équation (15), on a immédiatement

$$(x^2(t) + x^4(t))' = 2(1 + t) \quad \text{d'où} \quad x^2(t) + x^4(t) = t^2 + 2t + C^{te}$$

qui permet, théoriquement, de calculer $x(t)$ en fonction de t .

Remarque : L'hypothèse f ne s'annule pas, n'est pas nécessaire pour établir la relation (16) ; elle est suffisante pour établir l'existence de la bijection réciproque F^{-1} . Elle permet en outre de mettre (12)

sous forme résolue $x'(t) = \frac{g(t)}{f(x(t))}$.

14.3.1 Cas particulier des équations homogènes

Définition 24 Soit f une fonction continue, **non nulle** sur un intervalle $[x_1, x_2]$ et K un réel quelconque. On appelle équation homogène une équation de la forme

$$f\left(\frac{x(t)}{t}\right)x'(t) = K \quad (18)$$

Remarque : Une équation homogène est une équation où apparaît naturellement la quantité $x(t)/t$. Plus précisément une équation $\varphi(t, x, x') = 0$ est homogène si

$$\forall \lambda > 0, \quad \varphi(u, v, w) = 0 \implies \varphi(\lambda u, \lambda v, w) = 0.$$

ou encore si l'équation ne change pas quand on remplace t par λt et $x(t)$ par $\lambda x(t)$.

Pour résoudre (18) on utilise la fonction auxiliaire $u : t \mapsto \frac{u(t)}{t}$; l'équation (18) est alors équivalente à l'équation à variables séparables

$$\frac{f(u(t))}{K - u(t)f(u(t))} u'(t) = \frac{1}{t}$$

que l'on peut résoudre comme au paragraphe précédent.

Exemple : Soit l'équation

$$t^2 y'(t) + 2ty(t) - 2y^2(t) = t^2 \quad (19)$$

Vérifions que (19) est homogène : si on remplace t par λt et $y(t)$ par $\lambda y(t)$ on obtient

$$\lambda^2 t^2 y'(t) + 2\lambda t \lambda y(t) - 2\lambda^2 y^2(t) = \lambda^2 t^2$$

qui est bien équivalente à (19) en simplifiant par λ^2 .

Pour la résolution, on pose $y(t) = t u(t)$ et $y'(t) = u(t) + t u'(t)$; la substitution dans (19) conduit à

$$t^2(u(t) + t u'(t)) + 2t(t u(t)) - 2t^2 u^2(t) = t^2 \quad (20)$$

$$t u'(t) + 3u(t) - 2u^2(t) = 1 \quad \text{après simplification} \quad (21)$$

$$t u'(t) = 1 - 3u + 2u^2 \quad (22)$$

$$\frac{u'(t)}{1 - 3u + 2u^2} = \frac{1}{t} \quad (23)$$

qui est l'équation 14 résolue au paragraphe précédent,

$$u(t) = \frac{1 - 2Kt}{1 - Kt} \quad \text{d'où} \quad y(t) = \frac{t - 2Kt^2}{1 - Kt}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier, en dérivant y , qu'elle est bien solution.

14.4 Equations linéaires

D'après la définition, une équation linéaire est une équation de la forme

$$x'(t) + a(t)x(t) = b(t) \quad (24)$$

L'équation est dite homogène, si $b(t)$ est identiquement nulle ; l'équation

$$x'(t) + a(t)x(t) = 0. \quad (25)$$

est appelée équation homogène associée à (24).

Malheureusement le terme homogène est assez ambigu : il fait référence aux systèmes linéaires (un système est homogène si le second membre est nul) et non pas aux équations homogènes définies au paragraphe précédent.

Proposition 14.2 *Soient x_1 et x_2 deux solutions de l'équation complète (24) ; la fonction $x_2 - x_1$ est une solution de l'équation homogène associée.*

DÉMONSTRATION : Soit $z = x_2 - x_1$, on a évidemment

$$z'(t) + a(t)z(t) = x_2'(t) - x_1'(t) + a(t)(x_2(t) - x_1(t)) = x_2'(t) + a(t)x_2(t) - (x_1'(t) + a(t)x_1(t)) = 0$$

□

Corollaire 14.3 *On connaît toute les solutions de (24) si on connaît une solution particulière de (24) et l'ensemble des solutions de (25).*

Corollaire 14.4 *Principe de superposition des solutions. On suppose que le second membre $b(t)$ de (24) s'écrit $b_1(t) + b_2(t)$; soient x_1 (resp. x_2) une solution de $x_1'(t) + a(t)x_1(t) = b_1(t)$ (resp. de $x_2'(t) + a(t)x_2(t) = b_2(t)$). La fonction $x_1 + x_2$ est une solution particulière de (24).*

14.4.1 Equation linéaire homogène

Proposition 14.5 *Soit A une primitive de a , par exemple $A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$. L'ensemble des solutions (i.e. la solution générale) de*

$$x'(t) + a(t)x(t) = 0$$

est donnée par

$$x(t) = K e^{-A(t)}$$

où K est une constante arbitraire.

En particulier, la solution prenant la valeur x_0 pour $t = t_0$ est donnée par

$$x(t) = x_0 e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds}$$

DÉMONSTRATION : Soit $A(t)$ une primitive de $a(t)$ et $\phi(t) = e^{A(t)}$. Par définition la fonction ϕ ne s'annule jamais ; on obtient donc une équation équivalente en multipliant (25) par $\phi(t)$:

$$x'(t) + a(t)x(t) = 0 \iff e^{A(t)}x'(t) + e^{A(t)}a(t)x(t) = 0$$

Cette dernière expression est très exactement la dérivée de la fonction $t \mapsto x(t) \exp(A(t))$ qui est nulle : il existe donc une constante K telle que pour tout t ,

$$x(t) e^{A(t)} = K \iff x(t) = K e^{-A(t)}$$

Si on choisit $A(t) = \int_{t_0}^t a(s)ds$, c'est-à-dire la primitive de a nulle pour $t = t_0$ on obtient exactement $K = x(t_0)$. $\square$

En pratique, on écrit, ce qui n'est pas rigoureux mais est justifié par le résultat précédent :

$$\begin{aligned}\frac{x'(t)}{x(t)} &= -a(t) \\ [\ln(|x(t)|)]_{t_0}^t &= \int_{t_0}^t -a(s) ds \\ \ln(|x(t)|) &= \ln(|x(t_0)|) - \int_{t_0}^t a(s) ds \\ x(t) &= x_0 e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds}\end{aligned}$$

14.4.2 “Variation de la constante”

Proposition 14.6 *La solution générale de (24) s'écrit, en notant A une primitive de a ,*

$$x(t) = e^{-A(t)} \int_{t_0}^t e^{A(s)} g(s) ds + K e^{-A(t)}$$

où K est une constante arbitraire.

DÉMONSTRATION : Avec les mêmes notations que ci-dessus, on a

$$x'(t) + a(t)x(t) = b(t) \iff e^{A(t)}x'(t) + e^{A(t)}a(t)x(t) = b(t)e^{A(t)}$$

Cette dernière relation s'écrit encore de façon équivalente

$$\begin{aligned}(e^{A(t)}x(t))' &= b(t)e^{A(t)} \\ e^{A(t)}x(t) &= K + \int_{t_0}^t b(s)e^{A(s)} ds \\ x(t) &= e^{-A(t)} \left(K + \int_{t_0}^t b(s)e^{A(s)} ds \right)\end{aligned}$$

$\square$

Remarque : C'est bien de la forme annoncée au Corollaire 14.3 : le terme $Ke^{-A(t)}$ correspond à la solution générale de l'équation homogène associée et le terme $e^{-A(t)} \int_{t_0}^t e^{A(s)} g(s) ds$ à une solution particulière de l'équation complète.

En pratique, on utilise la méthode de *variation de la constante* sous la forme suivante : on part de la solution de l'équation homogène

$$x(t) = K\phi(t)$$

et on cherche la solution générale de l'équation complète sous la forme

$$x(t) = K(t)\phi(t)$$

(d'où le nom de variation de la constante : on fait varier la constante, c'est-à-dire on la transforme en fonction de t) puis on remplace dans l'équation

$$x'(t) + a(t)x(t) = g(t) \tag{26}$$

$$K'(t)\phi(t) + K(t)\phi'(t) + a(t)\phi(t) = g(t) \tag{27}$$

$$K'(t)\phi(t) = g(t) \quad \text{car } \phi \text{ est solution de (25)} \tag{28}$$

$$K(t) = \int \frac{g(t)}{\phi(t)} dt + C^{te} \tag{29}$$

14.4.3 Cas particuliers

Dans le cas particulier où le second membre est assez sympathique, on peut deviner quelle sera la solution particulière de (24) ce qui évite de recourir à la méthode de variation de la constante.

Exemple : Résoudre $y'(t) + ty(t) = t^4 + 4t^2 + 1$. On cherche une solution particulière sous forme d'un polynôme, évidemment de degré 3 :

$$\begin{aligned}P(t) &= at^3 + bt^2 + ct + d \\P'(t) &= 3at^2 + 2bt + c \\P'(t) + tP(t) &= 3at^2 + 2bt + c + at^4 + bt^3 + ct^2 + dt \\&= at^4 + bt^3 + (3a + c)t^2 + (2b + d)t + c\end{aligned}$$

L'identification avec $t^4 + 4t^2 + 1$ conduit à : $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 0$ et donne la solution particulière $P(t) = t^3 + t$.

Si on emploie la méthode de variation de la constante, on cherche d'abord la solution de l'équation homogène associée $y' + ty = 0$ qui est

$$\phi(t) = K e^{-t^2/2}$$

La variation de la constante conduit alors à

$$K'(t) e^{-t^2/2} + K(t)(-t) e^{-t^2/2} + t e^{-t^2/2} = t^4 + 4t^2 + 1$$

soit encore

$$K(t) = \int e^{t^2/2}(t^4 + 4t^2 + 1) dt$$

dont le calcul est pour le moins délicat !

15 Equations linéaires du deuxième ordre

15.1 Généralités

La forme la plus générale d'une équations différentielle linéaire du deuxième ordre est

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = g(t) \quad (30)$$

où a, b, c, g sont des fonctions continues (par exemple) définies sur un intervalle $[t_0, t_1]$.

Nous étudierons principalement les équations à coefficients constants, i.e. lorsque a et b et c sont des fonctions constantes, ou encore des équations qui s'y ramènent.

Comme dans le cas d'une variable, l'équation

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0 \quad (31)$$

est appelée équation homogène associée à (30). On démontre de la même façon

Proposition 15.1 *On connaît toute les solutions de (30) si on connaît une solution particulière de (30) et l'ensemble des solutions de (31).*

Corollaire 15.2 *Principe de superposition des solutions. On suppose que le second membre $g(t)$ de (30) s'écrit $g_1(t) + g_2(t)$; soient y_1 (resp. y_2) une solution de $a(t)y_1''(t) + b(t)y_1'(t) + c(t)y_1(t) = g_1(t)$ (resp. de $a(t)y_2''(t) + b(t)y_2'(t) + c(t)y_2(t) = g_2(t)$). La fonction $y_1 + y_2$ est une solution particulière de (30).*

15.2 Equations homogènes à coefficients constants

On étudie l'équation

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \quad \text{avec } a \neq 0. \quad (32)$$

Théorème 7 *L'ensemble des solutions de (32) est muni d'une structure d'espace vectoriel de dimension 2; il existe deux fonctions ϕ_1 et ϕ_2 telles que toute solution de (32) s'écrive sous la forme*

$$A\phi_1(t) + B\phi_2(t)$$

où A et B sont des constantes.

DÉMONSTRATION : Soit y une fonction deux fois différentiable ; on définit z par $y(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}z(t)$. On a

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\frac{b}{2a}t}z(t) \\ y'(t) &= e^{-\frac{b}{2a}t}z'(t) - \frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}t}z(t) \\ y''(t) &= e^{-\frac{b}{2a}t}z''(t) - 2\frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}t}z'(t) + \frac{b^2}{4a^2}e^{-\frac{b}{2a}t}z(t) \end{aligned}$$

Si y est solution de (32), on a

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}(az''(t) - bz'(t) + \frac{b^2}{4a}z(t) + bz'(t) - \frac{b^2}{2a}z(t) + cz(t))$$

Donc y est solution de (32) si et seulement si la fonction z est solution de

$$z''(t) - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}z(t) = 0 \quad (33)$$

Il y a trois cas à envisager

PREMIER CAS : $b^2 - 4ac = 0$. L'équation (33) devient $z''(t) = 0$, donc $z'(t)$ est constante, $z'(t) = A$ et il existe une constante B telle que $z(t) = At + B$. En revenant à la fonction y , on trouve comme ensemble des solutions

$$y(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}(At + B)$$

qui est le plan vectoriel engendré par les fonctions $\phi_1(t) = t e^{-\frac{b}{2a}t}$ et $\phi_2(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}$.

DEUXIÈME CAS : $b^2 - 4ac > 0$, posons $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \alpha^2$. Il est facile de constater que $\varphi_1(t) = e^{\alpha t}$ et $\varphi_2(t) = e^{-\alpha t}$ sont deux solutions linéairement indépendantes de (33). Il est un peu plus délicat de montrer que toute solution est combinaison linéaire de φ_1 et φ_2 ; on admettra la démonstration. On peut donc écrire $z(t)$ sous la forme $z(t) = Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}$ et

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\frac{b}{2a}t}(Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}) \\ &= Ae^{(-\frac{b}{2a} + \alpha)t} + Be^{(-\frac{b}{2a} - \alpha)t} \end{aligned}$$

La base de l'espace des solutions est donc $\phi_1(t) = e^{r_1 t}$ et $\phi_2(t) = e^{r_2 t}$ où

$$r_1 = -\frac{b}{2a} + \alpha \quad r_2 = -\frac{b}{2a} - \alpha$$

sont les racines de l'équation du second degré $ar^2 + br + c = 0$.

Réciproquement, si r est une racine de $ar^2 + br + c = 0$, il est immédiat de vérifier que $y(t) = e^{rt}$ est solution de (32).

TROISIÈME CAS : $b^2 - 4ac < 0$, posons $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = -\alpha^2$. Il est facile de constater que $\varphi_1(t) = \cos(\alpha t)$ et $\varphi_2(t) = \sin(\alpha t)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de (33). Il est un peu plus délicat de montrer que toute solution est combinaison linéaire de φ_1 et φ_2 ; on admettra la démonstration. On peut donc écrire $z(t)$ sous la forme $z(t) = A \cos(\alpha t) + B \sin(\alpha t)$ et

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\frac{b}{2a}t}(A \cos(\alpha t) + B \sin(\alpha t)) \\ &= Ae^{-\frac{b}{2a}t} \cos(\alpha t) + Be^{-\frac{b}{2a}t} \sin(\alpha t) \end{aligned}$$

La base de l'espace des solutions est donc $\phi_1(t) = e^{-\frac{b}{2a}t} \cos(\alpha t)$ et $\phi_2(t) = e^{-\frac{b}{2a}t} \sin(\alpha t)$. □

Définition 25 L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est appelée *équation caractéristique associée à (32)*.

Corollaire 15.3 Soit

$$ar^2 + br + c = 0$$

l'équation caractéristique de (32) et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

1. Si $\Delta = 0$, $r = \frac{-b}{2a}$ est racine double et l'ensemble des solutions de l'équation homogène est donné par

$$e^{rt}(At + B)$$

.

2. Si $\Delta > 0$, soient r_1 et r_2 les racines (réelles) de l'équation caractéristique; l'ensemble des solutions de l'équation homogène est donné par

$$Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

.

3. Si $\Delta < 0$ l'ensemble des solutions de (32) est donné par

$$e^{\frac{-b}{2a}t} \left\{ A \cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}t\right) \right\}$$

4. Si $\Delta < 0$, on peut aussi dire : il existe 2 nombres complexes conjugués β et $\bar{\beta}$ tels que toute solution de (32) s'écrive

$$\beta e^{rt} + \bar{\beta} e^{\bar{r}t}$$

avec r et $\bar{r}$ les solutions de l'équation caractéristique.

Remarque : Soit $r = \alpha + i\beta$, on va vérifier que

$$\frac{d}{dt} e^{rt} = r e^{rt}$$

est aussi vérifiée pour $r = \alpha + i\beta$ complexe.

On a :

$$\begin{aligned} e^{rt} &= e^{\alpha t + i\beta t} \\ &= e^{\alpha t} e^{i\beta t} \\ &= e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) \\ \frac{d}{dt} e^{rt} &= \alpha e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) + e^{\alpha t} (-\beta \sin(\beta t) + i\beta \cos(\beta t)) \\ &= e^{\alpha t} (\alpha \cos(\beta t) + i\beta \cos(\beta t) + i\alpha \sin(\beta t) - \beta \sin(\beta t)) \\ &= e^{\alpha t} (\alpha + i\beta) (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) \\ &= r e^{rt}. \end{aligned}$$

Ceci justifie donc, que si r est racine complexe de l'équation caractéristique, e^{rt} est solution de (32).

15.2.1 Lien avec les récurrences linéaires

15.3 Equations non homogènes

Dans le cas des équations non homogènes, il existe une méthode dite aussi de variation de la constante permettant de trouver une solution particulière de l'équation complète

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = g(t) \quad (34)$$

Si on connaît deux solutions *indépendantes*, φ_1 et φ_2 de l'équation homogène associée telles que $\varphi_2'(t_0)\varphi_1(t_0) - \varphi_1'(t_0)\varphi_2(t_0) = 1$, alors

$$y_p(t) = \varphi_2(t) \int_0^t \varphi_1(s)g(s)ds - \varphi_1(t) \int_0^t \varphi_2(s)g(s)ds.$$

est une solution particulière de l'équation complète.

Cette méthode est à déconseiller, en particulier si le second membre est assez simple. Le résultat suivant permet de traiter la plupart des exercices.

Proposition 15.4 *On suppose que le second membre de (34) est de la forme*

$$g(t) = e^{\alpha t} \{P(t) \cos(\beta t) + Q(t) \sin(\beta t)\}$$

où α et β sont des constantes, P et Q des polynômes de degrés p et q (éventuellement constants); on note n le plus grand des deux entiers p et q .

On cherche une solution particulière de (34) sous la forme

$$y_p(t) = t^k e^{\alpha t} \{P_1(t) \cos(\beta t) + Q_1(t) \sin(\beta t)\}$$

où P_1 et Q_1 sont les polynômes les plus généraux de degré n , et k l'ordre de multiplicité de $r = \alpha + i\beta$ dans l'équation caractéristique ($k = 0$ si $\alpha + i\beta$ n'est pas racine!).

DÉMONSTRATION : Admise. □

Exemple :

1. $z'' - 4z' + 3z = xe^{2x} \cos(x)$
2. $z'' - 4z' + 3z = x^2 e^x$
3. $z'' - 4z' + 4z = x^2 e^{2x}$
4. $z'' - z' + z = \cos^2(x)$

Exercice : Si le second membre est de la forme $g(t) = e^{\alpha t} g_1(t)$, montrer qu'avec le changement de fonction $y(t) = e^{\alpha t} z(t)$, la fonction $z(t)$ est solution d'une équation linéaire dont le second membre est $g_1(t)$.

Application : $y'' + 3y' + 2y = \frac{x}{1+x^2} - 1x^2 e^{-x}$.

16 Systèmes différentiels linéaires