

TD 9 Optimisation

EXERCICE I

Soit f la fonction définie par

$$f(x, y) = xye^{1-x^2-y^2}$$

- 1) Déterminer les points stationnaires de f .
- 2) Ecrire le développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de $(0, 0)$.
- 3) a) Déterminer la nature du point $(0, 0)$ à l'aide du développement précédent.
b) Etudier la nature des autres points stationnaires.
- 4) a) Chercher les extrema de f sous la contrainte $x^2 + y^2 = \ln 2$.
b) Déterminer le minimum de f sur le domaine $x^2 + y^2 \leq \ln 2$.

EXERCICE II

Soit $f(x, y) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 2y^2$.

- 1) a) Déterminer les points stationnaires de f .
b) Etudier leur nature.
c) La fonction f est elle convexe ?
- 2) Chercher les extrema de f sur le domaine défini par

$$\mathcal{D} = \{(x, y) | x \geq 0, \quad x^2 - 2x + y^2 \leq 3\}.$$

EXERCICE III

Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On pose $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer les extrema de $f : X \mapsto {}^tXAX$ sous la contrainte $\|X\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$.