

TD 8 Différentielles

I) 1) Soient u et v deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables et f une fonction différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Soit

$$h : x \mapsto f(u(x), v(x))$$

En considérant h comme le composé de $x \mapsto (u(x), v(x))$ et de f , calculer la dérivée de h .

2) Soit w une fonction différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et f une fonction différentiable de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer la différentielle de l'application

$$\Phi : (x, y) \mapsto f(x, y, w(x, y))$$

En déduire $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$.

II Soit la fonction f définie par

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$$

1) a) Calculer les dérivées partielles de f .

b) En utilisant la formule $f(X + h) = f(X) + Df_X(h) + \dots$ donner une valeur approchée de $z_1 = f(2, 1; 0, 95)$ et de $z_2 = f(1.95; 1.1)$; comparer avec les valeurs exactes.

2) a) Calculer la matrice hessienne de H .

b) En utilisant la formule de Taylor, trouver une meilleure approximation de z_1 et z_2 . Comparer avec la valeur exacte ; expliquez !

3) a) En remplaçant f par l'approximation du 1) b) déterminer une valeur approchée de chacun des réels y_1 et y_2 vérifiant respectivement $f(2, 1; y_1) = 8$ et $f(2, 05; y_2) = 8$.

b) On admet qu'il existe une fonction $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie au voisinage de $x_0 = 2$, dérivable, telle qu'on ait l'équivalence $f(x, y) = 8 \Leftrightarrow y = h(x)$.

En utilisant le résultat du I) 1) montrer qu'on peut calculer $h'(2)$ à l'aide des dérivées partielles de f .

c) Exprimer plus généralement $h'(x)$ en fonction des dérivées partielles de f .

4) En écrivant que $y = h(x)$ est solution de l'équation du second degré

$$2y^2 + xy + x^2 - 8 = 0$$

exprimer $h(x)$ en fonction de x , calculer $h'(x)$ puis $h'(2)$; comparer avec la valeur précédente.

5) Application : Déterminer les extrema de $x + y$ sous la contrainte $f(x, y) = 8$.