

TD 6 : Déterminants - Diagonalisation

EXERCICE 1

Calculer les déterminants suivants

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 10 & 10 \\ 1 & 6 & 15 & 20 \\ 1 & 7 & 21 & 35 \end{vmatrix}$$

EXERCICE 2

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 16 & -2 & -4 \\ 22 & 0 & -8 \\ a & -4 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4.5 & 8 & 5.5 \\ -10 & 9 & 10 \\ -8.5 & 8 & 9.5 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que la matrice A admette 2 pour valeur propre, et dans ce cas, la diagonaliser.

2) Diagonaliser la matrice B ; en déduire qu'il existe au moins une matrice X telle que $X.X = B$.

EXERCICE 3 *février 95*

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ est rapporté à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même de matrice A dans $\mathcal{B}$ avec

$$\begin{pmatrix} 9 & -1 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & -5 \\ -12 & -4 & 0 & 4 \\ -6 & -10 & -6 & 10 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer le noyau de f , préciser sa dimension et en donner une base (u_1, u_2) .

2) a) Déterminer $\text{Im}(f)$.

b) Justifier que $u_3 = (3, 1, -4, -2)$ appartient à $\text{Im}(f)$.

c) Déterminer un vecteur u_4 tel que (u_3, u_4) soit une base de $\text{Im}(f)$.

3) a) Justifier que u_1, u_2, u_3, u_4 forment une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^4$.

b) Quelle est la matrice de f relativement à $\mathcal{B}'$?

c) Comparer les applications linéaires f et $f \circ f$.