

TD6 : ALGÈBRE LINÉAIRE

EXERCICE 1

Pour chacun des systèmes homogènes suivants, indiquer la dimension du sous-espace vectoriel des solutions et en donner une base éventuellement.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 0 \\ x + 3y + z &= 0 \\ 2x + 6y + 2z &= 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y - 2z + 3u &= 0 \\ 2x + 4y - 3z + 4u &= 0 \\ 5x + 10y - 8z + 11u &= 0 \end{cases}$$

EXERCICE 2

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les triplets suivants $u = (1, 2, 0)$, $v = (1, 0, 2)$ et $w = (1, 1, 1)$. Montrer que (u, v, w) est une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

Quelles sont les coordonnées des triplets $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ dans $\mathcal{B}$? Soit $X = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, exprimer les coordonnées x, y, z de X dans $\mathcal{B}$ en fonction de a, b, c .

Soit f l'application qui à (a, b, c) associe (x, y, z) , montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE 3

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les triplets suivants $u = (1, 2, 3)$, $v = (2, 3, 4)$ et $w = (3, 4, 5)$. Soit E le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par u, v et w . Quelle est la dimension de E ? En donner une base.

Soit F la droite engendrée par $n = (1, -2, 1)$.

Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire : pour $X = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, montrer qu'il existe un unique couple (Y, Z) (que l'on déterminera explicitement en fonction de a, b et c) tel que

$$X = Y + Z \quad \text{avec } Y \in E \text{ et } Z \in F$$

EXERCICE 4

On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $a = (1, 0, 1, 0)$, $b = (0, 1, 0, 1)$, $c = (0, 1, 2, 3)$ et $d = (1, 2, 3, 4)$. Soit E le sous-espace engendré par a et b et F le sous-espace engendré par c et d .

- Montrer que $E = \{(x, y, z, t) | x = z, y = t\}$. Caractériser de même F .
- Préciser les dimensions de E et F .
- Déterminer $E \cap F$: on en précisera la dimension et une base.
- $E \cup F$ est-il un sous-espace vectoriel? Quel est le plus petit sous-espace vectoriel contenant à la fois E et F ?