

TD 3 : Espaces vectoriels
Bouhar-Hamza-Licois-Ungemach

EXERCICE 1

A partir de 4 ingrédients, I_1, I_2, I_3 et I_4 on fabrique 4 denrées D_1, D_2, D_3 et D_4 ; soit c_i la quantité de l'ingrédient I_i utilisée et y_i la quantité de la denrée D_i fabriquée. On suppose que ces quantités sont liées par la relation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 20 \\ 2 & 5 & 12 & 50 \\ 1 & 3 & 8 & 39 \\ 1 & 3 & 11 & 66 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

Interpréter les coefficients t_{ij} de la matrice ci-dessus. La quantité disponible de chacun des ingrédients est respectivement de 60, 67, 37, 100. Est-il possible de trouver un programme de fabrication utilisant complètement le stock d'ingrédients? Quelle quantité supplémentaire de I_4 doit-on alors se procurer? Ceci étant réalisé, on décide de ne plus fabriquer D_4 : quel programme de fabrication doit-on établir?

EXERCICE 2

Pour chacun des systèmes homogènes suivants, indiquer la dimension du sous-espace vectoriel des solutions et en donner une base.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z + 3u & = 0 \\ 2x + 4y - 3z + 4u & = 0 \\ 5x + 10y - 8z + 11u & = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y - 2z + 3u & = 0 \\ 3x + 2y - z + 2u & = 0 \\ 3x + 3y + 3z - 3u & = 0 \end{cases}$$

EXERCICE 3

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les triplets suivants $u = (1,0,0)$, $v = (1,1,0)$ et $w = (1,1,1)$. Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Quelles sont les coordonnées des triplets suivants dans cette base

$$(1, 2, 3) \quad (0, 0, 1) \quad (19, 9, 2)$$

EXERCICE 4

On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $a = (1, 0, 1, 0)$, $b = (0, 1, 0, 1)$, $c = (1, 1, 1, 1)$ et $d = (1, 2, 3, 4)$. Soit E le sous-espace engendré par a et b et F le sous-espace engendré par c et d .

Montrer que $E = \{(x, y, z, t) | x = z, y = t\}$. Caractériser de même F . Justifier que (a, b, c, d) est une base de $\mathbb{R}^4$. En déduire que tout vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de E et d'un vecteur de F : application donner la décomposition de $e_4 = (0, 0, 0, 1)$.