

TD7 : MATRICES

EXERCICE 1

On considère les deux applications linéaires f et g définies par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & g : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y\right) & (x, y, z) &\mapsto (x + 2y, y + 2z, 2x + z) \end{aligned}$$

Déterminer les matrices de f et g relativement à la base canonique. Montrer que f et g sont bijectives, préciser les bijections réciproques. Déterminer $f \circ f$; pouvait-on prévoir le résultat ?

EXERCICE 2

On donne les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer AB , BA , A^2 et B^2 .

EXERCICE 3

Soit la matrice A définie par

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2 , A^3 et A^4 ; déterminer A^n et justifier la formule par récurrence.

EXERCICE 4

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même ayant pour matrice relativement à la base canonique

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) a) Calculer M^2 et M^3 et vérifier la relation

$$M^3 - 3M^2 + 3M = 2I_3$$

où I_3 désigne la matrice unité de $\mathbb{R}^3$.

b) En déduire M^{-1} .

2) On pose $g = f - Id$; déterminer $g \circ g$ et $g \circ g \circ g$ et retrouver ainsi les résultats de la question précédente.