

TD 7 : Formule de Taylor, Elasticité

Bouhar-Hamza-Licois-Ungemach

EXERCICE 1

Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x + 2$ et (C) sa représentation graphique.

1) Tacer (C).

2) a) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) en $x_0 = \frac{1}{2}$, sous la forme $y = t(x)$.

b) Etudier le signe de $f(x) - t(x)$. En déduire que (T) recoupe (C) en un point dont on précisera les coordonnées. Etudier la position de (C) par rapport à sa tangente.

3) En utilisant la formule de Taylor, étudier la position de (C) par rapport à la tangente au point d'abscisse x_0 ; retrouver les résultats précédents.

EXERCICE 2

Si une certaine quantité passe de la valeur y_0 à la valeur y_1 , l'accroissement (absolu) correspondant est $y_1 - y_0$; on appelle accroissement relatif de y le quotient de l'accroissement $y_1 - y_0$ par la valeur y_0 . C'est une quantité sans dimension. En Physique on retrouve la même notion sous le nom d'incertitude (ou erreur) relative.

On considère une fonction $f : x \mapsto f(x)$ dérivable. On appelle élasticité de f en x_0 , notée $e(f, x_0)$, la limite (si elle existe) lorsque x tend vers x_0 de l'accroissement relatif de $f(x)$ divisé par l'accroissement relatif de x .

1) Montrer que :

$$e(f, x_0) = x_0 \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$$

2) a) Montrer que l'élasticité correspond à la dérivée de la fonction qui à $\ln(x)$ associe $\ln(f(x))$.

b) Quelles sont les fonctions à élasticité constante ?

3) Si (C) désigne la représentation graphique de f , T la tangente à (C) au point M d'abscisse x_0 , A et B les points d'intersection de (T) respectivement avec Ox et Oy , interpréter l'élasticité.

EXERCICE 3

1) a) Appliquer la formule de Taylor à la fonction exponentielle.

b) Combien de termes faut-il calculer pour obtenir une valeur approchée de e avec une précision de 10^{-6} ? Donner cette valeur approchée.

2) a) Appliquer la formule de Taylor à la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$. Déterminer explicitement la valeur du reste (terme complémentaire).

b) Faire de même pour la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

3) a) Appliquer la formule de Taylor à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.

b) Peut-on retrouver ce résultat à partir des résultats du 2) ?

c) En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.