

Travaux Dirigés n° 4

Exercice 1

Soit x, y, z trois variables strictement positives liées par la relation $z = f(x, y)$ où f est différentiable. Soit (a, b) avec $a > 0$ et $b > 0$, on définira l'élasticité (partielle) de f par rapport à x au point (a, b) comme l'élasticité de la fonction $f_1 : x \mapsto f(x, b)$ évaluée en a . Définition similaire pour l'élasticité par rapport à y .

1) Exprimer l'élasticité de f par rapport à x à l'aide des dérivées partielles de f .

On se place sur la courbe de niveau k de f , $C_k = \{(x, y) \mid f(x, y) = k\}$.

2) On suppose qu'il existe une fonction φ telle que

$$(x, y) \in C_k \iff y = \varphi(x)$$

a) Exprimer la dérivée φ' de φ en fonction des dérivées partielles de f .

b) En déduire l'élasticité de la fonction φ en x_0 en fonction des dérivées partielles de f .

c) Application : $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$.

3) Un consommateur soumis à la contrainte budgétaire $px + qy = R$ cherche à maximiser son utilité $U = f(x, y)$.

a) Si la fonction f admet un maximum sur la droite budget au point (x^*, y^*) , montrer que la droite budget est tangente à la courbe de niveau de U passant par (x^*, y^*) .

b) En déduire qu'à l'optimum

$$\frac{e(U, x)}{e(U, y)} = \frac{\text{dépense en X}}{\text{dépense en Y}}$$

c) Application : $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$. Déterminer graphiquement l'optimum.

Exercice 2

Soit la fonction f définie par

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$$

1) a) Calculer les dérivées partielles de f .

b) En utilisant la formule $f(X + h) = f(X) + Df_X(h) + \dots$ donner une valeur approchée de $z_1 = f(2, 1; 0, 95)$ et de $z_2 = f(1.95; 1.1)$; comparer avec les valeurs exactes.

2) a) Calculer la matrice hessienne de H .

b) En utilisant la formule de Taylor, trouver une meilleure approximation de z_1 et z_2 . Comparer avec la valeur exacte ; expliquez !

3) a) En remplaçant f par l'approximation du 1) b) déterminer une valeur approchée de chacun des réels y_1 et y_2 vérifiant respectivement $f(2, 1; y_1) = 8$ et $f(2, 05; y_2) = 8$.

b) On admet qu'il existe une fonction $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie au voisinage de $x_0 = 2$, dérivable, telle qu'on ait l'équivalence $f(x, y) = 8 \Leftrightarrow y = h(x)$.

En utilisant le résultat du I) 1) montrer qu'on peut calculer $h'(2)$ à l'aide des dérivées partielles de f .

c) Exprimer plus généralement $h'(x)$ en fonction des dérivées partielles de f .

4) En écrivant que $y = h(x)$ est solution de l'équation du second degré

$$2y^2 + xy + x^2 - 8 = 0$$

exprimer $h(x)$ en fonction de x , calculer $h'(x)$ puis $h'(2)$; comparer avec la valeur précédente.

5) Application : Déterminer les extrema de $x + y$ sous la contrainte $f(x, y) = 8$.