

Exercice 1

Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 2

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer A^2 , A^3 et A^4 ; en déduire A^{2000} .
- 2) Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1} ; en déduire A^{1999} .

Problème

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même ayant pour matrice relativement à la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -12 & -15 \\ 1 & 1 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer le noyau de f , préciser la dimension et donner une base.
- 2) Déterminer l'image de f .
- 3) Déterminer $\text{Im } f \cap \text{Ker } f$. 4) On considère les quatre vecteurs x_1, x_2, x_3 et x_4

$$x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad x_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- a) Montrer que $\mathcal{B} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ constitue une base de $\mathbb{R}^4$.
- b) Déterminer la matrice de f relativement à $\mathcal{B}$.