

UNIVERSITE FRANCOIS RABELAIS
FACULTE DE DROIT, D'ECONOMIE ET DES SCIENCES SOCIALES

Nom :
Prénom :
Date de naissance :
Groupe de TD :

Sciences Economiques
DEUG 1ère année
Année 1995-1996

Epreuve : Session de juin 1996
Durée : 3 heures.

Calculatrice autorisée : Casio 180P

Mathématiques

Exercice I)

1) On dit qu'une matrice M possède la propriété $\mathcal{P}$ si et seulement si elle vérifie : $M.M = M$. Montrer que si M est diagonale et possède la propriété $\mathcal{P}$, les coefficients situés sur la diagonale de M valent 0 ou 1.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

2) a) Déterminer les valeurs propres de A .

b) Déterminer les sous-espaces propres associés.

3) a) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $D = P^{-1}AP$

b) Montrer qu'il existe deux matrices M_1 et N_1 , diagonales et possédant la propriété $\mathcal{P}$ telles que : $D = 2M_1 + 4N_1$. A quoi est égal le produit M_1N_1 ?

4) a) En déduire qu'il existe deux matrices M et N , possédant la propriété $\mathcal{P}$, telles que $A = 2M + 4N$. On ne demande pas, dans cette question, de calculer M et N .

c) En déduire qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) que l'on précisera telles que $A^n = a_n M + b_n N$ pour $n \in \mathbb{N}$.

5) Calculer M et N , à partir des résultats du 4)c) ; en déduire A^8 .

Exercice 2

Soit la fonction $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

1) Montrer que $(0, 0)$ est un point stationnaire de f .

2) Déterminer les autres points stationnaires de f et étudier leur nature.

3) a) Déterminer la matrice hessienne de f en $(0, 0)$, notée H . Vérifier que les conditions du second ordre ne permettent pas de conclure quant à la nature du point $(0, 0)$.

b) Déterminer l'ensemble

$$E = \left\{ u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid Hu = 0 \right\}$$

Calculer $f(x, y)$ pour $(x, y) \in E$.

c) Calculer $f(x, -x)$. En déduire la nature du point $(0, 0)$.

Exercice 3

Soit $f(x, y) = 4(x^2y + xy^2) + 2(x^2 + y^2) - (x + y + 1)$.

1) Déterminer les points stationnaires de f .

2) Déterminer les extrema de f sur le domaine D défini par

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 4xy + 2(x + y) \leq 3 \end{cases}$$

