

Nom :

Prénom :

Date de naissance :

Groupe de TD :

Sciences Economiques

DEUG 1ère année

Année 1994-1995

Epreuve : Session de juin 1995

Durée : 3 heures.

Calculatrice autorisée : FX180 P

Mathématiques

Les réponses seront écrites directement sur ce document dans les zones encadrées.

Exercice I On notera tM la matrice transposée de la matrice M.

1) Soit H la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Diagonaliser la matrice H et déterminer une matrice P telle que $\Delta = P^{-1}HP$ soit diagonale.

b) Calculer P^{-1} . En déduire qu'il existe une matrice Q telle que $H = Q\Delta({}^tQ)$.

2) a) Soit $X \in \mathbb{R}^3$. Comparer ${}^t(QX)$ et $({}^tX)({}^tQ)$.

b) En déduire que, pour tout $X \in \mathbb{R}^3$ différent de 0, $({}^tX)HX \neq 0$.

c) Existe-t-il des vecteurs X tels que $({}^tX)HX < 0$? On justifiera soigneusement la réponse.

3) Soit f définie par $f(x, y, z) = z^4 + (y - z)^2 + x^2 - 2xy + 2z$.

a) Déterminer le point stationnaire de f .

b) Déterminer la matrice hessienne correspondante. Peut-on déterminer la nature de ce point à l'aide des conditions du second ordre ? Justifier votre réponse.

c) Déterminer la nature de ce point en utilisant les résultats précédents.

Exercice II Déterminer le minimum et le maximum de $f(x, y) = x^2(y^2 + 1) + y(y + \frac{5}{2}x)$ sur le domaine $\mathcal{D}$ correspondant au demi-cercle de centre O et de rayon 1 défini par

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \mid x \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}$$



III Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$ et H la matrice définie par

$$\begin{pmatrix} -e^y & e^y & e^x \\ e^y & -e^z & e^z \\ e^x & e^z & -e^x \end{pmatrix}$$

1) Calculer $\det(H)$. En déduire le signe de $\det(H)$.

2) a) Calculer les dérivées partielles de f .

b) Soit (x_0, y_0, z_0) un point stationnaire pour f . qu'on ne cherchera pas à déterminer explicitement. Montrer que nécessairement : $x_0 < 0$, $y_0 < 0$ et $z_0 < 0$.

c) Déterminer la nature de ce point. On justifiera soigneusement la réponse.

