

UNIVERSITE FRANCOIS RABELAIS
FACULTE DE DROIT, D'ECONOMIE ET DES SCIENCES SOCIALES

Nom :

Prénom :

Date de naissance :

Groupe de TD :

Sciences Economiques

DEUG 1ère année

Année 1996-1997

Epreuve : Session de septembre 1997

Durée : 3heures.

Mathématiques

Algèbre

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même dont la matrice relativement à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer le noyau de f noté $\text{Ker}(f)$ et en donner une base. Quel est le rang de f ?

2) Calculer A^2 , A^3 et $A^2 + 2A$. Que constate-t-on ?

3) a) Diagonaliser A , c'est-à-dire déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = P.D.P^{-1}$.

b) Calculer P^{-1} .

c) Calculer D^2 , D^3 et $D^3 + 2D^2$.

4) On suppose qu'il existe des réels a_n et b_n tels que, pour tout entier $n \geq 3$, on ait $A^n = a_n A^2 + b_n A$.
a) Justifier les relations

$$\begin{cases} a_n - b_n &= (-1)^n \\ 4a_n + 2b_n &= 2^n \end{cases}$$

b) En déduire A^{11} .

5) A partir des résultats du 3) déterminer explicitement la matrice A^n . Pour $n = 11$, comparer avec le 4)c).

Analyse

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z, t) = \frac{x^2}{2} - 2y^2 + \frac{y^3}{3} + \frac{z^2}{2} + (y - 3)t^2$$

1) a) Déterminer les points stationnaires de f .

b) Etudier la nature de ces points.

2) On définit une fonction φ par $\varphi(x, y, t) = f(x, y, 0, t)$.

a) On cherche les extrema de φ sous la contrainte $x^2 + y^2 + t^2 = 20$. Déterminer les points stationnaires du Lagrangien ; on ne demande pas d'étudier leur nature.

b) Déterminer le minimum absolu de φ sur le domaine $\mathcal{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 + t^2 \leq 20\}$. (On admettra que $\mathcal{D}$ est fermé borné dans $\mathbb{R}^3$).