

UNIVERSITE FRANCOIS RABELAIS
FACULTE DE DROIT, D'ECONOMIE ET DES SCIENCES SOCIALES

Nom :
Prénom :
Date de naissance :
Groupe de TD :

Sciences Economiques
DEUG 1ère année
Année 1994-1995

Epreuve : Session de septembre 1995
Durée : 3 heures.

Calculatrice autorisée : FX180 P

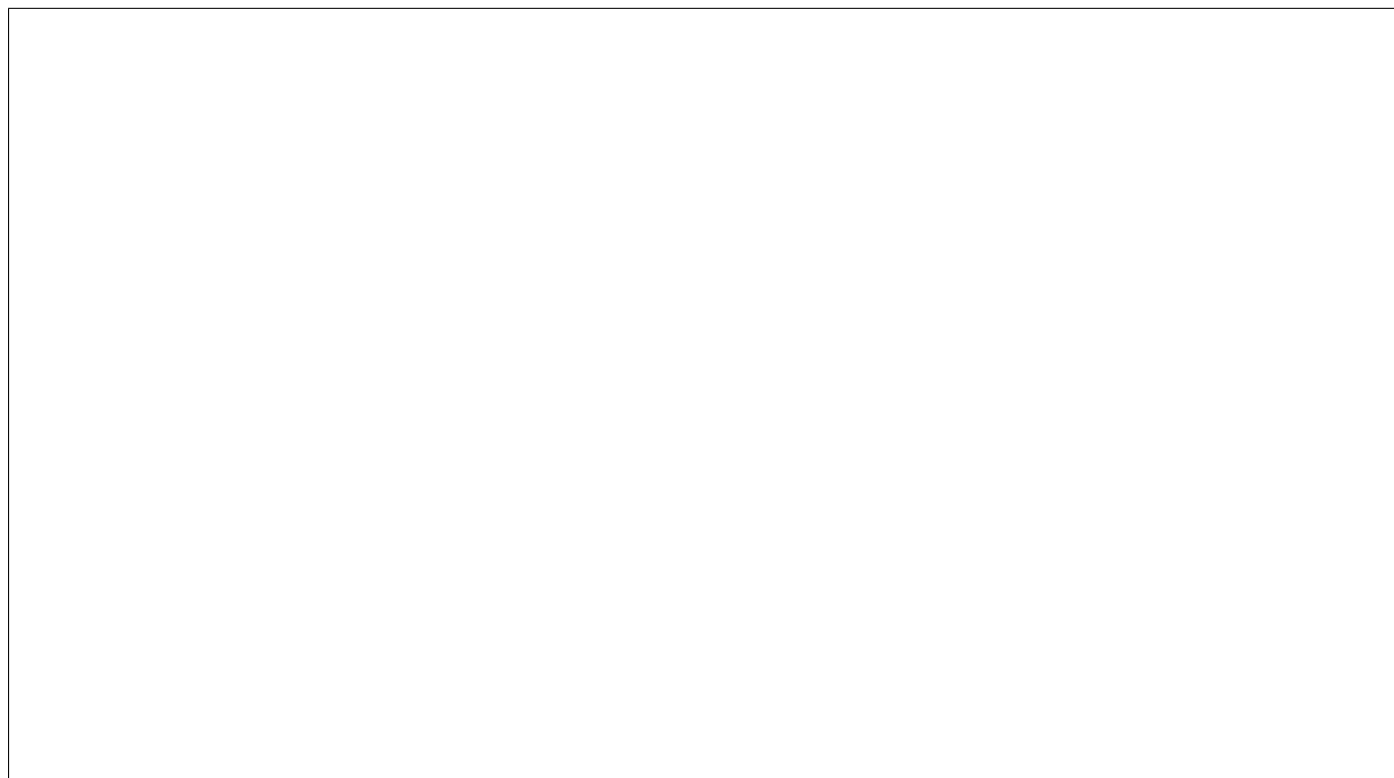
Mathématiques

Les réponses seront écrites directement sur ce document dans les zones encadrées.

ANALYSE

- 1) Soit $f(x, y) = 2 - 3xy + 2x^2y^2$. On étudie les extrema de f avec la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.
a) Déterminer les points stationnaires du Lagrangien correspondant.

b) Etudier la nature des points stationnaires dont l'ordonnée est positive ou nulle.



2) Soit $h(x, y) = f(x, y) - (x^2 + y^2 - 1)^2$.

a) Déterminer les points stationnaires de h . (sans contrainte)



b) Etudier la nature de ces points. (toujours sans contrainte)

c) Déterminer le minimum et la maximum de h sur le domaine $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid y \geq -0.25 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Il est conseillé d'éviter de nouveaux calculs.

ALGEBRE

I) Soient les matrices A et B définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculer les matrices produits $P_1 = AB$ et $P_2 = BA$.

b) Déterminer le polynôme caractéristique de P_1 , puis celui de P_2 . Que constate-t-on ?

II) Soient les matrices M, N et Q définies par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique dans lui-même ayant pour matrice M.

1) a) Déterminer le noyau de f , en donner une base et préciser sa dimension.

b) Déterminer l'image de f , en donner une base et préciser sa dimension.

2) Calculer le polynôme caractéristique de M . Déterminer une matrice P telle que $P^{-1}MP = \Delta$ soit une matrice (d_{ij}) diagonale vérifiant $d_{11} \leq d_{22} \leq d_{33} \leq d_{44}$. On ne demande pas le calcul de P^{-1} .

zone de rédaction complémentaire page suivante

3) a) Déterminer le polynôme caractéristique de N , le comparer à celui de M .

b) Déterminer la matrice Q^{-1} , matrice inverse de Q .

zone de rédaction complémentaire page suivante

c) Par la méthode de votre choix montrer que $N = Q\Delta Q^{-1}$, où Δ est définie au 2).

4) En déduire qu'il existe au moins un couple de matrices U et V telles que $M = UV$ et $N = VU$. On indiquera comment les calculer à partir des résultats précédents, mais on ne demande pas le calcul explicite de ces matrices.