

Nom :

Prénom :

Date de naissance :

Groupe de TD :

Sciences Economiques

DEUG 1ère année

Année 1996-1997

Epreuve : Session de juin 1997

Durée : 3heures.

Mathématiques

I) Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ telle que $f \circ f = 81Id$ où $\circ$ désigne la composition des applications et Id l'application identique.

1) a) Justifier que f est bijective et préciser f^{-1} .

b) Que peut-on dire des valeurs propres de f (si elles existent) ?

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même ayant pour matrice, relativement à la base canonique,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & -6 & -2 \\ 6 & -6 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

2) Montrer que f vérifie $f \circ f = 81Id$.

3) a) Calculer le polynôme caractéristique de f .

b) Déterminer les sous-espaces propres de f .

4) a) Vérifier que les vecteurs

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de f .

b) Montrer qu'on peut trouver des vecteurs X_2 et X_4 satisfaisant les conditions

(i) X_2 et X_4 sont des vecteurs propres de f

(ii) ${}^tX_1.X_2 = 0$ et ${}^tX_3.X_4 = 0$

(iii) ${}^tX_2.X_2 = {}^tX_4.X_4 = 18$.

où tX désigne le transposé du vecteur X .

c) Soit P la matrice à 4 lignes et 4 colonnes dont les colonnes sont X_1, X_2, X_3 et X_4 . Calculer ${}^tP.P$.

d) En déduire que X_1, X_2, X_3 et X_4 est une base de $\mathbb{R}^4$.

5) En déduire qu'il existe une matrice inversible Q et une matrice diagonale D , que l'on précisera, telles que $D = {}^tQ.A.Q$.

II Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = \frac{y^3}{3} + x^2y + x^2z - 3z^2 - 16y$$

- 1) a) Déterminer les points stationnaires de f .
- b) Etudier la nature de ces points pour $x=0$.
- 2) Soit C le point stationnaire de f dont l'abscisse x est strictement positive.
- a) Vérifier que la matrice hessienne au point C est égale à

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 4\sqrt{3} & 4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & -4 & 0 \\ 4\sqrt{3} & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

- b) Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 2 au point C .
 - c) En déduire la nature du point C .
 - 3) On pose $\varphi(x, y) = f(x, y, 0)$.
- Déterminer les extrema de φ sur le domaine $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 32\}$.