

UNIVERSITE FRANCOIS RABELAIS
FACULTE DE DROIT, D'ECONOMIE ET DES SCIENCES SOCIALES

Année 1998-1999

Remplacement C.C. - du 1^{er} semestre - juin 1999 - **U.E.**

DEUG Économie-Gestion 1^{ère} année

Durée : 1 heure

CALCULATRICE AUTORISÉE : Casio FX 180P(+)

Mathématiques

Exercice I) Soit f une fonction telle que $f(1) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 1/(1+x^2)$.

1) Calculer $f'(1)$, $f''(1)$ et $f'''(1)$.

2) Ecrire les premiers termes du développement de Taylor de f au voisinage de $x = 1$.

3) Utiliser ce développement pour donner une valeur approchée de $f(1.2)$.

Exercice II) Soit la fonction $f(x, y, z) = x^4 - (2y + z + 1)x^2 + 8y^2 + 3z^2 + 10yz + 2y$.

1) Calculez les dérivées partielles premières de f .

2) Déterminer la matrice hessienne de f .

3) Montrer que le point $(1, \frac{5}{2}, -4)$ est stationnaire pour f et étudier la nature de ce point.

Exercice III) On rappelle que deux droites (Δ) et (Δ') d'équations respectives $y = ax+b$ et $y = a'x+b'$ sont orthogonales si et seulement si $aa' = -1$.

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$ et (C) sa représentation dans un repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer une équation de la tangente (T_0) à (C) au point d'abscisse x_0 .

2) a) Déterminer x_0 de façon que T_0 soit parallèle à $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$.

b) Déterminer x_1 tel que la tangente T_1 à (C) au point d'abscisse x_1 de (C) soit orthogonale à T_0 .

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de T_0 et de T_1 .

UNIVERSITE FRANCOIS RABELAIS
FACULTE DE DROIT, D'ECONOMIE ET DES SCIENCES SOCIALES

Année 1998-1999

Remplacement Examen - du 1^{er} semestre - juin 1999 - U.E.

DEUG Économie-Gestion 1^{ère} année

Durée : 1 heure 30

CALCULATRICE AUTORISÉE : Casio FX 180P(+)

Mathématiques

Exercice I Soit f une fonction définie sur $I =]0, +\infty[$ à valeurs réelles, deux fois dérivable. On pose $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ et $h(x) = x f(x)$. 1) Montrer que g est deux fois dérivable sur I et exprimer $g''(x)$ en fonction de x , $f'(x)$ et $f''(x)$.

2) Montrer que g est convexe sur I si et seulement si h est convexe sur I .

Exercice II Soit f définie par $f(x, y, z) = z^4 + (y - z)^2 + x^2 - 2xy + 2z$.

1) Déterminer le point stationnaire de f .

2) Déterminer la matrice hessienne correspondante. Peut-on déterminer la nature de ce point à l'aide des conditions du second ordre ? Justifier votre réponse.

3) a) On pose $g(h) = f(1 + 2h, 1 + 3h, 2h)$; étudier le signe de $g(h)$.

b) En déduire la nature du point stationnaire de f .

Exercice III Soit la fonction f définie par $(x, y) \mapsto f(x, y) = (x^2 + 4y)e^{x+2y}$.

1) Calculer les dérivées partielles premières de f et montrer que le point A de coordonnées $(1, -\frac{3}{4})$ est un point stationnaire pour f .

2) a) Calculer la matrice hessienne de f .

b) En déduire la nature du point A .

3) Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ la partie fermée bornée définie par

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \mid x \geq 0, \quad y \geq -1, \quad x + 2y \leq 6\}$$

Déterminer le minimum et le maximum de f sur $\mathcal{D}$.