Université F. Rabelais
Département de Mathématiques

Unité O4
2004-2005

Mini-Projets MAPLE

Sujet 1. *Analyse Matricielle.*
Résoudre à l'aide de Maple l'exercice ci-dessous. En particulier,

- On écrira une procédure Maple qui, pour une matrice M dont le rayon spectral est strictement inférieur à 1, vérifie que la suite des matrices M^k tend vers 0.
- Construire une procédure Maple qui met en oeuvre l'algorithme ci-dessous et la tester sur des exemples pertinents de matrices. On comparera cette méthode (temps machine) avec une procédure classique d'inversion (par exemple Cholesky pour une matrice définie positive).

Exercice On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices complexes d'ordre $n \geq 1$. Il est muni d'une norme assujettie à une norme vectorielle. On désigne comme usuellement par $\rho(M)$ le rayon spectral d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour toute matrice inversible A, on désigne par (A_k) la suite de matrice définie par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A_0 & \in & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ A_{j+1} & = & A_j(I_d + E_j) \quad (j \geq 0) \end{array} \right. \tag{1}$$

où I_d désigne la matrice identité et $E_j = I_d - AA_j$.

- Démontrer que $\forall j \geq 0, E_j = E_0^{2^j}$
- En déduire que la suite (A_k) converge vers l'inverse de A si et seulement si $\rho(E_0) < 1$
- Donner une majoration de l'erreur $\|A_j - A^{-1}\|$
- Vérifier que le choix $A_0 = \frac{1}{\|A\| \ \|^t\bar{A}\|}{}^t\bar{A}$ assure la convergence de la suite (A_k) ainsi construite.

Sujet 2. *Point de Toricelli.*
On songera à utiliser le package "geometry". La découverte de celui-ci fait partie du sujet. Soit M un point du plan . On note $M_1 = r_A(M), M_2 = r_B(M), M_3 = r_C(M)$.

1. Faire une figure avec Maple qui montre le triangle A, B, C ainsi que les points M, M_1, M_2, M_3 lorsque les angles $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ sont inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$.
2. Construire le point de Torricelli T comme intersection des droites (AA') et (BB') puis T_3.
3. Montrer mathématiquement (avec la rotation r_C) ou avec Maple que $TA + TB + TC = AT + TT_3 + T_3A' = AA'$. Conclure.

Sujet 3. *Loxodromie de la sphère.*
Soit S^2 la shère unité de $\mathbb{R}^3$ définie par $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
1) À l'aide du document ci-joint, justifier le calcul puis définir l'équation différentielle considérée.
2) Résoudre cette équation à l'aide de Maple.
3) Tracer sur un même graphique la sphère et une ou deux loxodromies.

Sujet 4. *Equation de la chaleur.*
Voir document joint.

Sujet 5. *Pendule double.*
On considère le modèle suivant représentant, après renormalisation de la masse et de la longueur de chaque tige des pendules supposée être égale à 1, le mouvement de deux pendules couplés :

$$\begin{cases} x'' + 2\sin(x) & = \sin(y) \\ y'' + 2\sin(y) & = 2\sin(x) \end{cases}$$

où x est l'angle entre la verticale et la tige numéro 1 et y l'angle entre la verticale et la tige numéro 2.

1. Représenter le double pendule lorsque $x = \frac{\pi}{3}$ et $y = \frac{-\pi}{2}$.
2. Résoudre numériquement à l'aide des procédures Maple (Par exemple RungeKutta) avec la condition initiale : $x(0) = \frac{\pi}{2}, x'(0) = y(0) = 0, y'(0) = 0$.
3. Proposer une séquence permettant de visualiser le mouvement.
4. Etudier les propriétés du système linéarisé

$$\begin{cases} x'' + 2x & = y \\ y'' + 2y & = 2x \end{cases}$$

et comparer avec les résultats obtenus ci-dessus.

Sujet 6. *Approximation d'un cercle.*
Déterminer, en utilisant une méthode de moindre carrés, linalg[leastsqrs], une équation du cercle qui est le plus *près* d'une liste de points donnés.
Essayer d'être le plus général possible, on doit pouvoir l'appliquer à une conique au lieu d'un cercle.
Prévoir une sortie graphique.
Si les points sont déjà sur un cercle mais connus avec une certaine erreur d'arrondi, augmenter le nombre de points de la liste améliore-t-il la précision ? Par définition le cercle de courbure en un point M d'une courbe (C) est la « limite » du cercle circonscrit au triangle MM_1MM_2 lorsque M_1 et M_2 tendent vers M le long de (C) : le rayon de courbure en M est le rayon du cercle et le centre de courbure est le centre du cercle ; on montre facilement que ce dernier appartient à la normale à (C) issue de M.
Essayer, avec votre routine, de déterminer le centre et/ou le rayon de courbure d'une courbe connue : par exemple cardioïde, limaçon de Pascal, etc...

Sujet 7. *Evolution d'une population.*
On modélise l'évolution, en fonction du temps t, d'une population par l'équation différentielle $P'(t) = P(t)(a - bP(t)) - h$ où P représente la densité de population (supposée toujours positive ou nulle), a et b sont des paramètres positifs, a représente le taux de natalité, $-bP(t)$ le taux de mortalité et h sert à introduire d'éventuelles variations saisonnières.
1) On suppose h constante. Discuter, à l'aide de Maple, suivant les valeurs des paramètres la possibilité d'un équilibre et étudier la stabilité. Faire queques illustrations, par exemple $a = 5, b = 1, h = 4, 25/4, 7$.
2) Dans quels cas y a-t-il extinction de la population en un temps fini ?
3) Pour tenir compte de pics saisonniers on considère $h(t) = 4 + 2\sin^{10}(\pi t)$. Que prédit le modèle ?

Sujet 8. *Parabole tangente à quatre droites.*
Etant donné quatre droites d_1, d_2, d_3 et d_4 sécantes 2 à 2, on sait qu'il existe une seule parabole P tangente à ces quatre droites, cf. document joint. En utilisant le package geometry placer les cercles circonscrits, les orthocentres, le foyer, la directrice de la parabole. Trouver une équation cartésienne de P et vérifier par le calcul la tangence. Figures et procédures !

Sujet 9. *Extrema sous contrainte.*
On cherche le minimum d'une fonction $f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$: parmi les (x, y) satisfaisant $g(x, y) = 0$ quels sont ceux qui réalisent le minimum ou le maximum de f. Attention, il ne s'agit pas de chercher si les extrema de f satisfont la contrainte !
1) Par exemple, soit $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3$ et $f(x, y) = x^3 + y^3$. On cherche donc le point situé sur l'ellipse $\mathrm{E} = \{g(x, y) = 0\}$ qui réalise le minimum de f).

a) Représenter (E) et plusieurs lignes de niveaux de f. En un point de minimum sous contrainte quelles sont les positions relatives de (E) et de la ligne de niveau ? Eventuellement faire une animation.

b) En déduire que ∇f et ∇g sont proportionnels au(x) point(s) cherché(s) et déterminer les solutions.

2) Dans le cas général, on appelle Lagrangien du problème la fonction $L : (x, y, \lambda) \mapsto f(x, y) - \lambda g(x, y)$. Ecrire une procédure déterminant les points stationnaires du Lagrangien. Faire le rapport avec le 1) a) et traiter quelques exemples.

Sujet 10. *Courbe défine intrinsèquement.*
1) Ecrire une procédure Maple qui calcule l'abscisse curviligne et la courbure d'une courbe donnée en coordonnées cartésiennes. Exemple ...
2) Réciproquement une courbe plane est entièrement déterminée par sa courbure $\kappa(s)$; on pose

$$\theta(u) = \int_0^u \kappa(t)\, dt, \quad b(s) = (\int_0^s \cos(\theta(u))\, du, \int_0^s \sin(\theta(u))\, du)$$

a) Vérifier (où admettre) que b est une représentation paramètrique de la courbe cherchée.

b) Transformer les relations ci-dessus en un système d'équations différentielles, écrire une procédure Maple pour la résoudre numériquement et tracer la courbe solution. Exemple $\kappa : t \mapsto t, t^2, e^t, \sin(t), \ldots$. On peut aussi tenter une résolution explicite.

Sujet 11. *Brachistochrone I.*
Le but de ce sujet d'étude est de résoudre le problème suivant :
"Étant donnés deux points A et B d'un plan vertical, déterminer le chemin reliant A à B le long duquel un point matériel M soumis à la gravité effectue le trajet entre A et B en un temps minimal."
Considérons un plan vertical (Oxy) où l'axe (Oy) pointe vers le bas. On prend le point initial A égal à O. Le point B sera pris sur la droite verticale d'équation $x = 1$. Le chemin reliant A à B est représenté par le graphe d'une fonction y.
D'après le principe de conservation d'énergie, l'énergie potentielle perdue est égale à l'énergie cinématique acquise par le point matériel, c'est-à-dire $\frac{1}{2}mv^2 = mgy$.
Déterminer le temps de parcours T entre A et B du point matériel.
On exprimera le résultat à l'aide d'une intégrale de la forme $\int_0^1 L(y, y')\, dy$.
Quelle valeur obtient-on si le chemin est un segment (resp. un quart de cercle) ?
Nous cherchons à déterminer l'équation de y minimisant T. Cette équation satisfait l'équation d'Euler-Lagrange $\frac{\partial}{\partial x} L((y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial v}(y(x), y'(x)\right) = 0$ donnant les points critiques du problème variationnel.
Écrire cette équation pour le problème considéré.
Quelles en sont les solutions ? Les représenter graphiquement.
Faire une animation avec comme profil, le segment de droite, le quart de cercle et la courbe trouvée montrant le parcours de 3 billes lâchées simultanément et/ou calculer les temps de parcours correspondants.

Sujet 12. *Isométries de* $\mathbb{R}^3$.
On utilisera le package plottools, la découverte de celui-ci fait partie du sujet.
Vous avez toute latitude pour définir une application affine : expression cartésienne, matrice associée, image d'un repère ...selon ce qui vous arrange.
Ecrire une procédure Maple qui vérifie qu'une application affine de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même est une isométrie et précise si elle est directe. Ecrire une procédure donnant la forme canonique. Représenter les éléments géométriques, puis une figure (objet défini dans plottools cube, tetraèdre, ...) et son image.

Sujet 13. *Test de primalité.*
En s'inspirant du document joint, tester le procédé « exhaustif »sur les entiers de la forme $30*n+p$ avec p premier, $1 < p < 30$, pour k valeurs consécutives $k \approx 50$ pour des nombres à 4 chiffres. Pourcentage de faux positifs ?
Vous avez droit à toutes les fonctions du package numtheory.
Même question avec la version améliorée : comparer avec la précédente et tester sur des nombres plus grands ($\approx$ 8 chiffres).
Mettre en œuvre le test de Miller.

Sujet 14. *Polynômes orthogonaux.*
Déterminer une famille de polynômes P_n, orthogonaux pour le poids $|x|$ sur l'intervalle $[-1, 1]$, i.e. pour le produit scalaire

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, |x|\, dx$$

On calculera les premiers polynômes, mais la procédure doit permettre de les déterminer tous par récurrence.
Déterminer les racines des polynômes ainsi trouvés, et vérifier que les racines de P_n *séparent* celles de P_{n+1} i.e. entre chaque racine de P_{n+1} il y a une racine de P_n.
On peut choisir n=6. Déterminer les coefficients λ_i, tels que la formule d'intégration

$$\int_{-1}^{1} p(x)|x|\, dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i$$

où les α_i sont les racines de P_n, soit exacte pour tout polynôme P de degré $2n - 1$.

Sujet 15. *Le problème du voyageur de commerce.*
Voir par exemple la revue *Pour la Science* de novembre 2004.
1) Ecrire une procédure qui place au hasard, N villes dans un rectangle donné.
On cherche alors un trajet (fermé, i.e. on revient au point de départ) qui passe par toutes les villes et de longueur minimum.
2) Pour N petit, générer tous les trajets possibles et en déduire le meilleur.
3) Implémenter un algorithme de choix au plus proche voisin : à chaque étape on choisit la ville la plus proche non visitée.
4) Comparer les deux méthodes.

Sujet 16. *Brachistochrone II.*
Etant donné deux points A et B, on cherche un point C tel que le temps du trajet de A à B en passant par C soit minimum pour une particule glissant sans frottement sur le segment $[AC]$ et le segment $[BC]$.
1) Résoudre le problème avec Maple.
2) Généraliser en appliquant le même procédé en découpant les segments $[AC]$ et $[CB]$.