

Travaux Dirigés n° 8-9

Exercice 1

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et f une application affine de $\mathcal{E}$ dans lui-même associée à l'application linéaire φ . Montrer que f admet un unique point invariant si et seulement si $\text{Ker}(\varphi - \text{Id}) = \{\vec{0}\}$.

Exercice 2

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine, Ω un point de $\mathcal{E}$ et $k > 0$ un réel. On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k , notée $H(\Omega, k)$, l'application qui à un point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.

- 1) Montrer qu'une homothétie est une application affine.
- 2) Réciproquement, soit f une application affine associée à $k \text{Id}$. Montrer que f est une homothétie ou une translation.
- 3) En déduire que l'ensemble formé des homothéties et des translations est une sous-groupe du groupe affine.
- 4) Discuter selon les valeurs de k et k' la nature du composé de $H(\Omega, k)$ et de $H(\Omega', k')$ et préciser ses éléments géométriques.

Exercice 3

Soient ABC un triangle non aplati et P, Q, R des points situés respectivement sur les côtés (BC) , (CA) et (AB) et distincts de A, B et C .

- 1) En utilisant l'homothétie de centre P qui transforme B en C et l'homothétie de centre Q qui transforme C en A , trouver une démonstration du théorème de Menelaüs.
- 2) On suppose (AP) , (BQ) et (CR) concourantes en M . Retrouver la relation de Ceva en appliquant le théorème de Menelaüs à la sécante BMQ du triangle APC et à la sécante CMR du triangle APB .

Exercice 4

Soient ABC un triangle non aplati, A', B' et C' les milieux respectifs des côtés (BC) , (CA) et (AB) . On note G le centre de gravité du triangle, H l'orthocentre et O le centre du cercle circonscrit (C) à ABC .

- 1) Soit h_1 l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$.
 - a) Quelle est l'image de (C) par h_1 ?
 - b) Quelle est l'image de H par h_1 ?
 - c) En déduire que O, G et H sont alignés sur une droite, appelée droite d'Euler du triangle.
- 2) On note (Γ) le cercle circonscrit à $A'B'C'$ et ω son centre.
 - a) Montrer que ω est milieu de $[OH]$.
 - b) Montrer que l'homothétie de centre H et de rapport $\frac{1}{2}$ transforme (C) en (Γ) .
- 3) a) En déduire que les milieux des côtés, les pieds des hauteurs et le milieu des segments joignant l'orthocentre à un des sommets du triangle sont situés sur un même cercle appelé cercle d'Euler ou cercle des neuf points.
 - b) En déduire que le symétrique de l'orthocentre par rapport à un coté appartient au cercle circonscrit.