

Travaux Dirigés n° 6

Exercice 1

Soit $ABDC$ un parallélogramme ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$) non aplati, M le milieu de $[CD]$ et N le symétrique de A par rapport à D . Déterminer les coordonnées barycentriques de D , M et N relativement au repère (A, B, C) .

Exercice 2

Soit ABC un triangle non aplati.

1) On construit A' , B' et C' tels que $\overrightarrow{BA'} = 2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB'} = 2\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AC'} = 2\overrightarrow{AB}$.

Démontrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont même centre de gravité.

2) Soient trois réels α , β et γ tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et G le barycentre de (A, α) , (B, β) et (C, γ) . La parallèle à (AB) passant par G coupe (BC) en M , la parallèle à (AC) passant par G coupe (BC) en N .

Démontrer que $\overrightarrow{MB} = -\gamma\overrightarrow{BC}$ et que $\overrightarrow{NC} = \beta\overrightarrow{BC}$.

Exercice 3

1) Sur une droite $\mathcal{D}$, on considère deux points A et A' distincts. Soient α et α' deux réels tels que $\alpha + \alpha' = 1$ et I le barycentre de (A, α) et (A', α') . Démontrer que A' est barycentre de $(I, 1)$ et $(A, -\alpha)$.

2) Dans le plan affine $\mathcal{P}$ on considère quatre points distincts A , A' , B et B' . On suppose (AA') et (BB') sécantes en I , (AB) et $(A'B')$ sécantes en P .

On suppose I barycentre de (A, α) et (A', α') ($\alpha + \alpha' = 1$) et barycentre de (B, β) et (B', β') ($\beta + \beta' = 1$).

Démontrer que P est barycentre de (A, α) et $(B, -\beta)$ ou de (A', α') et (B', β') .

3) Dans le plan affine $\mathcal{P}$ on considère un triangle non aplati ABC . Une droite $\mathcal{D}$ coupe les côtés (BC) , (CA) et (AB) du triangle en P , Q et R distincts des sommets. On pose

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \alpha \quad \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \beta \quad \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = \gamma.$$

a) Montrer que A est barycentre de $(R, 1 - \beta)$ et (B, β) ainsi que de $(Q, 1 - 1/\gamma)$ et $(C, 1/\gamma)$.

b) Démontrer que P est barycentre de $(C, 1/\gamma)$ et $(B, -\beta)$.

c) En déduire le théorème de *Menelâus*.