

Travaux Dirigés n° 2

Exercice 1

- a) Soit $(G, *)$ un groupe ; montrer que l'ensemble des $x \in G$ vérifiant $\forall y \in G, x * y = y * x$ est un sous-groupe de G ; il est appelé centre de G .
- b) Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$. A quelle condition la matrice $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ commute-t-elle avec la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?
- c) Déterminer le centre du groupe $O(2)$.

Exercice 2

Déterminer la matrice de la projection orthogonale dont l'image est la droite vectorielle (D) engendrée par le vecteur unitaire $\vec{u} = (a, b)$.

Même question pour la symétrie orthogonale autour de (D) .

Exercice 3

On note $O_-(2)$ les matrices orthogonales de déterminant -1 , c'est-à-dire qui n'appartiennent pas à $SO(2)$. Soient $R \in SO(2)$ et $S, T \in O_-(2)$ des matrices orthogonales données.

- 1) Montrer qu'il existe des matrices $T', T'' \in O_-(2)$ telles que $R = ST' = T''S$. Interprétation « géométrique » ?
- 2) Montrer que $TS = (ST)^{-1}$ et que $RS = SR^{-1}$.

Exercice 4

Soit $M(t)$ un point mobile sur une courbe plane (C) . Déterminer la dérivée de la fonction $t \mapsto \|\overrightarrow{OM(t)}\|$; on pourra poser $M(t) = (x(t), y(t))$ (mais ce n'est pas une obligation !). Montrer que cette dérivée s'exprime simplement en fonction de $\overrightarrow{OM(t)}$ et d'un vecteur tangent $\vec{t}$ à la courbe (C) ; que peut-on dire de plus si la courbe (C) est paramétrée par l'abscisse curviligne ?