

Travaux Dirigés n° 1

Exercice 1

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E vérifiant $f \circ f = \text{Id}$.

1) Soient $E_1 = \text{Ker}(f - \text{Id})$ et $E_2 = \text{Ker}(f + \text{Id})$; montrer que E_1 et E_2 sont supplémentaires. Montrer que si $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, alors $f(x) = x_1 - x_2$. On dit que f est la symétrie (vectorielle) autour de E_1 de direction E_2 .

2) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E vérifiant $f \circ f = f$. Montrer qu'il existe deux sous-espaces supplémentaires E_1 et E_2 tels que si $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, alors $f(x) = x_1$. On dit que f est la projection (vectorielle) sur E_1 de direction E_2 .

3) Montrer que si p est une projection, alors $f = 2p - \text{Id}$ est une symétrie.

Exercice 2

Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) des matrices

$$R = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Pour la matrice S on pourra poser $a = \cos(2\alpha)$, $b = \sin(2\alpha)$ et faire le lien avec l'exercice précédent.

Exercice 3

On reprend les notations de l'exercice précédent. Soient $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ et $\vec{v} = (\gamma, \delta)$ deux vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^2$.

1) Déterminer les matrices de type R telles que $R\vec{u} = \vec{v}$.

2) a) Déterminer les matrices de type S telles que $S\vec{u} = \vec{v}$.

b) Déterminer les éléments propres d'une telle matrice S dans le cas où $\vec{u} = (1, 0)$ et $\vec{v} = (\cos(2\alpha), \sin(2\alpha))$.

Exercice 4

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on pose $A(\theta) = \begin{pmatrix} \text{ch}(\theta) & \text{sh}(\theta) \\ \text{sh}(\theta) & \text{ch}(\theta) \end{pmatrix}$.

1) Montrer que l'ensemble des matrices $A(\theta)$ est muni d'une structure de groupe isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

2) Pour tout vecteur $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on définit la forme quadratique L par $L(x) = x_1^2 - x_2^2$ et la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer qu'une matrice A conserve L (i.e. $\forall x, L(Ax) = L(x)$) si et seulement si

$$J = {}^t A J A \quad (1)$$

c) Déterminer toutes les matrices 2×2 satisfaisant (1).