

Contrôle Continu n° 2

Exercice 1

1) On considère deux vecteurs $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ de même norme dans $\mathbb{R}^2$.

a) Déterminer la matrice $R \in O_+(2)$ telle que $Ru = v$.

b) En déduire la relation $\sin(\theta) = \frac{\det(u, v)}{\|u\| \|v\|}$ où θ représente l'angle (u, v) .

2) $\mathbb{R}^2$ étant rapporté à la base canonique $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$, on considère une application linéaire r dont la matrice R appartient à $O_+(2)$. Soit une matrice $S \in O_-(2)$ et la base $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$ telle que $f_1 = Se_1$ et $f_2 = Se_2$.

Déterminer la matrice de r par rapport à la base $\mathcal{B}$; justifier votre réponse.

Exercice 2

On considère un triangle ABC non aplati et non rectangle; on note H l'orthocentre (point de concours des hauteurs) du triangle.

Montrer que le symétrique H_1 de H par rapport au côté (BC) appartient au cercle circonscrit à ABC , c'est-à-dire que A, B, C et H_1 sont cocycliques.

Exercice 3

Dans le plan affine rapporté à un repère $\mathcal{R}$ on donne les points $A(3, 9)$, $B(0, 0)$ et $C(7, 1)$.

1) Vérifier (rapidement) que $\Omega(3, 4)$ est le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à ABC .

2) Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H de ABC .

3) Déterminer le symétrique de H par rapport au côté (AB) et vérifier qu'il appartient à $\mathcal{C}$.

Exercice 4

On considère 3 points non alignés I, J, K d'un plan affine. On cherche, si cela existe, un triangle ABC tel que I soit le milieu de $[AB]$, J celui de $[BC]$ et K celui de $[AC]$. On note s_I (resp. s_J, s_K) la symétrie de centre I (resp. J, K).

1) Que peut-on dire de $f = s_K \circ s_J \circ s_I$?

2) En déduire que si f est connue, le problème est résolu et expliquer pourquoi.

3) Application : on donne $I(-1, 3)$, $J(2, 0)$ et $K(4, 4)$. Déterminer, par une construction géométrique ou par le calcul, le triangle ABC .