

Géométrie

Session de Janvier, durée 3 heures.

Cours autorisé.

Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A *Au cas, bien improbable, où vous ne sauriez traiter le cas général, vous pouvez choisir $A(0, 2\sqrt{3})$, $B(-3, 0)$ et $C(4, 0)$.*

Soit ABC un triangle non aplati; on note $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$ les longueurs des côtés du triangle et on suppose $b \neq c$.

1) Soit I le barycentre de (B, b) et (C, c) .

La parallèle à (AI) issue de B rencontre (AC) en Q.

a) Quelle est la nature du triangle QAB ?

b) En déduire que (AI) est bissectrice de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

c) Soit J le barycentre de $(B, -b)$ et (C, c) ; que peut-on dire de AJ ? Justifier la réponse.

2) a) En déduire que l'ensemble des points M tels que $MC = \frac{b}{c}MB$ est un cercle (C) de diamètre IJ.

b) Montrer que le centre ω de (C) est le barycentre de B et C affectés de coefficients que l'on précisera.

3) Soit Ω le barycentre de (A, a) , (B, b) et (C, c) .

a) Dans le triangle ABC, quelle position remarquable occupe le point Ω ?

b) Soit f l'application qui à point M du plan associe $f(M) = aMA^2 + bMB^2 + cMC^2$. Donner une expression simplifiée de $f(M)$.

c) Montrer que la quantité $a\Omega A^2 + b\Omega B^2 + c\Omega C^2$ s'exprime simplement en fonction de a , b et c . (On pourra calculer $af(A) + bf(B) + cf(C)$).

Partie B

Soit (Γ) la conique d'équation cartésienne $3x^2 + 4y^2 - 6x = 9$.

1) Préciser la nature de (Γ) et ses éléments caractéristiques. On notera F le foyer de (Γ) d'abscisse strictement positive et (D) la directrice associée.

2) Soit (D_k) la droite d'équation $y = -x/2 + k$.

a) Déterminer l'équation aux abscisses des points d'intersection de (Γ) et (D_k) .

b) Pour quelles valeurs de k , (D_k) rencontre-t-elle (Γ) en deux points M_k et N_k ?

c) On note I_k le milieu de (M_k, N_k) ; montrer que le point I_k appartient à une droite fixe (indépendante de k).

3) a) En déduire qu'il existe deux points P_1 (resp. P_2) où la tangente (T_1) (resp. (T_2) à (Γ) est parallèle à la droite $y = -x/2$.

b) On note $K_1 = (T_1) \cap (D)$ et $K_2 = (T_2) \cap (D)$. Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{FP_1}$ et $\overrightarrow{FK_1}$ (resp. $\overrightarrow{FP_2}$ et $\overrightarrow{FK_2}$) sont orthogonaux.

4) Faire une figure.

T.S.V.P

Partie C

Soit Γ une conique de foyer F , de directrice (D) , d'excentricité e ; on note $\vec{u}$ un vecteur directeur de (D) . Soit $\vec{v}$ un vecteur non colinéaire à $\vec{u}$ et α une mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$. Pour $K \in (D)$ on note (Δ_K) la droite $(K, \vec{v})$.

1) a) Soit (C_K) l'ensemble des points M tels que $MF = eMK|\sin \alpha|$; on suppose que (C_K) rencontre (Δ) en deux points M_K et N_K ; montrer que M_K et N_K sont les points d'intersection de (Δ_K) avec (Γ) .

b) En déduire que (FK) est une bissectrice de $(\overrightarrow{FM_K}, \overrightarrow{FN_K})$.

2) a) On note ω_K le centre de (C_K) . Montrer que ω_K appartient à une droite fixe parallèle à (D) .

b) Quel est l'ensemble des milieux I_K de (M_K, N_K) lorsque K parcourt (D) ? On pourra remarquer que I_K est la projection orthogonale de ω_K sur (Δ_K) et faire intervenir le point $U \in D$ tel que FU est orthogonale à Δ_K .