

Géométrie

Session de septembre 2002

Durée 2 heures

Notes de cours autorisées.

Problème 1 *Théorème de Ménélaüs dans l'espace*

L'espace affine euclidien de dimension 3 est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; on note $\overline{AB}$ la mesure du segment $[AB]$ et (AB) la droite définie par A et B.

Soient A, B, C, D quatre points non coplanaires, $\alpha \in (AB)$, $\beta \in (BC)$, $\gamma \in (CD)$ et $\delta \in (DA)$.

Montrer que α , β , γ et δ sont coplanaires si et seulement si on a la relation

$$\frac{\overline{\alpha A}}{\overline{\alpha B}} \frac{\overline{\beta B}}{\overline{\beta C}} \frac{\overline{\gamma C}}{\overline{\gamma D}} \frac{\overline{\delta D}}{\overline{\delta A}} = 1.$$

Problème 2

Le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est identifié avec l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Partie A

On considère la transformation f qui au point $M(x, y)$ associe le point $M' = f(M)$ de coordonnées (x', y') avec

$$x' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 4 \quad y' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 8.$$

- 1) a) Quelle est la transformation complexe associée à f ?
b) Montrer que f est une isométrie.
c) Préciser la nature de f .
- 2) Soit (Δ) la droite d'équation cartésienne $3x + y + 2 = 0$. Montrer que Δ est la seule droite (globalement) invariante par f .

Partie B

Soit ABC un triangle ; on cherche à déterminer, si cela existe, des points $M \in [BC]$, $N \in [CA]$, $P \in [AB]$ qui soient les sommets d'une trajectoire de billard, c'est-à-dire que

MN et MP sont symétriques par rapport à la normale en M à (BC),

NM et NP sont symétriques par rapport à la normale en N à (CA),

PN et PM sont symétriques par rapport à la normale en P à (AB).

On désigne par s_{AB} (resp. s_{BC} , s_{AC}) la symétrie par rapport à la droite (AB) (resp. (BC), (AC)).

- 1) On suppose que M , N et P existent ; montrer que la droite (MP) est globalement invariante par $f = s_{AB} \circ s_{AC} \circ s_{BC}$. Etudier la réciproque.

- 2) On donne les points $A(-\frac{2}{3}; \frac{14}{3})$, $B(-3, 0)$ et $C(4, 0)$ et on admettra que f est la transformation définie dans la partie A.

a) Montrer qu'il existe une unique trajectoire de billard et déterminer par leurs coordonnées les points M et P puis le point N.

b) Faire une figure et vérifier graphiquement.