

Géométrie

durée 2 heures

Exercice 1 *Toute forme de solution : calcul, complexes, géométrie, ..., est acceptée, avec un bonus pour les solutions purement géométriques.*

Dans le plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère un triangle rectangle OAB tel que $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \delta_+$. La hauteur issue de O coupe (BA) en H et coupe la parallèle à (OB) menée par A en D .

On pose $OA = a$ et $OB = b$ et on désigne par s la similitude directe telle que $s(O) = A$ et $s(B) = O$.

- 1) a) Déterminer les éléments géométriques de s .
b) Déterminer $s(A)$ et montrer l'égalité $OH^2 = HA \cdot HB$.
- 2) Soit I le milieu de $(0, B)$, J le milieu de (O, A) et K le milieu de (A, D) . Démontrer que le triangle IJK est rectangle et que (JH) est une hauteur de ce triangle.

Problème

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- 1) Nature et éléments caractéristiques de la conique (Γ) d'équation cartésienne

$$9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y = 127.$$

- 2) Soient (C) et (C') deux cercles de centres respectifs O et O' et de rayons respectifs R et R' avec $R \neq R'$; on suppose (C) et (C') sécants en M .

a) Montrer qu'il existe une homothétie h de rapport R'/R , dont on précisera le centre Ω , telle que $h(C) = C'$.

b) En considérant, par exemple, la parallèle à (OM) passant par O' , donner une construction géométrique du point Ω .

c) On considère la tangente (T) à (C) issue de Ω ; montrer que (T) est aussi tangente à (C') . Donner une construction géométrique de (T) .

- 3) Soit (H) une hyperbole de foyers F et F' et M un point de (H) donné. On note $2c = FF'$ et $2a$ la distance entre les sommets. On considère les cercles (C) et (C') de centres respectifs F et F' sécants en M . Soient (T) et (T') les tangentes communes à (C) et (C') ; on note $A \in (C)$ et $A' \in (C')$ les points d'intersection de (T) avec (C) et (C') et G la projection orthogonale de F' sur la droite (AF) .

a) Montrer que $GF = 2a$. (On pourra montrer que $AG = MF'$).

b) Montrer que la droite (AA') est parallèle à une asymptote de (H) .

- 4) On donne $F'(-5, 0)$, $F(5, 0)$ et $M(5, 9/4)$. En utilisant ce qui précède, faire une figure et construire les asymptotes de (H) .