

Géométrie

durée 3 heures

Exercice 1

Soient ABC un triangle isocèle et rectangle en A avec $AB = AC = 3$.

- 1) Déterminer le barycentre G des points $(A, 4)$, $(B, -3)$ et $(C, 2)$. Faire une figure.
- 2) Pour M dans le plan, on pose $f(M) = 4MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2$.
 - a) Exprimer $f(M)$ en fonction de MG^2 .
 - b) En déduire l'ensemble des points M tels que $f(M) = -36$.
- 3) Le plan étant rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ on suppose que A , B et C ont pour coordonnées respectives $A(0, 0)$, $B(3, 0)$ et $C(0, 3)$.
 - a) Si M a pour coordonnées (x, y) , exprimer $f(M)$ en fonction de x et y .
 - b) Déterminer l'ensemble des points M tels que $f(M) = -36$ et retrouver le résultat du 2) b).

Exercice 2

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$; on considère le cube $OABCDEFG$ avec

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FG} = \vec{u}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{v}, \quad \overrightarrow{OD} = \vec{w},$$

et on note Ω l'isobarycentre des 8 sommets.

- 1) Donner une équation du plan Π orthogonal à (OG) passant par Ω .
- 2) a) Montrer que (EF) est parallèle à Π .
b) Montrer que (AD) est parallèle à Π .
c) Déterminer l'intersection de Π avec le cube. Quelle est la figure ainsi obtenue dans le plan Π ?

Problème

PARTIE A On donne 4 points A , B , A' et B' tels que les droites (AB) et $(A'B')$ soient bien définies et sécantes en O (O n'est pas nécessairement distinct des quatre points). Soit t un paramètre réel et $M(t)$ et $M'(t)$ les points définis par

$$\overrightarrow{AM}(t) = t \overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{A'M'}(t) = t \overrightarrow{A'B'}.$$

- 1) Positions de M et M' pour $t = 0$ et $t = 1$?
- 2) Montrer qu'il existe une similitude Σ telle que, pour tout t , on ait $\Sigma(M(t)) = M'(t)$.
- 3) Caractériser géométriquement le centre de Σ . On pourra commencer par le cas où O est distinct de A et A' , puis étudier les cas particuliers.

PARTIE B Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit t un paramètre réel; on considère les points $N(t)$ et $N'(t)$ de coordonnées respectives

$$N(t)(at + b, 0) \quad N'(t)(0, ct + d),$$

où $a \neq 0$, b , $c \neq 0$, d sont des réels fixés; on note $\Delta(t)$ la droite $(N(t)N'(t))$.

- 1) Déterminer l'expression complexe d'une similitude Σ telle que $\forall t \in \mathbb{R}, \Sigma(N(t)) = N'(t)$.
- 2) Dans cette question on suppose $a = 1, b = 4, c = -2, d = -3$.
 - a) Déterminer les éléments géométriques de Σ : centre Ω , rapport k et angle θ .
 - b) Déterminer en fonction de t les coordonnées du projeté orthogonal $H(t)$ de Ω sur la droite $\Delta(t)$.
 - c) En déduire l'ensemble des points $H(t)$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

3) a) Dans le cas général, justifier géométriquement le résultat de la question 2)c). Indication : on pourra montrer que $H(t)$ est l'image de $N(t)$ par une transformation convenable.

b) En déduire que la droite $\Delta(t)$ reste tangente à une parabole fixe $\mathcal{P}$ (*i.e.* indépendante de t) de foyer Ω dont on précisera la directrice.

4) On reprend pour a , b , c et d les valeurs de la question 2).

a) Vérifier que $\mathcal{P}$ est la parabole de foyer $(2; 1)$ et de directrice $x + 2y = 0$.

b) Donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

c) Faire une figure comportant la parabole $\mathcal{P}$ et les droites $\Delta(t)$ pour $t = 0$, $t = 1$, $t = -1$.