

Géométrie

durée 3 heures

Exercice 1

Soit $SABC$ un tétraèdre. On considère 3 points A' , B' et C' distincts des sommets du tétraèdre et appartenant respectivement aux droites (SA) , (SB) et (SC) . On suppose de plus $(A'B')$ sécante avec (AB) en P , $(B'C')$ sécante avec (BC) en Q et $(A'C')$ sécante avec (AC) en R .

Montrer que P , Q , R sont alignés.

Exercice 2 Le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et on note $\mathcal{P}^*$ le plan privé de l'origine O . Soit $k \neq 0$, on appelle inversion de pôle O et de puissance k , notée $I(O, k)$, la transformation de $\mathcal{P}^*$ dans lui-même définie par

(i) M' appartient à la droite (OM) ,

(ii) $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = k$.

1) a) Montrer que M' est l'image de M par $I(O, k)$ si et seulement si $\overrightarrow{OM'} = \frac{k}{OM^2} \overrightarrow{OM}$.

b) Montrer que $I(O, k)$ est une involution.

c) Quelle est la transformation complexe associée à $I(O, k)$?

d) Soit (C) un cercle tel que la puissance de O par rapport à (C) est égale à k . Que peut-on dire de l'image de (C) par $I(O, k)$?

2) a) Soient A et B deux points de $\mathcal{P}^*$ d'images A' et B' par $I(O, k)$. Montrer que les points A , A' , B et B' sont cocycliques.

b) Soit (D) une droite ne contenant pas O , A le projeté orthogonal de O sur D et A' l'image de A par $I(O, k)$. Montrer que pour tout point $M \in (D)$, l'image M' de M par $I(O, k)$ appartient au cercle de diamètre $[OA']$.

c) Quelle est l'image par $I(O, k)$ d'un cercle passant par O ?

3) a) Soient k et k' deux réels non nuls ; quel est le composé $I(O, k) \circ I(O, k')$?

b) Soit C un cercle ne contenant pas O et k' la puissance de O par rapport à (C) . Quelle est l'image de (C) par $I(O, k)$?

c) On garde les mêmes notations qu'en b) ; montrer que la tangente en un point $M \in (C)$ et la tangente en $M' = I(O, k)(M)$ sont symétriques par rapport à la droite (MM') .

Exercice 3

Le plan affine euclidien orienté est rapporté au repère $\mathcal{R}$.

On considère la conique (Γ) d'équation cartésienne $5x^2 + 9y^2 - 20x = 25$.

1) Préciser la nature de (Γ) et ses éléments géométriques.

2) a) Soit (D) une droite d'équation $ux + vy + h = 0$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de O sur (D) .

b) Donner une équation de la tangente (T_0) à (Γ) au point M_0 de coordonnées $(0, 5/3)$.

c) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal P_0 de O sur (T_0) .

3) On désigne par (E) une ellipse de foyers F et F' dont la longueur du demi grand-axe est notée a et par (C) le cercle de centre F' est de rayon $2a$. Soit (T) la tangente à (E) au point M et Q le point d'intersection de la demi-droite $[F'M)$ avec (C) .

a) Montrer que Q est le symétrique de F par rapport à (T) .

b) Ensemble des projetés orthogonaux de F sur (T) lorsque M parcourt (E) ?