

Problème 1

Le plan rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est identifié avec l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. Soient les points $A(0, 2\sqrt{3})$, $B(-2, 0)$, $C(2, 0)$ et E le milieu de $[AB]$; la perpendiculaire à (AC) passant par E rencontre (BC) en D et (AC) en F .

Soient (C_1) le cercle circonscrit au triangle ABC , (C_2) le cercle circonscrit au triangle BDE , (C_3) le cercle circonscrit au triangle AEF et (C_4) le cercle circonscrit au triangle CDF .

1) Vérifier que les points D et F ont respectivement pour coordonnées $(-4, 0)$ et $(\frac{1}{2}, 3\frac{\sqrt{3}}{2})$.

2) a) Donner une équation cartésienne de C_1 et C_2 .

b) Soit K le point d'intersection, autre que B , de (C_1) et (C_2) . Déterminer les coordonnées de K .

3) Soit s la transformation géométrique qui au point d'affixe z associe le point d'affixe z'

$$z' = \frac{3}{2}(1 - i\sqrt{3})z - 7 - 3i\sqrt{3}.$$

a) Déterminer $s(A)$ et $s(E)$.

b) Préciser la nature et les éléments géométriques de s .

4) Soit σ la similitude directe définie par $\sigma(A) = E$ et $\sigma(C) = D$.

a) Donner le rapport et l'angle de σ .

b) Montrer par des considérations géométriques que le centre de σ appartient à C_3 et C_4 .

c) Déterminer les coordonnées (ou l'affixe) du centre de σ à l'aide de son expression complexe.

d) Dédire des résultats précédents que les cercles C_1 , C_2 , C_3 et C_4 ont un point commun.

Problème 2

Le plan (P) rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est identifié avec l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

PARTIE 1

On considère le triangle ABC dont les sommets ont pour coordonnées $A(-5; 0)$, $B(1, -2)$ et $C(1, 3)$.

1) Vérifier que l'orthocentre du triangle ABC est confondu avec l'origine O .

2) Soit $M(-4, 3)$. Déterminer les symétriques M_A , M_B et M_C de M par rapport à (BC) , (CA) et (AB) ; vérifier que M_A , M_B et M_C sont alignés avec O .

PARTIE 2

1) Soient C_1 et C_2 deux cercles de même rayons, de centres respectifs ω_1 et ω_2 sécants en E et F .

a) Quelle est la nature du quadrilatère $E\omega_1 F\omega_2$?

b) On note r la rotation de centre E telle que $r(C_1) = C_2$. Montrer que pour tout point $Q \in C_1$, les points Q , $r(Q)$ et F sont alignés.

Soit ABC un triangle, H son orthocentre et (C) le cercle circonscrit au triangle.

2) On note H_A le symétrique de H par rapport au côté (BC) .

a) Montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH_A}) = (\overrightarrow{CH}, \overrightarrow{CB})$ modulo π .

b) En déduire que A , B , C et H_A sont cocycliques.

3) On note s_A (resp. s_B , s_C) la symétrie orthogonale autour du côté (BC) (resp. (CA) , (AB)) et (C_A) (resp. (C_B) , (C_C)) l'image de (C) par s_A (resp. s_B , s_C).

a) Montrer que (C_A) , (C_B) , (C_C) ont un point commun que l'on précisera.

b) Préciser la nature de $s_B \circ s_A$ où $\circ$ désigne la composition des applications.

3) Soit M un point quelconque de (C) , montrer que les points $s_A(M)$, $s_B(M)$, $s_C(M)$ sont alignés avec l'orthocentre H du triangle ABC .