

Exercice

Soit $SABC$ un tétraèdre. On considère 3 points A' , B' et C' distincts des sommets du tétraèdre et appartenant respectivement aux droites (SA) , (SB) et (SC) . On suppose de plus $(A'B')$ sécante avec (AB) en P , $(B'C')$ sécante avec (BC) en Q et $(A'C')$ sécante avec (AC) en R .

Montrer que P , Q , R sont alignés.

Exercice

Le plan affine est rapporté à un repère $\mathcal{R}$. Soient A , B , C , D quatre points alignés; on dit que (A, B, C, D) forment une division harmonique si

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}.$$

Soit (Δ) la droite définie par le point $A(a, b)$ et dirigée par le vecteur (u, v) .

1) Montrer qu'une représentation paramétrique de (Δ) est donnée par

$$\begin{cases} x &= a + \lambda u \\ y &= b + \lambda v \end{cases}$$

On notera $M(\lambda)$ le point de paramètre λ .

2) Soient $M(\lambda_1)$, $M(\lambda_2)$, $M(\lambda_3)$ et $M(\lambda_4)$ quatre points de (Δ) . Montrer que $(M(\lambda_1), M(\lambda_2), M(\lambda_3), M(\lambda_4))$ forment une division harmonique si et seulement si $\frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} = -\frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2}$.

3) a) On suppose que (Δ) coupe l'axe des abscisses en C et l'axe des ordonnées en D . Déterminer les coordonnées du point $B \in \Delta$ tel que (A, B, C, D) soit une division harmonique.

b) Ensemble des points B lorsque (Δ) pivote autour de A , c'est-à-dire lorsque u et v varient, a et b restant fixes ?

Exercice Soit (Δ) une droite du plan affine $\mathcal{P}$. On considère quatre points distincts de (Δ) , A , B , C et D qui vérifient

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}},$$

c'est-à-dire qui forment une division harmonique. Soit O un point extérieur à (Δ) et (Δ') une droite qui rencontre (OA) , (OB) , (OC) et (OD) respectivement en A' , B' , C' et D' .

1) La parallèle à (OA) issue de B rencontre (OC) en M et (OD) en N . Montrer que B est milieu de (M, N) . (On pourra considérer les homothéties h_1 et h_2 de centres respectifs C et D qui transforment A en B .)

2) a) La parallèle à (OA') issue de B' coupe (OC') en M' et (OD') en N' . Démontrer que B' est milieu de (M', N') .

b) En déduire que la division $A'B'C'D'$ est harmonique.

3) Soient (D) et (D') deux droites sécantes en Ω et F un point n'appartenant pas à $(D) \cup (D')$. Une droite (Δ) contenant F rencontre (D) en I et (D') en J et soit G le conjugué harmonique de F par rapport à I et J , c'est-à-dire que la division (F, G, I, J) est harmonique.

a) Quel est l'ensemble des points G lorsque (Δ) pivote autour de F ?

b) Indiquer une construction de cet ensemble.

Exercice Le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et on note $\mathcal{P}^*$ le plan privé de l'origine O . Soit $k \neq 0$, on appelle inversion de pôle O et de puissance k la transformation de $\mathcal{P}^*$ dans lui-même définie par

(i) M' appartient à la droite (OM) ,

(ii) $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$.

1) a) Montrer que M' est l'image de M par l'inversion $I(O, k)$ si et seulement si

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{k}{OM^2} \overrightarrow{OM}.$$

b) Montrer que $I(O, k)$ est une involution.

c) Quelle est la transformation complexe associée à $I(O, k)$?

d) Soit (C) un cercle tel que la puissance de O par rapport à (C) est égale à k . Que peut-on dire de l'image de (C) par $I(O, k)$?

2) a) Soient A et B deux points de $\mathcal{P}^*$ d'images A' et B' par $I(O, k)$. Montrer que les points A, A', B et B' sont cocycliques.

b) Soit (D) une droite ne contenant pas O , A le projeté orthogonal de O sur D et A' l'image de A par $I(O, k)$. Montrer que pour tout point $M \in (D)$, l'image M' de M par $I(O, k)$ appartient au cercle de diamètre $[OA']$.

c) Quelle est l'image par $I(O, k)$ d'un cercle passant par O ?

3) a) Soient k et k' deux réels non nuls ; quel est le composé $I(O, k) \circ I(O, k')$?

b) Soit C un cercle ne contenant pas O et k' la puissance de O par rapport à (C) . Quelle est l'image de (C) par $I(O, k)$?

c) On garde les mêmes notations qu'en b) ; montrer que la tangente en un point $M \in (C)$ et la tangente en $M' = I(O, k)(M)$ sont symétriques par rapport à la droite (MM') .

Exercice

Le plan affine euclidien orienté est rapporté au repère $\mathcal{R}$.

PARTIE A.

On considère la conique (Γ) d'équation cartésienne

$$5x^2 + 9y^2 - 20x = 25.$$

1) Préciser la nature de (Γ) et ses éléments géométriques.

2) a) Soit (D) une droite d'équation $ux + vy + h = 0$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de O sur (D) .

b) Donner une équation de la tangente (T_0) à (Γ) au point M_0 de coordonnées $(0, 5/3)$.

c) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal P_0 de O sur (T_0) .

3) On désigne par (E) une ellipse de foyers F et F' dont la longueur du demi grand-axe est notée a et par (C) le cercle de centre F' est de rayon $2a$. Soit (T) la tangente à (Γ) au point M et Q le point d'intersection de la demi-droite $[F'M)$ avec (C) .

a) Montrer que Q est le symétrique de F par rapport à (T) .

b) Ensemble des projetés orthogonaux de F sur (T) lorsque M parcourt (E) .

PARTIE B.

On considère les points $A(-1/2, 6)$, $B(-5, -3)$ et $C(4, -3)$.

1) a) Vérifier que l'orthocentre H du triangle ABC a pour coordonnées $(-1/2, -3/4)$.

b) Vérifier que le centre du cercle circonscrit O a pour coordonnées $(-1/2, 3/8)$.

c) Donner une équation du cercle d'Euler (C_9) (ou cercle des neuf points) du triangle ABC .

2) On considère la conique (Γ) de foyers O et H dont le cercle principal est le cercle (C_9) .

a) Donner une équation cartésienne de (Γ) .

b) Montrer par le calcul que (Γ) est tangente aux trois côtés de ABC .

3) En utilisant les résultats de la partie A, donner une démonstration géométrique du résultat de la question B. 2) b) .