

Géométrie

JEAN-RENÉ LICOIS

Plan du Cours

- Introduction.
- Plan vectoriel euclidien.
- Le plan affine euclidien (Géométrie métrique plane).
- Espaces affines, barycentres.
- Isométries de $\mathbb{R}^3$.
- Similitudes.
- Cercles : orthogonalité, faisceaux de cercles.
- Coniques (affines).

BIBLIOGRAPHIE

Les manuels scolaires de Terminale C (puis S) depuis 1971, plus particulièrement la collection ALEPH 0 puis ALEPH 1.

- BERGER M.* *Géométrie* (2 volumes) Nathan 1990
- DUBUC S.* *Géométrie plane* PUF 1971
- EUCLIDE *Les œuvres d'Euclide* (Trad. F. Peyrard) Librairie A. Blanchard 1993
- GRAMAIN A. *Géométrie élémentaire* Hermann 1997
- LEBESGUE H. *Les coniques* Réédition J. Gabay
- LEBOSSÉ C. &
HÉMERY C. *Géométrie, classes de mathématiques, programme de 1945* Réédition J. Gabay.
- SAMUEL P.* *Géométrie projective* PUF 1986
- SORTAIS R. & Y. *Géométrie de l'espace et du plan* Hermann 1983.
- SORTAIS R. & Y. *Géométrie du triangle* Hermann 1987.

*Les ouvrages signalés par * sont d'un niveau plus élevé (Maîtrise, Agrégation).*

Chapitre 1

Le plan vectoriel euclidien

1.1 Structure euclidienne de $\mathbb{R}^2$

Définition 1 Le produit scalaire de deux éléments $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ est défini par

$$\langle x, y \rangle = x.y = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Il s'agit d'une forme bilinéaire symétrique définie positive à laquelle est associée une norme $\|x\| = \sqrt{x.x}$ qui vérifie les propriétés usuelles

$$\begin{aligned}\|x\| &= 0 \iff x = (0, 0) \\ \|\lambda x\| &= |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \\ x.y &\leq \|x\| \|y\|.\end{aligned}$$

La troisième propriété est l'inégalité triangulaire, la quatrième est l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Définition 2 Deux éléments x et y de $\mathbb{R}^2$ sont dits orthogonaux si et seulement si le produit scalaire $x.y$ est nul.

Une base (x, y) de $\mathbb{R}^2$ est dite orthogonale (resp. orthonormée) si les deux vecteurs sont orthogonaux (resp. orthogonaux et de norme égale à 1).

Les deux éléments $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ appelée *base canonique*.

1.2 Matrices orthogonales

Définition 3 Une matrice 2×2 A est dite orthogonale si et seulement si l'image de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par A est une base orthonormée.

Il est équivalent de dire que les colonnes de A forment une base orthonormée.

Proposition 1.2.1 Une matrice A est orthogonale si et seulement si elle « conserve » le produit scalaire :

$$\langle x, y \rangle = \langle Ax, Ay \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Une matrice A est orthogonale si et seulement si elle vérifie ${}^tA A = \text{Id}$ où Id est la matrice unité.

DÉMONSTRATION : Par définition, si A conserve le produit scalaire, elle transforme une base orthonormée en base orthonormée, en particulier la base canonique : elle est orthogonale.

Réciproquement, soient $x = (x_1, x_2) = x_1e_1 + x_2e_2$ et $y = (y_1, y_2) = y_1e_1 + y_2e_2$; en utilisant la bilinéarité du produit scalaire on a

$$\begin{aligned}\langle Ax, Ay \rangle &= \langle A(x_1e_1 + x_2e_2), A(y_1e_1 + y_2e_2) \rangle \\ &= x_1y_1\langle Ae_1, Ae_1 \rangle + (x_1y_2 + x_2y_1)\langle Ae_1, Ae_2 \rangle + x_2y_2\langle Ae_2, Ae_2 \rangle \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 = \langle x, y \rangle.\end{aligned}$$

La dernière relation découle de la précédente et de la définition de la transposée

$$\langle x, y \rangle = \langle Ax, Ay \rangle = \langle {}^tA Ax, y \rangle;$$

cette relation étant vraie pour tout x et y on en déduit ${}^tA A = \text{Id}$. □

On en déduit les deux propriétés suivantes des matrices orthogonales ${}^tA = A^{-1}$ et $\det(A) = \pm 1$.

Proposition 1.2.2 Soit A une matrice orthogonale : il existe deux réels a et b vérifiant $a^2 + b^2 = 1$ et tels que

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{si } \det(A) = 1 \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{si } \det(A) = -1$$

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur □

On vérifie aisément que les matrices orthogonales de déterminant -1 sont toutes involutives.

Rappel :

- Un ensemble G muni d'une loi de composition interne $*$ est un groupe si
 - la loi $*$ est associative $a * (b * c) = (a * b) * c \quad \forall a, b, c \in G$
 - il existe un élément (neutre) e tel que $a * e = e * a = a \quad \forall a \in G$
 - tout élément $a \in G$ possède un inverse (ou opposé) $\tilde{a}$ tel que $a * \tilde{a} = \tilde{a} * a = e$.
- Soit $(G, *)$ un groupe ; une partie $H \subset G$ est une sous-groupe de G si et seulement si H muni de la restriction de $*$ est lui-même un groupe. En particulier H est un sous-groupe si et seulement si
 - H est non vide,
 - $\forall x, y \in H, x * y \in H,$
 - $\forall x \in H, \tilde{x} \in H.$
- Soient $(G, *)$ et $(H, \otimes)$ deux groupes ; une application $\varphi : G \longrightarrow H$ est un homomorphisme si et seulement si $\forall x, y \in G, \varphi(x) \otimes \varphi(y) = \varphi(x * y).$

Proposition 1.2.3 Les matrices orthogonales forment un groupe pour la multiplication des matrices appelé $O_2(\mathbb{R})$ ou $O(2)$; les matrices orthogonales de déterminant 1 forment un sous-groupe du groupe orthogonal, noté $SO(2)$, appelé groupe spécial orthogonal ou groupe des matrices orthogonales directes, ou groupe des rotations vectorielles.

La propriété suivante, qui ne se généralise pas en dimension supérieure, est fort importante

Proposition 1.2.4 Le groupe $SO(2)$ est commutatif.

DÉMONSTRATION : Vérification immédiate. □

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 ; il est naturellement muni d'une structure de groupe pour la multiplication des complexes.

Théorème 1 L'application φ de $SO(2)$ dans $\mathbb{U}$ qui à une matrice $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ associe $z = a + ib$ est un isomorphisme de groupe.

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur. □

1.3 Angle de vecteurs unitaires

Le but de cette section est de montrer qu'il est tout à fait possible de définir l'angle de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ de façon naturelle et utilisable, sans se poser le problème de définir la mesure des angles. De fait en géométrie on a rarement besoin de mesurer les angles, c'est plutôt du domaine de l'analyse ..., ou du dessin industriel!

Proposition 1.3.1 *Soient u et v deux vecteurs unitaires ; il existe une unique matrice $A \in SO(2)$ telle que $Au = v$.*

On appellera A l'angle de u et v et on le notera (u, v) ou encore $(\widehat{u, v})$.

De même à une matrice de $SO(2)$ est associée un angle.

Les coefficients a et b de la matrice A sont appelés Cos et Sin de l'angle (u, v) .

Remarque : On peut généraliser en prenant comme définition de l'angle de deux vecteurs u et v non nuls, l'angle des vecteurs unitaires $\frac{u}{\|u\|}$ et $\frac{v}{\|v\|}$.

Proposition 1.3.2 *On a :*

$$\begin{aligned}(Ru, Rv) &= (u, v) \quad \forall R \in SO(2), \\(Su, Sv) &= (v, u) \quad \forall S \in O(2), \det(S) = -1 \\u.v &= \|u\| \|v\| \cos(u, v).\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur □

On peut remarquer que $\cos(u, v) = \text{trace}(A)$ est invariant par un changement de base, et que $\det(u, v) = \sin(u, v)$.

La somme de deux angles est définie comme l'angle associé au produit des matrices correspondantes.

Proposition 1.3.3 (Relation de Chasles) *Soient u, v, w trois vecteurs. On a alors*

$$(u, v) + (v, w) = (u, w).$$

DÉMONSTRATION : Soit R la rotation telle que $Ru = v$, R' la rotation telle que $R'v = w$; par définition, grâce à la commutativité, $(u, v) + (v, w)$ est la rotation $T = R \circ R'$ telle que $Tu = w$. □

L'élément neutre pour l'addition des angles, associé avec Id, est appelé l'angle nul : c'est l'angle entre un vecteur et lui-même, noté ω .

Corollaire 1.3.4 *On a : $(v, u) = -(u, v)$ où $-(u, v)$ désigne l'opposé de (u, v) .*

L'angle associé à $-\text{Id}$ est appelé angle plat, noté ϖ . On a les propriétés suivantes dont les démonstrations sont aisées

$$\begin{aligned}\varpi + \varpi &= \omega \\ \varpi &= -\varpi \\ (u, -v) &= (-u, v) = (u, v) + \varpi \\ (-u, -v) &= (u, v)\end{aligned}$$

On peut définir deux angles droits $\delta_+ = (e_1, e_2)$ et $\delta_- = (e_2, e_1)$ qui ont les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}\delta_+ + \delta_- &= \omega \\ \delta_+ + \delta_+ &= \delta_- + \delta_- = \varpi \\ u.v = 0 &\iff (u, v) \in \{\delta_+, \delta_-\}.\end{aligned}$$

1.4 Mesure des angles

Comme le constaterez par la suite, on peut faire de la géométrie en n'utilisant que les définitions précédentes, sans mesurer les angles. Pour être tout à fait complet, nous allons définir rigoureusement la mesure des angles.

Théorème 2 *L'application $\theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\theta} \in U$ est un homomorphisme de groupe. Son noyau est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$, noté $2\pi\mathbb{Z}$.*

DÉMONSTRATION : Pour démontrer que c'est un homomorphisme, voir cours de DEUG, ou un livre de fonctions analytiques, par exemple HENRI CARTAN *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes* Hermann (1961) pages 28-34. Le noyau de cet homomorphisme n'est pas réduit à $\{0\}$ car $\mathbb{U}$ est compact et pas $\mathbb{R}$, c'est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ qui ne peut être dense (sinon $e^{i\theta}$ serait constante), c'est donc un sous-groupe discret de la forme $a\mathbb{Z}$: traditionnellement on pose $\pi = a/2$.

En posant $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ on définit deux fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont dérivables car l'exponentielle est holomorphe ; en particulier

$$\begin{aligned}e^{i\theta} &= ie^{i\theta} = -\sin \theta + i \cos \theta \\ &= \frac{d}{d\theta} \cos \theta + i \frac{d}{d\theta} \sin \theta\end{aligned}$$

donc $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$. Il est très facile d'en déduire l'étude et les variations des fonctions circulaires ; on peut à partir de cette étude définir π comme le double du premier zéro de la fonction cosinus et retrouver la périodicité de ces fonctions.

1.5 Exercices

1. a) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E vérifiant $f \circ f = \text{Id}$. Soient $E_1 = \text{Ker}(f - \text{Id})$ et $E_2 = \text{Ker}(f + \text{Id})$; montrer que E_1 et E_2 sont supplémentaires. Montrer que si $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, alors $f(x) = x_1 - x_2$. On dit que f est la symétrie (vectorielle) autour de E_1 de direction E_2 .

b) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E vérifiant $f \circ f = f$. Montrer qu'il existe deux sous-espaces supplémentaires E_1 et E_2 tels que si $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, alors $f(x) = x_1$. On dit que f est la projection (vectorielle) sur E_1 de direction E_2 .

c) Montrer que si p est une projection, alors $f = 2p - \text{Id}$ est une symétrie.

2. Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices

$$R = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Pour la matrice S on pourra poser $a = \cos(2\alpha)$, $b = \sin(2\alpha)$ et faire le lien avec l'exercice précédent.

3. a) Soit $(G, *)$ un groupe; montrer que l'ensemble des $x \in G$ vérifiant $\forall y \in G, x * y = y * x$ est un sous-groupe de G ; il est appelé centre de G .

b) Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$. A quelle condition la matrice $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ commute-t-elle avec la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?

c) Déterminer le centre du groupe $O(2)$.

4. a) Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on pose $A(\theta) = \begin{pmatrix} \text{ch}(\theta) & \text{sh}(\theta) \\ \text{sh}(\theta) & \text{ch}(\theta) \end{pmatrix}$. Montrer que l'ensemble des matrices $A(\theta)$ est muni d'une structure de groupe isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

b) Pour tout vecteur $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on définit la forme quadratique L par $L(x) = x_1^2 - x_2^2$ et la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer qu'une matrice A conserve L (i.e. $\forall x, L(Ax) = Lx$) si et seulement si

$$J = {}^t A J A \tag{1.1}$$

c) Déterminer toutes les matrices 2×2 satisfaisant (1.1).

Chapitre 2

Le plan affine euclidien. Géométrie métrique plane

2.1 Introduction

Quel titre choisir ? ou comment définir un vecteur dans le plan affine ?

- On identifie affine et vectoriel : $B - A$ est identifié avec $\overrightarrow{AB}$. (cf. A Gramain *Géométrie élémentaire*)
- On définit un vecteur par : grandeur, sens et direction. (programme actuel des Lycées et avant 1971).
- Un vecteur est une classe d'équivalence pour la relation *d'équipollence* : (programmes de 1971) deux bipoints (i.e. couples de points) (A, B) et (C, D) sont équipollents si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme. Un parallélogramme étant caractérisé par $[A, D]$ et $[B, C]$ ont même milieu, par exemple.
- On travaille à partir de coordonnées dans un repère affine ...

En résumé : soit on se donne la structure vectorielle (et donc affine associée), soit on la construit à partir de propriétés admises du plan de la feuille de papier (ou de l'espace ambiant) (c.f. *Les Eléments* d'Euclide).

Dans toute la suite, on supposera que l'on travaille sur un ensemble $\mathcal{P}$ de points muni d'une application $\mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ qui à (A, B) associe $\overrightarrow{AB}$ satisfaisant les propriétés habituelles (cf chapitre suivant). Etant donné deux points A et B , il existe un unique point I , appelé milieu de (A, B) tel que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$. En outre on définit la distance de deux points A et B , notée AB (ou $d(A, B)$) par $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$.

2.2 Droite affine

Définition 4 Soit $A \in \mathcal{P}$ et $\vec{u} \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$; on note D le sous-espace vectoriel engendré par $\vec{u}$. Par définition la droite définie par A et $\vec{u}$, notée $(A, \vec{u})$ est l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{M \mid \overrightarrow{AM} \in D\} = \{M \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}\}.$$

Un ensemble $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ est une droite affine si et seulement si il existe A et $\vec{u}$ tels que $\mathcal{D} = (A, \vec{u})$. Le sous-espace D est appelé direction de la droite, une base D est appelé un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Remarque : Soit $\mathcal{D}$ une droite affine, l'ensemble $\{\overrightarrow{AB} \mid A \in \mathcal{D}, B \in \mathcal{D}\}$ est exactement la direction de la droite.

La direction D , étant un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, est le noyau d'une forme linéaire φ : on a donc $M \in \mathcal{D} \iff \varphi(\overrightarrow{AM}) = 0$ et (en identifiant le point M avec le vecteur $\overrightarrow{OM}$), $\varphi(A) = \varphi(M)$ puisque $\overrightarrow{AM} \approx M - A$.

Définition 5 Soit $\mathcal{D}$ une droite affine de direction D noyau de la forme linéaire φ ; grâce à la structure euclidienne de $\mathbb{R}^2$ il existe (au moins) un vecteur $\vec{n}$ tel que $\varphi = \langle \cdot, \vec{n} \rangle$. Un tel vecteur est appelé vecteur normal à $\mathcal{D}$ et on a $M \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Remarque : Une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ étant de la forme $(x, y) \mapsto ax + by$ la forme générale de l'équation d'une droite affine est $ax + by + c = 0$ de vecteur normal (a, b) et de vecteur directeur $(-b, a)$.

2.3 Parallélisme, orthogonalité.

Définition 6 Deux droites affines $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont dites parallèles si et seulement si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont la même direction D .

Remarque : Le parallélisme est une relation d'équivalence. On peut donc considérer qu'une direction de droite est une classe d'équivalence pour la relation de parallélisme.

Proposition 2.3.1 Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites distinctes du plan. $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{D}'$ si et seulement si $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset$

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur. □

Remarque : Ce résultat est outrageusement faux dans un espace de dimension supérieure.

Définition 7 Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles, elle sont dites sécantes et $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ est réduit à un point.

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur □

Définition 8 Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont dites orthogonales si et seulement si leurs directions D et D' sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux. Il revient au même de dire qu'un vecteur directeur $\vec{u}$ de $\mathcal{D}$ (resp. normal à $\mathcal{D}$) est orthogonal à un vecteur directeur $\vec{u}'$ de $\mathcal{D}'$ (resp. normal à $\mathcal{D}'$).

Remarque : Deux droites affines orthogonales sont sécantes.

Proposition 2.3.2 (Théorème de Pythagore) Soient A, B, C trois points distincts du plan. Les droites (AB) et (AC) sont orthogonales si et seulement si on a : $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur.

Définition 9 Soit $\mathcal{D}$ une droite affine. Pour tout $M \in \mathcal{P}$ il existe une unique droite δ contenant M et orthogonale à $\mathcal{D}$; δ rencontre $\mathcal{D}$ en un point H appelé projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. L'application p qui à M associe H est appelée projection orthogonale sur $\mathcal{D}$.

Avec les notations précédentes, on peut montrer facilement que si M et N sont deux points, alors $\overrightarrow{p(M)p(N)}$ est l'image de $\overrightarrow{MN}$ par la projection (vectorielle) sur D de direction $D^\perp$.

Rappel : un projecteur d'un espace vectoriel E est une application linéaire p de E dans lui-même vérifiant $p \circ p = p$. En écrivant $\vec{x} = (\vec{x} - p(\vec{x})) + p(\vec{x})$ on voit immédiatement que le noyau et l'image de p sont supplémentaires.

Proposition 2.3.3 Soit $\mathcal{D}$ une droite affine, M un point de $\mathcal{P}$ et H son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$. Le point H réalise le minimum strict de la distance de M à $\mathcal{D}$, c'est-à-dire :

$$\forall P \in \mathcal{D}, P \neq H, \quad d(M, H) < d(M, P).$$

2.4 Translations, rotations, symétries.

Définition 10 Soit $\vec{u}$ un vecteur donné. On appelle translation de vecteur $\vec{u}$, notée $t_{\vec{u}}$, l'application qui à un point M associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Proposition 2.4.1 L'ensemble des translations, muni de la loi de composition des applications, possède une structure de groupe commutatif isomorphe à $(\mathbb{R}^2, +)$.

DÉMONSTRATION : évidente : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u} + \vec{v}}$. □

Remarque : Les translations permettent donc de retrouver la structure vectorielle associée au plan : si on définit un vecteur $\vec{u}$ comme classe d'équipollence, la translation de vecteur $\vec{u}$ (dont un représentant est le bipoint (A, B)) est définie comme l'application qui à M associe M' tel que $MM'BA$ est un parallélogramme.

Définition 11 Soit θ un angle (resp. un réel), Ω un point. La rotation de centre Ω et d'angle θ est la transformation qui à M associe M' tel que $\overrightarrow{AM'} = \theta \overrightarrow{AM}$ (resp. $\overrightarrow{AM'} = R \cdot \overrightarrow{AM}$ où R est la matrice $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$).

Définition 12 Soit $\mathcal{D}$ une droite. On appelle symétrie orthogonale autour de $\mathcal{D}$, l'application $s_{\mathcal{D}}$ qui à M associe M' tel que le milieu de (M, M') est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

Proposition 2.4.2 Soient A et B deux points de $\mathcal{P}$, I le milieu de (A, B) . On a, pour tout point $M \in \mathcal{P}$

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}.$$

DÉMONSTRATION : On a :

$$\begin{aligned} MA^2 - MB^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= MI^2 + IA^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} - (MI^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB}) \\ &= 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}. \end{aligned}$$

compte tenu que $IA = IB$ et $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}$. □

Définition 13 Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{P}$. L'ensemble des points M tels que $MA = MB$ est une droite passant par I milieu de (A, B) et orthogonale à (AB) appelée médiatrice de (A, B) .

DÉMONSTRATION : : immédiate compte tenu de la Proposition précédente. □

Remarque : La médiatrice de (A, B) est l'axe de l'unique symétrie qui échange A et B .

Définition 14 Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites sécantes. Il existe deux droites Δ et Δ' telle que la symétrie orthogonale autour de Δ (resp. Δ') échange $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Les droites Δ et Δ' sont appelées bissectrices de $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$; en outre elles sont orthogonales.

2.5 Angles, triangles, cercles, cocyclicité.

On rappelle que l'angle de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls est l'angle des vecteurs $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.

Définition 15 La figure formée par trois points distincts A, B, C est appelée triangle ABC . Les points A, B, C sont les sommets du triangle, les segments BC, CA, AB sont les côtés du triangle. Traditionnellement on note a (resp. b, c) les longueurs des côtés BC (resp. CA, AB), et $\hat{A}$ (resp. $\hat{B}$ et $\hat{C}$) la mesure principale (appartenant à $] -\pi, \pi[$) de l'angle $(\vec{AB}, \vec{AC})$ (resp. $(\vec{BC}, \vec{BA}), (\vec{CA}, \vec{CB})$). Si les points A, B et C sont alignés, le triangle est dit aplati.

Remarque : Dans de nombreuses situations, on confond le côté $[AB]$ du triangle avec son support la droite affine (AB) .

Proposition 2.5.1 Soit ABC un triangle non aplati; on a $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pm\pi$.

En outre $\hat{A}, \hat{B}$ et $\hat{C}$ sont de même signe; si ce signe est positif, le triangle est dit direct sinon il est dit indirect.

DÉMONSTRATION : La première relation résulte de $(u, v) = (-u, -v)$ et de la relation Chasles

$$\begin{aligned} (\vec{AB}, \vec{AC}) + (\vec{CA}, \vec{CB}) + (\vec{BC}, \vec{BA}) &= (\vec{AB}, \vec{AC}) + (\vec{AC}, \vec{BC}) + (\vec{BC}, \vec{BA}) \\ &= (\vec{AB}, \vec{BA}) = \pi \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

Comme $-3\pi < \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 3\pi$ on obtient la relation annoncée.

Par une rotation, qui conserve les angles, on peut supposer que $\vec{BC} = (a, 0)$ avec $a > 0$. La rotation d'angle $(\vec{BC}, \vec{BA})$ transforme le vecteur unitaire $\frac{\vec{BC}}{\|\vec{BC}\|} = e_1$ en le vecteur unitaire $\frac{\vec{BA}}{\|\vec{BA}\|}$: les composantes du vecteur $\vec{BA}$ sont donc $(c \cos \hat{B}, c \sin \hat{B})$. De même la rotation d'angle $-\hat{C}$ transforme $\frac{\vec{CB}}{\|\vec{CB}\|} = -e_1$ en $\frac{\vec{CA}}{\|\vec{CA}\|}$, d'où $\vec{CA} = (-b \cos \hat{C}, b \sin \hat{C})$. On a donc, en calculant l'ordonnée du point A , $c \sin \hat{B} = b \sin \hat{C}$, ce qui montre que $\hat{B}$ et $\hat{C}$ ont même signe. On conclut en échangeant les rôles joués par les sommets $\square$

Remarque : Le triangle est *direct* si et seulement si l'ordonnée de A est positive.

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites affines et $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. On appelle *angle des droites* $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ les rotations $R \in SO(2)$ telle que $R\vec{u}$ appartienne à la direction $\mathcal{D}'$ et *mesure de l'angle* la mesure d'une telle rotation. On peut considérer qu'un angle de droites est l'ensemble $\{R, R + \varpi\}$ ou encore que l'ensemble des angles de droites est le groupe $SO(2)$ quotienté par le sous-groupe $\{\text{Id}, -\text{Id}\}$.

En tout état de cause la mesure d'un angle de droites est définie modulo π .

Remarque : Il s'agit, comme pour les vecteurs, d'angles *orientés* : l'angle $(\mathcal{D}', \mathcal{D})$ est l'opposé de l'angle $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$.

On peut facilement montrer que la relation de Chasles reste vraie pour la mesure des angles de droites, à condition de la considérer modulo π .

Définition 16 Soit $\omega \in \mathcal{P}$ et $r \in \mathbb{R}$. On appelle *cercle de centre ω et de rayon r* l'ensemble des points $\{M \in \mathcal{P} \mid \omega M = r\}$.

Remarque : Si r est strictement négatif l'ensemble est vide!; si r est nul l'ensemble est réduit au point ω .

Théorème 3 Soient A, B, C trois points non alignés du plan. Il existe un unique cercle contenant les points A, B et C . Si on désigne son centre par ω on a

$$(\vec{\omega A}, \vec{\omega B}) = 2(\vec{CA}, \vec{CB}) \pmod{2\pi}.$$

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur. □

Remarque : Le cercle ci-dessus est appelé cercle *circonscrit* au triangle ABC .

Corollaire 2.5.2 *Pour que quatre points A, B, C, D du plan soient alignés ou cocycliques (i.e appartiennent à un même cercle) il faut et il suffit que l'on ait la relation (entre angles de droites)*

$$(CA, CB) = (DA, DB) \pmod{\pi}.$$

Remarque : En échangeant les rôles joués par A, B, C et D on peut obtenir six relations similaires .

DÉMONSTRATION : laissée en exercice. □

2.6 Isométries du plan.

Définition 17 *On appelle isométrie de $\mathcal{P}$, toute transformation $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ qui conserve les distances, c'est-à-dire que pour tout couple de points $(A, B) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ on a $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$.*

Par exemple les translations, les symétries orthogonales sont des isométries ; il est clair que le composé de deux isométries est encore une isométrie.

Théorème 4 *Toute isométrie du plan est le produit de 0, 1, 2 ou 3 symétries orthogonales.*

Remarque : Par convention un produit indexé par 0 est l'identité.

On appelle point fixe (ou point invariant) d'une transformation f un point $M \in \mathcal{P}$ tel que $f(M) = M$. La démonstration du théorème repose sur la propriété suivante

Proposition 2.6.1 *Soit f une isométrie ayant trois points fixes A, B et C non alignés ; alors f est l'application identique.*

DÉMONSTRATION : S'il existe un point M tel que $M' = f(M)$ soit distinct de M alors, le point fixe A vérifie $AM = AM'$: il appartient à la médiatrice de (M, M') . De même pour B et C , ce qui contredit l'hypothèse A, B et C non alignés.

La démonstration du Théorème est laissée au lecteur. □

Proposition 2.6.2 *Les isométries du plan, muni de la loi de composition des applications, possèdent une structure de groupe.*

DÉMONSTRATION : immédiate. □

Définition 18 *Une isométrie qui est le composé d'un nombre pair de symétries orthogonales est appelée un déplacement sinon c'est un anti-déplacement.*

Remarque : Les déplacements du plan sont donc constitués des translations et des rotations.

Proposition 2.6.3 *Les déplacements du plan forment un sous-groupe du groupe des isométries.*

DÉMONSTRATION : évidente. □

Remarque : A la différence de $SO(2)$ le groupe des déplacements n'est pas commutatif.

Exercice : Etudier les anti-déplacements du plan.

2.7 Exercices

1. Certains mathématiciens aiment bien distinguer les propriétés affines (i.e. qui ne font pas intervenir le produit scalaire) des propriétés métriques. Par exemple : le parallélisme est une propriété affine, l'orthogonalité est une propriété métrique. Dans ce chapitre, classer les définitions et propriétés selon qu'elles sont affines ou non.

2. a) Dans le plan rapporté à un repère quelconque $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points $M(x, y)$, $M'(x', y')$ et $M''(x'', y'')$. Démontrer que, pour que ces points soient alignés, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

b) Soient D , D' et D'' les droites d'équations respectives

$$\begin{aligned} ux + vy + w &= 0, \\ u'x + v'y + w' &= 0, \\ u''x + v''y + w'' &= 0. \end{aligned}$$

Démontrer que ces trois droites sont parallèles ou concourantes si et seulement si

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix} = 0.$$

3. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points $A(0, a)$, $B(b, 0)$ et $C(c, 0)$. Déterminer les équations des trois hauteurs du triangle et vérifier qu'elles sont concourantes : on précisera les coordonnées du point de concours (orthocentre du triangle).

4. Soit ABC un triangle rectangle en A ; on note $\hat{B}$ l'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$. Démontrer les relations

$$BA = BC \cos(\hat{B}) \quad \text{et} \quad AC = BC |\sin(\hat{B})|.$$

Chapitre 3

Espaces affines, barycentres.

3.1 Introduction

Il y a deux façons de considérer un espace affine

- c'est simplement un espace vectoriel où on identifie $\overrightarrow{AB}$ avec $B - A$. Certains auteurs considèrent que c'est le point de vue naturel et qu'introduire de la notion d'espace affine est inutile ...
- on définit une nouvelle structure abstraite associée à un espace vectoriel. C'est le point de vue adopté dans les programmes actuels des concours et ceux de lycées et collèges des années 70.

A mes yeux la deuxième solution présente de nombreux avantages et nous allons la développer. L'objet principal de notre étude sera les applications affines : ce sont celles qui conservent l'alignement (c'est-à-dire qui transforment 3 points alignés en 3 points alignés) et le parallélisme (deux droites parallèles sont transformées en droites parallèles) mais pas nécessairement les distances. Il existe des transformations qui conservent l'alignement mais non le parallélisme, par exemple les projections utilisées en perspective ...; elles seront dites *projectives*.

On vérifiera que les résultats du Chapitre 2 s'étendent à n'importe quel espace affine de dimension 2.

3.2 Définitions

Définition 19 Soit $\mathcal{E}$ un ensemble dont les éléments seront appelés points et E un espace-vectoriel sur $\mathbb{R}$. On dira que $\mathcal{E}$ est un espace affine associé à E (ou encore de direction E) s'il existe une application de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans E : $(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ telle que

1. Pour tout $A \in \mathcal{E}$, l'application $B \mapsto \overrightarrow{AB}$ est une bijection,
2. $\forall A, B, C \in \mathcal{E}, \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$

Si E est de dimension finie n , n est par définition la dimension de $\mathcal{E}$. Par convention un espace affine de dimension 1 (resp. 2) est appelé droite affine (resp. plan affine)

Remarque : L'ensemble vide est un espace affine dont la direction (et donc la dimension!) est indéterminée.

Le plan affine euclidien étudié au chapitre précédent est un espace affine de direction $\mathbb{R}^2$.

Remarque : Soit E un espace vectoriel ; l'application $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{v} - \vec{u}$ munit E d'une structure d'espace affine associée à lui-même.

Proposition 3.2.1 Si l'ensemble $\mathcal{E}$ est non vide, dans la propriété caractéristique 1 on peut remplacer « Pour tout A » par « Il existe ».

Pour tout point $A \in \mathcal{E}$ on a : $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

Pour tout couple de points A et B on a : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur. □

Définition 20 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à E de dimension n et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E . On appelle repère affine de $\mathcal{E}$ un $n + 1$ -uplet de points $(O, A_1, \dots, A_n)$ tel que $\forall i, 1 \leq i \leq n, \overrightarrow{OA_i} = \vec{e}_i$. Il est équivalent de dire qu'un repère affine est la donnée $(O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ d'une origine $O \in \mathcal{E}$ et d'une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E .

Les coordonnées d'un point $M \in \mathcal{E}$ par rapport au repère $(O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

Le choix d'une origine permet donc d'identifier espace affine et espace vectoriel et de calculer avec des coordonnées. Dans les paragraphes suivants, notre objectif sera de définir les notions de façon intrinsèque (i.e. indépendante de l'origine qui permet d'identifier $\mathcal{E}$ et E).

Voyons maintenant quelques définitions classiques lorsqu'on définit de nouvelles structures mathématiques.

Définition 21 Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$; on dira que $\mathcal{F}$ est un sous-espace de $\mathcal{E}$ si et seulement si

- $F = \{\overrightarrow{AB} \mid A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}\}$ est un sous-espace vectoriel de E .
- $\forall \vec{u} \in F, \forall A \in \mathcal{F}, \exists B \in \mathcal{F}, \overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

La condition ci-dessus est la condition minimale pour que la restriction de $(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ à $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ vérifie les propriétés caractéristiques 1 et 2. On peut donc en conclure que $\mathcal{F}$ est lui-même un espace affine de direction F . Un point est donc un sous-espace de dimension 0, de direction $\overrightarrow{0}$.

Définition 22 Soit F un sous-espace de E , $O \in \mathcal{E}$; on appelle sous-espace de direction F passant par O l'ensemble $\mathcal{V}(O, F) = \{M \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{OM} \in F\}$.

Remarque : Un sous-espace affine est parfois appelé une *variété affine* d'où la notation ci-dessus.

Proposition 3.2.2 $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine si et seulement s'il est de la forme $\mathcal{V}(O, F)$.

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur. □

Corollaire 3.2.3 Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$; il existe une unique droite (affine) contenant A et B qui est définie par $\mathcal{V}(A, D)$ où D est la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{AB}$.

Proposition 3.2.4 Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ de directions respectives F et F' ; l'intersection $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ ayant pour direction $F \cap F'$.

Remarque : Cette intersection peut très bien être vide !

Il est facile de voir que l'intersection de deux droites affines (resp. d'un plan et d'une droite) est soit vide, soit un point, soit une droite.

Définition 23 Soit $\mathcal{D}$ une droite affine de $\mathcal{E}$ rapportée au repère $(O; \vec{u})$, A et B deux points de $\mathcal{D}$. On appelle mesure algébrique de AB , noté $\overline{AB}$ le réel défini par $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\vec{u}$.

Proposition 3.2.5 Si A, B, C, D sont quatre points distincts d'une droite affine $\mathcal{D}$, le rapport $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ est indépendant du repère affine choisi pour faire le calcul.

DÉMONSTRATION : Immédiate. □

3.3 Barycentres

Définition 24 Soient $A_1, \dots, A_n$ n points de $\mathcal{E}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ n réels. On appelle fonction vectorielle de Leibniz associée aux points massifs (A_i, λ_i) l'application $\phi : \mathcal{E} \longrightarrow E$ définie par

$$\phi : M \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$$

Remarque : Si $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ alors ϕ est une fonction constante.

Définition 25 Soient $A_1, \dots, A_n$ n points de $\mathcal{E}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ n réels. Si $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$, on appelle barycentre des points massifs (A_i, λ_i) l'unique point G tel que $\phi(G) = \vec{0}$ où ϕ est la fonction vectorielle de Leibniz associée.

DÉMONSTRATION : Laisée au lecteur. □

Remarque : G est barycentre des (A_i, λ_i) si et seulement si

$$\forall M \quad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \overrightarrow{MG} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$$

La notion de barycentre permet de définir les propriétés des espaces affines de la même façon que la notion de combinaison linéaire est la base de l'étude des espaces vectoriels.

Proposition 3.3.1 Le barycentre M de (A, λ) , (B, μ) appartient à la droite (AB) . C'est le point qui divise le segment $[AB]$ dans le rapport $\frac{\mu}{\lambda + \mu}$, c'est-à-dire que

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

La droite (AB) est l'ensemble des barycentres de A et B , le segment $[AB]$ est l'ensemble des barycentres de A et B affectés de coefficients positifs.

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur. □

Proposition 3.3.2 Le barycentre des (A_i, λ_i) est indépendant de l'ordre des points massifs considérés. Le barycentre des (A_i, λ_i) est inchangé si on multiplie tous les λ_i par un même coefficient non nul; en particulier on peut toujours supposer que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Soit G le barycentre de n points massifs (A_i, λ_i) et $1 < k < n$ un indice tel que $m = \sum_{i=1}^k \lambda_i \neq 0$ et G' le barycentre des (A_i, λ_i) , $1 \leq i \leq k$. Alors G est le barycentre des points (G', m) , $(A_{k+1}, \lambda_{k+1}), \dots, (A_n, \lambda_n)$.

Remarque : Si on sait construire le barycentre de deux points, on sait construire le barycentre de n points.

On appelle *isobarycentre* de n points le barycentre de ces points affectés tous du coefficient 1. Par exemple l'isobarycentre de deux points est le milieu du bipoint, l'isobarycentre de 3 points A, B, C est le point G situé au tiers de chaque médiane du triangle ABC .

Définition 26 Soit $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$. Pour tout point $M \in \mathcal{E}$ il existe un unique $n + 1$ -uplet $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ avec $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ tel que M soit le barycentre des (A_i, λ_i) . Le $n + 1$ -uplet $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ est appelé coordonnées barycentriques du point M par rapport au repère.

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur. □

Remarque : Par abus de langage on parle parfois de coordonnées barycentriques même si $\sum_{i=0}^n \lambda_i \neq 1$.

Proposition 3.3.3 Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$. $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine si et seulement si il est stable pour le barycentre (i.e. il contient le barycentre de n'importe quelle famille de ses points).

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur.

Définition 27 Soient $A_1, \dots, A_k$ des points de $\mathcal{E}$. On appelle sous-espace engendré par les A_i le plus petit (au sens de la relation d'ordre inclusion) sous-espace affine contenant les A_i , c'est-à-dire l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant les A_i .

Proposition 3.3.4 Les sous-espace affine engendré par les A_k est l'ensemble des barycentres des A_k affectés de coefficients convenables.

Définition 28 On dit que $k + 1$ points A_i sont affinement indépendants si le sous-espace qu'ils engendrent est de dimension k .

Par exemple : trois points non alignés sont affinement indépendants. Des points affinement indépendants forment un repère du sous-espace qu'ils engendrent.

En généralisant ce qui a été dit pour les droites, deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont dits *parallèles* si et seulement si ils sont associés au même sous-espace vectoriel F (i.e. ils ont même direction). On démontre aisément que le parallélisme est une relation d'équivalence, une classe d'équivalence étant identifiée avec la direction (commune).

3.4 Cas du plan

Soit (A, B, C) un repère affine, M un point du plan. Le raisonnement suivant, montre aussi l'existence de coordonnées barycentriques en utilisant la Proposition 3.3.1.

Si (AM) est parallèle à (BC) , alors il existe un réel λ tel que M soit barycentre de $(A, 1)$, (B, λ) , $(C, -\lambda)$. Sinon (AM) est sécante avec (BC) en A' , il existe deux réels β et γ tels que A' soit barycentre de (B, β) et (C, γ) . Il existe α tel que M soit barycentre de (A, α) et $(A', \beta + \gamma)$. On peut en conclure que M est barycentre de (A, α) , (B, β) et (C, γ) .

Proposition 3.4.1 Réciproquement, soit M le barycentre de (A, α) , (B, β) et (C, γ) . On suppose que (AM) rencontre (BC) en un point A' . Alors A' est barycentre de (B, β) et (C, γ) .

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur. □

Théorème 5 (Théorème de Ceva) Soient A, B, C trois points non alignés, $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$. On suppose les six points distincts deux à deux. Pour que les droites (AA') , (BB') et (CC') soient concourantes ou parallèles, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$

DÉMONSTRATION : Lorsque (AA') , (BB') sont parallèles, il faut utiliser le Théorème de Thalès ou des homothéties (c.f. chapitre suivant).

Dans le cas où (AA') et (BB') sont sécantes en un point M , on utilise la Proposition précédente. $\square$

APPLICATION : les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé *orthocentre* du triangle.

Théorème 6 (Théorème de Ménélaüs) Soient A, B, C trois points non alignés, P, Q et R des points situés respectivement sur les droites (BC) , (CA) et (AB) et distincts des points A, B et C . Les points P, Q et R sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$$

DÉMONSTRATION : laissée en exercice. $\square$

3.5 Exercices

1. Parallélisme

a) Montrer que deux sous espaces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ parallèles sont soit disjoints (i.e. d'intersection vide) soit confondus.

b) Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux sous espaces parallèles de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{D}$ un sous-espace affine tel que $\mathcal{H} = \mathcal{D} \cap \mathcal{F}$ soit non vide. Montrer que $\mathcal{D} \cap \mathcal{F}'$ est un sous-espace non vide parallèle à $\mathcal{H}$.

2. Soient P et Q deux sous-espaces vectoriels de E , $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ de directions respectives P et Q .

a) On suppose P et Q supplémentaires; montrer que l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est réduite à un point.

b) Plus généralement, si $F + G = E$ montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ est non vide.

3. La fonction scalaire de Leibniz.

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel euclidien E . On se donne n points massifs (A_i, λ_i) et on définit la fonction scalaire de Leibniz associée à ces points par $f : M \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i MA_i^2$.

a) On suppose que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$. Montrer la relation $f(M) = f(M') + 2\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u}$ où u est un vecteur constant.

b) On suppose que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$ et on note G le barycentre des (A_i, λ_i) . Montrer la relation $f(M) = f(G) + \sum_{i=1}^n \lambda_i MG^2$.

c) Discuter la nature des lignes de niveaux de l'application f .

d) Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A avec $AB = AC = 3d$. Quel est l'ensemble des points M du plan vérifiant $4MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = -36d^2$?

4. Coordonnées barycentriques et aires planes.

a) Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien et (A, B, C) un repère affine de $\mathcal{E}$. Soit M un point quelconque du plan, montrer la relation

$$\overrightarrow{MA} \det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) + \overrightarrow{MB} \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) + \overrightarrow{MC} \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \vec{0}.$$

b) En déduire que si M est intérieur au triangle ABC alors il est barycentre de A, B, C affectés des coefficients respectifs $\alpha = \text{aire}(MBC)$, $\beta = \text{aire}(MCA)$ et $\gamma = \text{aire}(MAB)$. Pourquoi précise-t-on « intérieur au triangle »?

c) Montrer que les bissectrices de $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont concourantes en un point I équidistant des côtés du

triangle et centre d'un cercle (ω) tangent aux trois côtés du triangle. Dédurre des questions précédentes que I est barycentre de (A, a) , (B, b) et (C, c) .

d) Coordonnées barycentriques de l'orthocentre (point de concours des hauteurs) de ABC ?

5. La division harmonique

a) Soient A et B deux points distincts d'un plan affine euclidien et $k > 0$, $k \neq 1$. Démontrer que l'ensemble des points M tels que $MA = kMB$ est un cercle (C) dont le centre J est barycentre de $(A, 1)$ et $(B, -k^2)$. (On pourra utiliser une fonction scalaire de Leibniz).

b) En déduire qu'il existe deux points C et D appartenant à la droite (AB) tels que $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}$.

On dit alors que le couple (C, D) divise harmoniquement le segment $[AB]$ ou encore que les quatre points $(ABCD)$ forment une *division harmonique*.

c) Montrer que si $(ABCD)$ est harmonique alors $(CDAB)$ est harmonique.

d) On choisit un repère $(O, \vec{u})$ sur (AB) et on note $a = \overrightarrow{OA}$, $b = \overrightarrow{OB}$, $c = \overrightarrow{OC}$ et $d = \overrightarrow{OD}$. Montrer la relation

$$(a + b)(c + d) = 2(ab + cd)$$

En déduire que les relations suivantes caractérisent une division harmonique (on rappelle que J est le milieu de (C, D)) :

$$\frac{2}{\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{\overrightarrow{AC}} + \frac{1}{\overrightarrow{AD}} \quad JC^2 = JD^2 = \overrightarrow{JA} \overrightarrow{JB} \quad \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \overrightarrow{AJ}$$

6. D'après examen partiel décembre 1996

Soit (A, B, C) un repère affine du plan $\mathcal{P}$ et $M \in \mathcal{P}$ un point.

a) Rappeler la relation entre les coordonnées x_1 et x_2 de $\overrightarrow{CM}$ dans la base $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ et les coordonnées barycentriques $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de M .

b) Montrer que x_1 et x_2 satisfont une relation de la forme $u'x_1 + v'x_2 + w' = 0$ si et seulement si $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ satisfont une relation de la forme $u\lambda_1 + v\lambda_2 + w\lambda_3 = 0$. On déterminera (u, v, w) en fonction de (u', v', w') ; à quelle condition sur u, v, w a-t-on u', v', w' non tous nuls?

c) Soient M, N, P trois points de coordonnées barycentriques respectives $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, (μ_1, μ_2, μ_3) , (ν_1, ν_2, ν_3) . Montrer que M, N, P sont alignés si et seulement si le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{vmatrix} = 0.$$

d) Démontrer que M appartient à (BC) si et seulement si $\lambda_1 = 0$.

e) On suppose que $M \in (BC)$, $N \in (CA)$ et $P \in (AB)$. Ecrire la condition d'alignement des points M, N, P . Exprimer cette condition à l'aide des rapports $\overrightarrow{MB}/\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC}/\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{PA}/\overrightarrow{PB}$ lorsque M, N, P sont distincts des points A, B ou C .

Chapitre 4

Applications affines

4.1 Définitions

Dans tout ce chapitre, $\mathcal{E}$ désigne un espace affine associé au $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E .

Définition 29 Une application $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est dite affine s'il existe une application linéaire $\varphi : E \longrightarrow E$ telle que

$$\forall (M, N) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}, \quad \overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi(\overrightarrow{MN}).$$

Remarque : Cette définition se généralise immédiatement à une application entre deux espaces affines $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$.

Si on a choisi une origine $O \in \mathcal{E}$ et si $f(O) = O$ on dit parfois que f est linéaire.

On rappelle que si $\vec{u}$ est un vecteur donné de E , la translation de vecteur $\vec{u}$, notée t_u est l'application qui à un point M associe le point M' défini par $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

Proposition 4.1.1 Les translations sont des applications affines associées à l'identité.

DÉMONSTRATION : Soit t la translation de vecteur $\vec{u}$; on a

$$\overrightarrow{t(M)t(N)} = \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'} = -\vec{u} + \overrightarrow{MN} + \vec{u} = \overrightarrow{MN}.$$

Remarque : Il convient de remarquer que plusieurs applications affines peuvent être associées à la même application linéaire.

Proposition 4.1.2 Soient A et A' deux points de $\mathcal{E}$ (pas nécessairement distincts) et φ un endomorphisme de E . L'application f qui au point M associe le point M' défini par $\overrightarrow{A'M'} = \varphi(\overrightarrow{AM})$ est une application affine associée à φ .

DÉMONSTRATION : Soient $M' = f(M)$ et $N' = f(N)$; on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M'N'} &= \overrightarrow{M'A'} + \overrightarrow{A'N'} = \overrightarrow{A'N'} - \overrightarrow{A'M'} \\ &= \varphi(\overrightarrow{AN}) - \varphi(\overrightarrow{AM}) \quad \text{définition de } f \\ &= \varphi(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}) \quad \text{linéarité de } \varphi \\ &= \varphi(\overrightarrow{MN}). \end{aligned}$$

Proposition 4.1.3 Soit f affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ associée à φ . Il y a équivalence entre « f est bijective » et « φ est bijective ».

DÉMONSTRATION : Fixons un point A et soit $A' = f(A)$.

Supposons f bijective et soit $\vec{v} \in E$. ; il existe un unique point B' tel que $\overrightarrow{A'B'} = \vec{v}$ et un unique point B tel que $f(B) = B'$ puisque f est bijective : en posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ on a par définition $\varphi(\vec{u}) = \vec{v}$ donc φ est surjective. On montrerait de façon analogue que φ est injective.

Supposons φ bijective. Soit $B' \in \mathcal{E}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{A'B'}$; il existe un unique vecteur $\vec{u}$ tel que $\varphi(\vec{u}) = \vec{v}$. En définissant B par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ on obtient immédiatement $f(B) = B'$ donc f est surjective. Supposons que $f(B) = f(C) = B'$ donné. On a alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'C'} = \varphi(\overrightarrow{AB}) = \varphi(\overrightarrow{AC})$ et comme φ est injective $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ c'est-à-dire $B = C$, donc f est injective. $\square$

Proposition 4.1.4 Soient f et g deux applications affines associées à φ et ψ . Alors $g \circ f$ est affine associée à l'application linéaire $\psi \circ \varphi$.

DÉMONSTRATION : Immédiate :

$$\overrightarrow{g \circ f(M)g \circ f(N)} = \overrightarrow{g(f(M))g(f(N))} = \psi(\overrightarrow{f(M)f(N)}) = \psi(\varphi(\overrightarrow{MN})) = \psi \circ \varphi(\overrightarrow{MN}).$$

Proposition 4.1.5 L'ensemble des applications affines de $\mathcal{E}$ dans lui-même est muni d'une structure de groupe pour la loi $\circ$, appelé groupe affine.

DÉMONSTRATION : Immédiate. $\square$

Théorème 7 Une application f de $\mathcal{E}$ dans lui-même est affine si et seulement si elle conserve le barycentre, c'est-à-dire que pour n'importe quelle famille de points massifs (A_i, λ_i) le barycentre des $(f(A_i), \lambda_i)$ est l'image par f du barycentre G des (A_i, λ_i) .

DÉMONSTRATION : Si f est affine associée à φ alors

$$\varphi(\sum \lambda_i \overrightarrow{GA_i}) = \varphi(\vec{0}) = \vec{0} = \sum \lambda_i \overrightarrow{f(G)f(A_i)}$$

ce qui montre la conservation du barycentre.

La réciproque sera admise : voir par exemple le livre d'ANDRÉ GRAMAIN exercice 16 page 83. $\square$

Corollaire 4.1.6 Une application affine est entièrement déterminée par l'image d'un repère affine

Corollaire 4.1.7 Une application affine conserve l'alignement : elle transforme des points alignés en points alignés.

Proposition 4.1.8 Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction F . L'image de $\mathcal{F}$ par une application affine f est un sous-espace affine ayant pour direction $\varphi(F)$.

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur $\square$

Corollaire 4.1.9 Une application affine conserve le parallélisme, c'est-à-dire transforme deux sous-espaces parallèles en sous-espaces parallèles.

4.2 Groupe des homothéties-translations

Définition 30 Soit Ω un point de $\mathcal{E}$ et $k \neq 0$. On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k l'application $H(\Omega, k)$ qui à un point M associe le point M' défini par $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.

Proposition 4.2.1 On a :

- Une homothétie $H(\Omega, k)$ est une application affine associée à $k \text{Id}$.
- Une application affine associée à $k \text{Id}$ est soit une homothétie ($k \neq 1$) soit une translation.
- L'ensemble composé des homothéties et des translations de $\mathcal{E}$ est une sous-groupe du groupe affine.

DÉMONSTRATION : On a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'\Omega} + \overrightarrow{\Omega N'} = k\overrightarrow{M\Omega} + k\overrightarrow{\Omega N} = k\overrightarrow{MN}$ ce qui montre qu'une homothétie est affine.

Soient f associée à $k \text{Id}$: si $k = 1$ alors f est une translation ; sinon pour $k \neq 1$ f admet un point invariant Ω (cf. exercice) et on a alors $\overrightarrow{\Omega f(M)} = k\overrightarrow{\Omega M}$ puisque $f(\Omega) = \Omega$.

La dernière affirmation est évidente en raisonnant en terme d'applications linéaires associées. $\square$

Théorème 8 Soient A, A', B, B' quatre points tels que $A \neq B, A' \neq A, B \neq B'$. On suppose que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles : il existe une unique homothétie-translation h telle que $h(A) = A'$ et $h(B) = B'$. Si h est une homothétie de centre Ω on a alors

$$\frac{\overrightarrow{\Omega B'}}{\overrightarrow{\Omega B}} = \frac{\overrightarrow{\Omega A'}}{\overrightarrow{\Omega A}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}}$$

Toute application affine f qui transforme une droite en une droite parallèle (i.e. $f(\mathcal{D}) \parallel \mathcal{D}$) est une homothétie-translation.

Remarque : Cette dernière relation constitue le théorème de Thalès. DÉMONSTRATION : Si les quatre points sont alignés sur une droite $\mathcal{D}$, il existe une unique application affine f telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$ qui est nécessairement une homothétie-translation de $\mathcal{D}$ que l'on étend à l'espace tout entier, sinon les quatre points A, B, A', B' sont coplanaires puisque (AB) et $(A'B')$ sont parallèles. Dans ce plan les droites (AA') et (BB') sont parallèles ou sécantes en un point noté Ω .

Dans le premier cas la translation $t_{\overrightarrow{AA'}}$ convient ; en effet elle transforme (AB) en une droite parallèle à (AB) passant par A' , c'est-à-dire $(A'B')$. De plus la droite (BB') dirigée par $\overrightarrow{AA'}$ est invariante par la translation : l'image de B est donc l'intersection de $(A'B')$ et de (BB') c'est-à-dire le point B' .

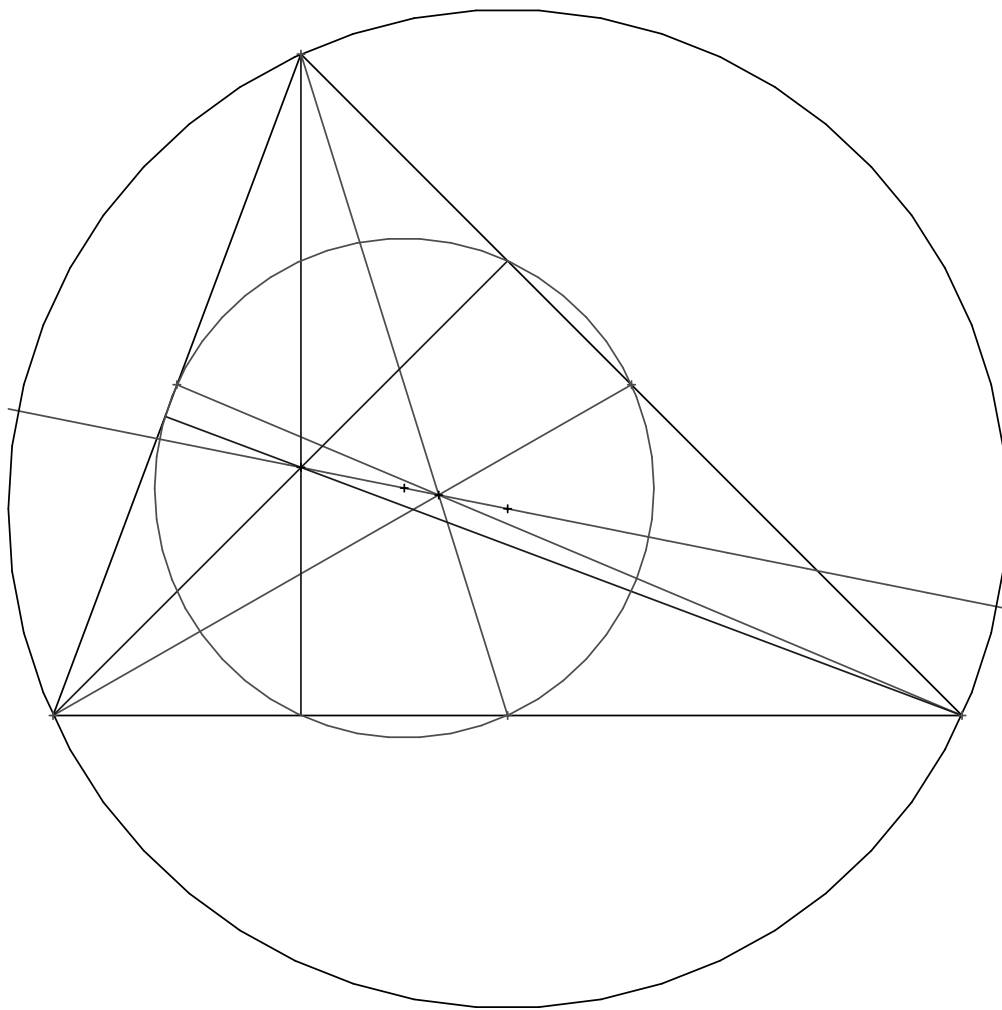
Dans le deuxième cas on considère l'homothétie de centre Ω qui transforme A en A' : le même argument montre que B' est l'image de B .

L'unicité est immédiate.

La démonstration de la dernière assertion est laissée au lecteur. $\square$

Théorème 9 (Cercle des neuf points) Soit ABC un triangle non aplati, O le centre du cercle circonscrit, H l'orthocentre, A', B' et C' les milieux respectifs des côtés BC, CA et AB et ω le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$. On a :

- Les points H, ω, G et O sont alignés sur une droite appelée droite d'Euler avec $\overrightarrow{GO} = -2\overrightarrow{G\omega}$ et $\overrightarrow{HO} = 2\overrightarrow{H\omega}$.
- Les pieds des hauteurs A_1, B_1 et C_1 , les milieux A'', B'' et C'' des 3 segments joignant l'orthocentre aux sommets, et les points A', B' et C' sont situés sur un même cercle (de centre ω) appelé cercle des neuf points ou cercle d'Euler.



DÉMONSTRATION : laissée au lecteur. □

4.3 Projections, affinités, symétries

Définition 31 Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction F et G un supplémentaire de F dans E ($E = F \oplus G$). On appelle projection sur $\mathcal{F}$ de direction G l'application qui à M associe l'unique point $M' \in \mathcal{F}$ défini par $\overrightarrow{MM'} \in G$.

Proposition 4.3.1 La projection sur $\mathcal{F}$ de direction G est une application affine (non bijective en général) associée à la projection vectorielle sur F de direction G .

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur. □

Définition 32 Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction F et G un supplémentaire de F dans E ($E = F \oplus G$). On appelle symétrie autour de $\mathcal{F}$ de direction G l'application qui à M associe le point M' avec $\overrightarrow{MM'} \in G$ et tel que le milieu de (M, M') appartient à $\mathcal{F}$.

Proposition 4.3.2 La symétrie s autour de $\mathcal{F}$ de direction G est une involution affine associée à la symétrie vectorielle autour de F de direction G .

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur. □

Remarque : Le milieu de $(M, s(M))$ est bien sûr le projeté de M sur $\mathcal{F}$ de direction G .

Définition 33 Soit $\mathcal{P}$ un plan affine, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites sécantes. On appelle affinité d'axe $\mathcal{D}$, de direction $\mathcal{D}'$ et de rapport $k \in \mathbb{R}$, l'application qui à un point M associe le point M' défini par $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$ où H est le projeté de M sur $\mathcal{D}$ de direction $\mathcal{D}'$.

Remarque :

4.4 Exercices

1. Soit f une application affine associée à φ .
 - a) Montrer que l'ensemble des points fixes de f (ou points invariants par f) est un sous-espace affine ayant pour direction $\text{Ker}(\varphi - \text{Id})$ s'il est non vide.
 - b) On suppose que $\text{Ker}(\varphi - \text{Id}) = \{\vec{0}\}$; montrer que f admet un unique point invariant.
2. Soient $H(\Omega, k)$ et $H'(\Omega', k')$ deux homothéties de centres distincts. A quelle condition $H' \circ H$ est-elle une translation, une homothétie ? Dans ce dernier cas on montrera que le centre de $H' \circ H$ est barycentre de Ω et Ω' affectés de coefficients que l'on précisera.
3. Soient (C) et (C') deux cercles de centres ω et ω' distincts et de rayon r et r' distincts.
 - a) Montrer qu'il existe exactement deux homothéties h_1 et h_2 dont on précisera le centre et le rapport telles que $h_1(C) = C'$ (resp. $h_2(C) = C'$).
 - b) Etudier le cas $r = r'$.
4. *Théorème de Desargues*
Soient A, B, C, A', B', C' six points distincts de $\mathcal{E}$; on suppose que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont non aplatis, que (AB) est parallèle à $(A'B')$, (BC) parallèle à $(B'C')$ et (CA) parallèle à $(C'A')$. Montrer que les trois droites (AA') , (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes.
5. *Théorème de Pappus*
Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites distinctes de $\mathcal{E}$, A, B, C des points de $\mathcal{D}$ et A', B', C' de $\mathcal{D}'$; on suppose les six points distincts. Si (AB') est parallèle à $(A'B)$ et $(A'C)$ est parallèle à (AC') , montrer que $(B'C)$ est parallèle à $(B'C')$.
6.
 - a) Que peut-on dire d'une affinité de rapport $k = 0$, de rapport $k = -1$?
 - b) Montrer que les affinités sont des applications affines.
 - c) Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites sécantes en Ω . Montrer que l'homothétie $H(\Omega, k)$ peut s'écrire comme le composé de deux affinités d'axes respectifs $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

4.5 Retour au chapitre précédent

Proposition 4.5.1 *Une partie $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affinesi et seulement si il est stable pour le barycentre (i.e.il contient le barycentre de n'importe quelle famille de ses points).*

DÉMONSTRATION : Soit (A_i, λ_i) des points massifs, $A_i \in \mathcal{F}$ et G leur barycentre ; fixons une origine O dans $\mathcal{F}$, $(\sum \lambda_i) \overrightarrow{OG} = \sum \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$ appartient à la direction F , donc G appartient à $\mathcal{F}$. Réciproquement soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ une partie stable pour le barycentre et $F = \{ \overrightarrow{OM} \mid M \in \mathcal{F} \}$; il faut montrer que F est un sous-espace vectoriel. Soient $\vec{u} \in F$, $\vec{v} \in F$ et $k \in \mathbb{R}$; par définition il existe $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Soit G le barycentre de (A, k) et $(O, 1 - k)$: il appartient à $\mathcal{F}$, donc le vecteur $\overrightarrow{OG}$ appartient à F , mais $\overrightarrow{OG} = k \overrightarrow{OA}$ ce qui montre que $k\vec{u}$ appartient à F et donc que F est stable pour la multiplication externe. Soit G le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 1)$: il appartient à $\mathcal{F}$, donc $\overrightarrow{OG}$ appartient à F ainsi que $2\overrightarrow{OG}$, mais $2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, donc F est stable pour l'addition. $\square$

Chapitre 5

Isométries

5.1 Groupe orthogonal

Soit E un espace vectoriel euclidien sur $\mathbb{R}$ de dimension n ; on notera $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ ou $\vec{x} \cdot \vec{y}$ le produit scalaire de deux vecteurs et $\|\vec{x}\|$ la norme associée.

Proposition 5.1.1 *Soit f un endomorphisme de E ayant pour matrice A relativement à une base orthonormée. Il y a équivalence entre*

- f conserve le produit scalaire : $\langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$.
- f conserve la norme : $\|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$.
- f transforme une base orthonormée en base orthonormée.
- Les vecteurs colonnes (resp. lignes) de A forment une base orthonormée.
- ${}^t A \cdot A = \text{Id}$

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur. □

Définition 34 *Si f (ou A) satisfait une de ces propriétés, il est dit orthogonal. On dit aussi que f est une isométrie vectorielle.*

Remarque : Si f est orthogonal on a $\det(f) = \pm 1$.

Définition 35 *Les endomorphismes orthogonaux de E sont munis d'une structure de groupe pour la loi $\circ$ appelé groupe orthogonal, noté $O(E)$ (ou $O(n)$). Les endomorphismes orthogonaux de déterminant $+1$ forment un sous-groupe de $O(E)$, noté $SO(E)$ (ou $SO(n)$) ; un élément de $SO(E)$ est dit direct ou positif.*

DÉMONSTRATION : évidente. □

Lorsqu'on considère deux bases orthonormées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E , il existe une unique application orthogonale f telle que $f(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$: on dit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont même orientation si f est directe. Autrement dit, l'image par une isométrie directe d'une base $\mathcal{B}$ est une base $\mathcal{B}'$ de même orientation. Il est facile de voir que « avoir même orientation » est une relation d'équivalence qui ne possède que deux classes. Ce qui conduit à la définition suivante

Définition 36 *Orienter E c'est choisir une de ces deux classes : les bases de cette classe seront dites positives ou directes.*

Remarque : Les astuces classiques : sens trigonométrique, règle des trois doigts, tire-bouchon de Maxwell, ... ne sont que des moyens mnémotechniques de reconnaître une base directe.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E ; il existe au moins un plan vectoriel P contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Par définition l'angle (resp. la mesure de l'angle) des deux vecteurs u et v est l'angle (resp. la mesure) définie dans P . Comme il est impossible de définir une orientation *canonique* de P à partir de celle de E si $\dim(E) > 2$, cet angle (resp. cette mesure) est définie au signe près : on parle alors d'*angle non orienté* des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Seul le cosinus de cet angle est défini sans ambiguïté et on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

Proposition 5.1.2 Soit $F \subset E$ un sous-espace de E stable par $f \in O(E)$ (i.e. $f(F) = F$) alors $F^\perp$ est stable par f .

DÉMONSTRATION : Soit $\vec{y} \in F^\perp$; par définition $\forall \vec{x} \in F, \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ et donc $\langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = 0$. Donc, puisque f est bijective, $\forall \vec{u} \in F, \langle \vec{u}, f(\vec{y}) \rangle = 0$ ce qui montre que $f(\vec{y}) \in F^\perp$. $\square$

Théorème 10 Les valeurs propres d'une matrice orthogonale A sont complexes de module 1.

DÉMONSTRATION : On utilise le complexifié de E muni de sa structure hermitienne. Soit $\vec{x}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ ; on a

$$\begin{aligned} \langle A\vec{x}, A\vec{x} \rangle &= \langle \lambda\vec{x}, \lambda\vec{x} \rangle = \lambda\bar{\lambda}\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \\ &= {}^t A.A\vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle. \end{aligned}$$

$\square$

Dans le cas particulier $n = 3$ on dispose des résultats suivants

Proposition 5.1.3 Soit $f \in SO(3)$ alors 1 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est de dimension 1 ou 3. Dans le cas où le sous-espace propre est une droite vectorielle D , on dit que f est une rotation d'axe D .

DÉMONSTRATION : Le polynôme caractéristique de f est de degré 3 à coefficients réels, il possède

- soit une racine réelle (qui ne peut être que 1 ou -1) et deux racines complexes conjuguées λ et $\bar{\lambda}$; la condition $\det(f) = 1$ impose que la racine réelle est 1.
- soit trois racines réelles appartenant à $\{-1, 1\}$; la condition $\det(f) = 1$ ne permet que deux possibilités : 1 est valeur propre triple (et $f = \text{Id}$) où 1 est valeur propre simple et -1 valeur propre double.

$\square$

Remarque : Si f est une rotation d'axe D alors $D^\perp$ est un plan P et la restriction de f à P est une rotation de P .

Proposition 5.1.4 Soit $f \in O(3)$ avec $\det(f) = -1$ alors -1 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est de dimension 1 ou 3.

DÉMONSTRATION : Analogie à la précédente : le spectre de f ne peut être que $(-1, \lambda, \bar{\lambda})$ ou $(-1, -1, -1)$ ou $(-1, 1, 1)$. $\square$

5.2 Isométries affines

Définition 37 Un espace affine $\mathcal{E}$ est dit euclidien si l'espace vectoriel associé E est un espace euclidien. Par définition la distance de deux points A et B de $\mathcal{E}$ est $AB = d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$. Un repère

affine $(O, A_1, \dots, A_n)$ est dit orthonormé si et seulement si la base $\overrightarrow{OA_1}, \dots, \overrightarrow{OA_n}$ est orthonormée. Si E est orienté, on dira que $\mathcal{E}$ est orienté et un repère sera dit direct si la base associée est directe.

Proposition 5.2.1 La distance euclidienne vérifie les propriétés suivantes

- $\forall A \in \mathcal{E}, d(A, A) = 0$;
- $\forall (A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}, d(A, B) = d(B, A)$;
- $\forall (A, B, C) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E}, d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$;
- Trois points A, B, C sont alignés dans cet ordre (i.e. B appartient au segment $[AC]$) si et seulement si $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$.

DÉMONSTRATION : Les deux premières affirmations sont triviales, les deux dernières découlent de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. $\square$

Définition 38 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien, on appelle isométrie toute application de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui conserve la distance : $\forall (A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}, d(f(A), f(B)) = d(A, B)$.

Par exemple, les translations sont des isométries.

Théorème 11 Une isométrie est une bijection affine associée à une application orthogonale.

DÉMONSTRATION : On peut donner une démonstration analogue à celle donnée au chapitre 2 (c.f. exercice 3).

Autre possibilité : en utilisant la dernière affirmation de la proposition 5.2.1 une isométrie conserve l'alignement, elle est donc affine et l'application linéaire associée conserve la norme.

On peut enfin travailler avec repères et coordonnées : soit $\mathcal{R} = (O, A_1, \dots, A_n)$ un repère orthonormé de $\mathcal{E}$; quitte à composer f par une translation on peut toujours supposer que $f(O) = O$. Posons $A'_i = f(A_i), i = 1, \dots, n$. On a, pour deux points quelconques M et N d'images respectives M' et N' ,

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON} \rangle &= \frac{1}{2}(MN^2 - OM^2 - ON^2) \\ &= \frac{1}{2}(M'N'^2 - OM'^2 - ON'^2) \quad (f \text{ est une isometrie}) \\ &= \langle \overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{ON'} \rangle. \end{aligned}$$

Par définition $OA'_i = OA_i = 1$; la relation précédente montre que $(O, A'_1, \dots, A'_n)$ est orthonormé.

On rappelle que les coordonnées x_i d'un vecteur $\vec{u}$ dans une base orthonormée $(\vec{e}_i)$ sont données par les produits scalaires $\langle \vec{u}, \vec{e}_i \rangle$. Soit $M \in \mathcal{E}$ avec $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{OA_i}$, on a alors

$$x_i = \langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA_i} \rangle = \langle \overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OA'_i} \rangle$$

ce qui entraîne $\overrightarrow{OM'} = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{OA'_i}$.

On vient de montrer que f est l'application qui au point M de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathcal{R}$ associe le point M' de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathcal{R}'$. Il est alors facile de voir que f est affine associée à l'application linéaire φ qui à $\vec{u} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$ associe $\varphi(\vec{u}) = \vec{v} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}'_i$. $\square$

Définition 39 Une isométrie associée à φ avec $\det(\varphi) = 1$ est dite directe ou positive, sinon elle est dite indirecte ou négative. Une isométrie directe est aussi appelée déplacement.

Proposition 5.2.2 Les isométries de $\mathcal{E}$ forment un sous-groupe du groupe affine ; les déplacements de $\mathcal{E}$ forment un sous-groupe du groupe des isométries.

DÉMONSTRATION : Immédiate. □

Remarque : Ce sous-groupe n'est plus commutatif dès que $\dim(\mathcal{E}) > 2$.

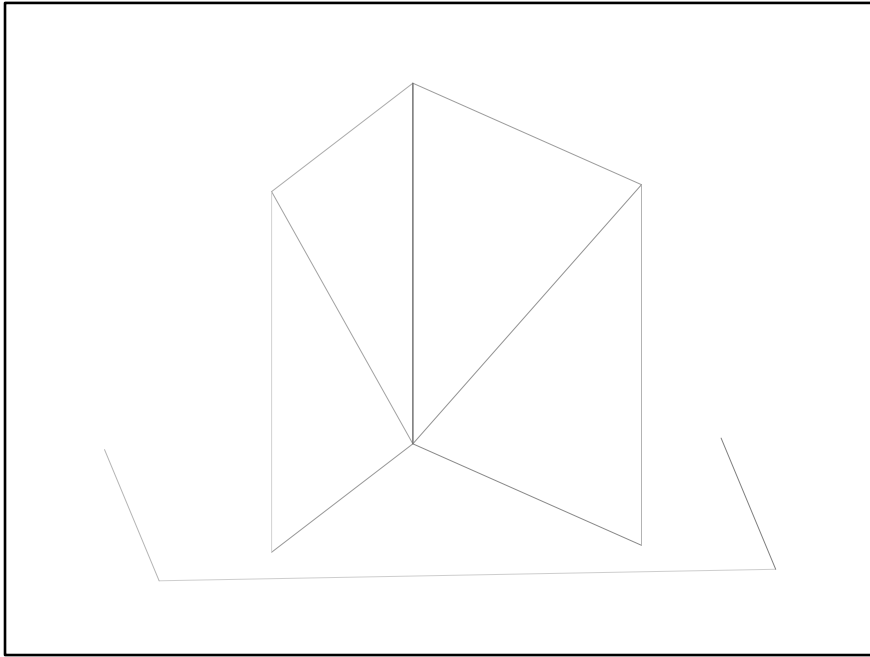
5.3 Isométries de $\mathbb{R}^3$

Dans toute la suite $\mathcal{E}$ désigne un espace affine euclidien de dimension 3 orienté.

Soit $\mathcal{D}$ une droite affine de $\mathcal{E}$, $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ un plan affine orthogonal à $\mathcal{D}$. Par convention, on choisira comme base directe $(\vec{v}, \vec{w})$ de $\mathcal{P}$ une base telle que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit directe dans $\mathcal{E}$. On dira que $\mathcal{P}$ est orienté par le vecteur normal $\vec{u}$.

Remarque : Il est clair que si on change $\vec{u}$ en $-\vec{u}$, l'orientation de $\mathcal{P}$ change : il n'existe donc pas d'orientation « canonique » de $\mathcal{P}$ induite par la droite $\mathcal{D}$, d'où la nécessité de choisir un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Définition 40 Soit $\mathcal{D}$ une droite affine ayant pour vecteur directeur $\vec{u}$, $O \in \mathcal{D}$. On appelle rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle θ , l'application qui à M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = r(\overrightarrow{OM})$ où r est la rotation vectorielle d'axe $\mathcal{D}$ et dont la restriction à $\mathcal{D}^\perp$ orienté par $\vec{u}$ est une rotation d'angle θ .



Proposition 5.3.1 (Forme canonique d'un déplacement) Soit f un déplacement de $\mathcal{E}$; il existe une translation $t_{\vec{u}}$ et une rotation r d'axe $\mathcal{D} \ni \vec{u}$ telles que $f = r \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ r$.

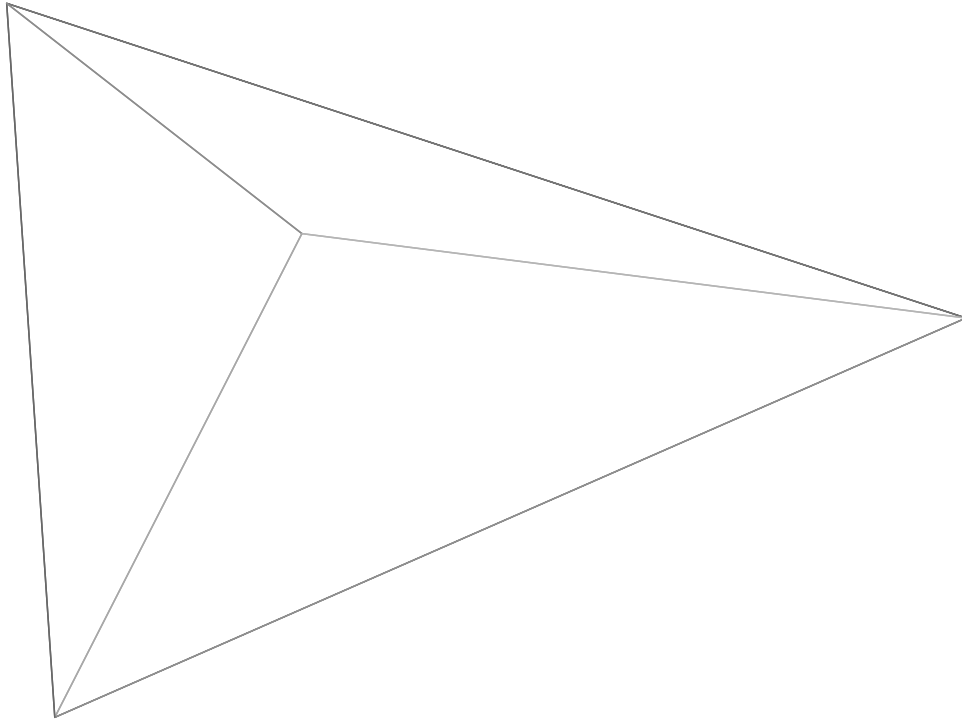
DÉMONSTRATION : laissée au lecteur. □

Définition 41 Le composé d'une translation de vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$ et d'une rotation d'axe $\mathcal{D} \ni \vec{u}$ distincte de l'identité est appelé vissage d'axe $\mathcal{D}$.

Proposition 5.3.2 (Forme canonique d'un antidéplacement) Soit f un anti-déplacement de $\mathcal{E}$: si f n'est pas une symétrie centrale, il existe une unique rotation r d'axe $\mathcal{D}$ et une unique symétrie s par rapport à un plan $\mathcal{P}$ orthogonal à $\mathcal{D}$ tel que $f = r \circ s = s \circ r$.

DÉMONSTRATION : voir exercice. □

Exemple : Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire une pyramide à base triangulaire dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux. Il existe une unique transformation affine f telle que $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = D$ et $f(D) = A$. Justifier que f est une isométrie et donner sa forme canonique.



5.4 Produit vectoriel, produit mixte

Dans toute la suite $\mathcal{E}$ désigne un espace affine euclidien de dimension 3 orienté.

Définition 42 Soit E un espace vectoriel euclidien orienté. On appelle produit mixte l'application de E^3 dans $\mathbb{R}$: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \mapsto \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

Remarque : Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ fixés, le produit mixte est une forme linéaire sur E , il existe donc un vecteur $\vec{\alpha}$ tel que $\forall \vec{w}, \langle \vec{\alpha}, \vec{w} \rangle = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Définition 43 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E , on appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ le vecteur défini par

$$\forall \vec{w} \in E, \langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

Proposition 5.4.1 On a les propriétés suivantes

- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est nul si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont liés.
- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
- $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et de norme 1, alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base orthonormée directe.

Proposition 5.4.2 (Formule du double produit vectoriel) Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de E . On a

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w}$$

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur. □

Corollaire 5.4.3 (Identité de Lagrange) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E . On a

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$$

DÉMONSTRATION : □

On en déduit la relation suivante

Corollaire 5.4.4 Pour tout couple de vecteur $\vec{u}, \vec{v}$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin(\theta)|$$

où θ est une mesure de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ calculée dans un plan vectoriel contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

5.5 Exercices

1. Soit $f \in O(3)$ avec $\det(f) = -1$; montrer que f peut s'écrire sous la forme $f = r \circ s = s \circ r$ où r est une rotation d'axe D et s la symétrie autour de $D^\perp$.

2. Soit $\mathcal{E}$ affine euclidien de direction E , $\mathcal{F}$ un hyperplan de $\mathcal{E}$ (i.e. dont la direction F est de codimension 1). On considère la symétrie s autour de $\mathcal{F}$ de direction D ; montrer que s est une isométrie si et seulement si F et D sont orthogonaux.

3. Soit $\mathcal{E}$ affine euclidien de dimension n .

a) Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$. Montrer que l'ensemble des points M tels que $d(M, A) = d(M, B)$ est un hyperplan.

b) Soit f une isométrie de $\mathcal{E}$; on suppose que f laisse fixes $(n + 1)$ points affinement indépendants, montrer que f est l'identité.

c) En déduire que toute isométrie de $\mathcal{E}$ est le produit d'au plus $(n + 1)$ symétries par rapport à des hyperplans.

4. a) Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites affines non parallèles d'un espace de dimension 3. Montrer qu'il existe une unique droite Δ sécante avec $\mathcal{D}$ en M , avec $\mathcal{D}'$ en M' et perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, qui sera appelée perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

b) Montrer que les points M et M' réalisent le minimum de la distance entre points de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

c) Montrer que Δ est l'axe d'un vissage f tel que $f(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$.

5. *Forme canonique d'un antidéplacement*

Soit f un antidéplacement de $\mathcal{E}$ qui n'est pas une symétrie par rapport à un plan.

a) Montrer que f possède un point fixe unique O .

b) Montrer que $f \circ f$ est une rotation dont on notera l'axe $\mathcal{D}$.

c) Soit $\mathcal{P}$ la plan orthogonal à $\mathcal{D}$ contenant O : étudier la transformation $s_{\mathcal{P}} \circ f$. Conclure.

6. $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien orienté de dimension 3. Soient $\mathcal{D}$ une droite définie par le point A et un vecteur directeur $\vec{u}$, $\mathcal{D}'$ une droite définie par le point B et un vecteur directeur $\vec{v}$ et M un point de $\mathcal{E}$.

a) Montrer que la (plus courte) distance de M à $\mathcal{D}$ est donnée par

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

b) Montrer que la (plus courte) distance de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{D}'$ est donnée par

$$d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = \frac{(\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}.$$

7. $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien orienté de dimension 3, $\mathcal{D}$ une droite définie par le point A et un vecteur unitaire $\vec{u}$, r la rotation d'axe $\mathcal{D}$ dont l'angle est 2θ .

a) Montrer que

$$\overrightarrow{Ar(M)} = \overrightarrow{AM} \cos 2\theta + (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}) \sin 2\theta + 2\langle \vec{u}, \overrightarrow{AM} \rangle \sin^2 \theta \vec{u}.$$

b) On considère un repère orthonormé direct $\mathcal{B} = (A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et on pose $q_0 = \cos \theta$, $\vec{u} \sin \theta = q_1 \vec{e}_1 + q_2 \vec{e}_2 + q_3 \vec{e}_3$ avec $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$. On note (x_1, x_2, x_3) les coordonnées de M et (x'_1, x'_2, x'_3) les coordonnées de M' = r(M). Montrer qu'il existe une matrice R telle que

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

et exprimer les coefficients de R en fonction des q_i .

Chapitre 6

Similitudes

6.1 Définitions

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien.

Définition 44 Soit $k > 0$; on appelle similitude de rapport k une application $\Sigma : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ telle que, pour tout couple de points (A, B) de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$, $d(\Sigma(A), \Sigma(B)) = k d(A, B)$

Par exemple, une isométrie est une similitude de rapport 1, une homothétie de rapport k est une similitude de rapport $|k|$. En fait ces deux exemples « résument » toutes les similitudes. On a en effet le lemme suivant dont la démonstration est évidente :

Lemme 6.1.1 Soit Σ une similitude de rapport k et h une homothétie de rapport $1/k$; alors $h \circ \Sigma$ est une isométrie.

Proposition 6.1.2 On a :

- Les similitudes sont des bijections affines.
- Les similitudes de $\mathcal{E}$ sont munies d’une structure de groupe pour la loi $\circ$.
- Une similitude de rapport k est dite directe (resp. indirecte) si $h \circ \Sigma$ est une isométrie directe (resp. indirecte).
- Les similitudes directes forment un sous-groupe du groupe des similitudes.

DÉMONSTRATION : Immédiate. □

Remarque : Dire que Σ est directe équivaut à dire que l’application linéaire associée σ vérifie $\det(\sigma) > 0$.

Proposition 6.1.3 (Forme canonique) Toute similitude de rapport $k \neq 1$ admet un point fixe unique Ω , appelé centre de la similitude. On peut alors écrire

$$\Sigma = H(\Omega, k) \circ f = f \circ H(\Omega, k)$$

où f est une isométrie laissant Ω fixe.

DÉMONSTRATION : L’existence de Ω découle de l’exercice 1 du chapitre 4. Le reste est immédiat. □

Dans le cas d’un plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$, on a alors

Proposition 6.1.4 Soit Σ une similitude plane directe de rapport k . Si Σ n’est pas une translation, il existe un unique point Ω centre de Σ et un unique angle θ appelé angle de la similitude, tels que

$$\Sigma = H(\Omega, k) \circ R(\Omega, k) = R(\Omega, k) \circ H(\Omega, k)$$

Soit Σ une similitude plane indirecte de rapport $k \neq 1$. Il existe une unique droite $\mathcal{D}$, appelée axe de la similitude, contenant le centre Ω telle que

$$\Sigma = H(\Omega, k) \circ s_{\mathcal{D}} = s_{\mathcal{D}} \circ H(\Omega, k)$$

6.2 Similitudes planes et nombres complexes

Dans toute la suite $\mathcal{P}$ désigne un plan affine euclidien orienté rapporté au repère $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$.

A tout point $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$ on associe son *affixe* $z = x + iy$; réciproquement le point $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) est l'*image* du complexe $z = x + iy$. En général l'affixe d'un point M est notée z_M . Au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est associé le « vecteur » $z_B - z_A$, la distance $d(A, B)$ est égale à $|z_B - z_A|$, l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ a pour mesure $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \bmod 2\pi$. Si f est une transformation de $\mathcal{P}$, on appelle forme complexe de f l'application qui à z d'image M associe z' d'affixe $f(M)$.

Proposition 6.2.1 Soit Σ une similitude directe (resp. indirecte) de $\mathcal{P}$. Il existe deux complexes a et b tels que la forme complexe de Σ soit $z \mapsto az + b$ (resp $z \mapsto a\bar{z} + b$).

En outre, si Σ n'est pas une translation,

- $|a|$ est égal au rapport de Σ ,
- $\arg(a)$ est égal à l'angle de Σ ,
- L'affixe du centre Ω est donnée par $\frac{b}{1-a}$.

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur. □

Proposition 6.2.2 Soient A, A', B et B' dans $\mathcal{P}$ avec $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Il existe une unique similitude Σ directe (resp. indirecte) telle que $\Sigma(A) = A'$ et $\Sigma(B) = B'$.

DÉMONSTRATION : Evidente d'après les expression complexes. □

Proposition 6.2.3 Soient A, A', B et B' dans $\mathcal{P}$. On suppose qu'il existe une similitude Σ de centre Ω telle que $\Sigma(A) = A'$ et $\Sigma(B) = B'$; alors il existe une similitude σ de même centre Ω telle que $\sigma(A) = A'$ et $\sigma(B) = B'$

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur. □

Soient A, A', B et B' dans $\mathcal{P}$; comment caractériser la similitude directe Σ telle que $\Sigma(A) = A'$ et $\Sigma(B) = B'$? Il est clair que le rapport de Σ est égal à $A'B'/AB$ et que l'angle de Σ est l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$, seul le centre (éventuel) reste à déterminer.

Si $ABB'A'$ est un parallélogramme, Σ est une translation. Sinon on peut supposer que (AB) et $(A'B')$ sont sécantes en un point I , quitte à échanger les points B et A' grâce à la propriété précédente. On note (C_1) le cercle circonscrit à IAA' et (C_2) le cercle circonscrit à IBB' . Le centre cherché est le « deuxième » point d'intersection de (C_1) et (C_2) .

6.3 Triangles semblables

Définition 45 Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont dits semblables si et seulement si

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}.$$

L'image d'un triangle T par une similitude est un triangle semblable à T . Réciproquement on a :

Proposition 6.3.1 *Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles (non aplatis) semblables. L'unique application affine f telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$ est une similitude (directe ou indirecte).*

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur. $\square$

Remarque : Si les triangles sont tous deux directs (ou tous deux indirects) la similitude est directe, sinon elle est indirecte. Cet énoncé est le premier *cas de similitude* des triangles, les autres sont donnés par :

Proposition 6.3.2 (Cas de similitudes) *Deux triangles T et T' sont semblables s'ils ont*

- 3 angles égaux ou opposés,
- 2 angles égaux ou opposés,
- un angle égal et les deux côtés adjacents proportionnels.

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur. $\square$

Remarque : Une transformation affine qui conserve l'orthogonalité (i.e. qui transforme deux droites orthogonales en droites orthogonales) est une similitude. c.f. exercice 1 et 2

6.4 Exercices

1. Soit f une application affine du plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$ rapporté au repère orthonormé direct $\mathcal{R}$.

a) Montrer qu'il existe trois complexes α , β et γ tels que la transformation complexe associée à f soit $z \mapsto \alpha z + \beta \bar{z} + \gamma$. b) En déduire que si f conserve l'orthogonalité α ou β est nul.

2. Deux cercles (C) et (C') se coupent en A et B .

a) Montrer qu'il existe une similitude directe de centre Σ qui transforme (C) en (C') . b) Montrer que pour tout point $M \in (C)$, les points A , M , $M' = \Sigma(M)$ sont alignés.

3. Soit $\lambda = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

a) Montrer que $\lambda^{-1} = 1 - \lambda = -\lambda^2$.

b) Soit ABC un triangle de sens direct. On construit les triangles équilatéraux de sens directs $A'BC$, $B'AC$ et $C'BC$. Démontrer la relation

$$z_{A'} = z_B \lambda + z_C \lambda^{-1}$$

et établir les relations similaires pour $z_{B'}$ et $z_{C'}$.

c) En déduire que $AA' = BB' = CC'$.

4. Soit f une transformation affine du plan qui conserve l'orthogonalité. Montrer par un raisonnement géométrique que l'image par f d'un triangle ABC rectangle en A est un triangle $A'B'C'$ rectangle en A' est *semblable* à ABC . En déduire que f est une similitude. On pourra utiliser le fait que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MB'} \cdot \overrightarrow{MC'} = 0$ est le cercle de diamètre $B'C'$.

5. Soit $ABCD$ un quadrilatère; on construit les triangles rectangles isocèles de sens direct $A'BA$, $B'CB$, $C'DC$ et $D'AD$ rectangles respectivement en A' , B' , C' et D' . Montrer que les segments $[A'C']$ et $[B'D']$ sont orthogonaux et de même longueur.

6. Soit T un triangle donné et deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ du plan.

- a) On se donne un point A ; déterminer et construire un triangle ABC directement semblable à T tel que $B \in \mathcal{D}$ et $C \in \mathcal{D}'$.
- b) Montrer que tous les triangles obtenus lorsqu'on fait varier A sont tous semblables dans une similitude de centre fixe.

Chapitre 7

Cercles

7.1 Définitions

Dans tout ce chapitre $\mathcal{P}$ désigne un plan affine euclidien orienté rapporté au repère $\mathcal{R}$.

Définition 46 Soit O un point de $\mathcal{P}$ et $r > 0$; le cercle de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M tels que $OM = r$. Deux points A et B du cercle alignés avec O sont dits diamétralement opposés et le segment $[AB]$ est appelé diamètre du cercle.

Proposition 7.1.1 Si O a pour coordonnées (a, b) , le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r a pour équation cartésienne

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad \text{avec } c = a^2 + b^2 - r^2.$$

Une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$ est donnée par $x(t) = a + r \cos t$, $y(t) = b + r \sin t$.

DÉMONSTRATION : triviale. □

On rappelle que étant donné trois points A, B, C non alignés il existe un unique cercle $\mathcal{C}$ contenant les trois points, dit cercle circonscrit au triangle ABC .

Proposition 7.1.2 Soient A et B deux points de $\mathcal{P}$ et $\theta \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) un angle. L'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \theta \pmod{\pi}$ est un cercle contenant les points A et B . En particulier l'ensemble des points d'où on voit $[AB]$ sous un angle droit est le cercle de diamètre $[AB]$.

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur. Pour le cas de l'angle droit on a, en notant O le milieu de $[AB]$,

$$0 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) = MO^2 - OA^2.$$

7.2 Position relative d'une droite et d'un cercle

Définition 47 Soit $\mathcal{C}$ ayant pour équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$. Pour tout point M_0 de coordonnées (x_0, y_0) on pose $C(M_0) = x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + c$.

Remarque : On a donc $M \in \mathcal{C}$ si et seulement si $C(M) = 0$.

Proposition 7.2.1 Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon r et $\mathcal{D}$ une droite.

– Si $d(O, \mathcal{D}) > r$ alors $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \emptyset$,

- Si $d(O, \mathcal{D}) = r$ alors $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ est réduit à un point M , de plus (OM) est orthogonale à $\mathcal{D}$. On dit alors que $\mathcal{D}$ est tangente à $\mathcal{C}$,
- Si $d(O, \mathcal{D}) < r$ alors $\mathcal{D}$ rencontre $\mathcal{C}$ en deux points.

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur. □

Remarque : La définition ci-dessus de la tangente est en accord avec la définition « cinématique ».

Proposition 7.2.2 (Puissance d'un point par rapport à un cercle) Soit $\mathcal{D}$ une droite issue d'un point M_0 qui rencontre $\mathcal{C}$ en deux points M_1 et M_2 (éventuellement confondus) on a

$$\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \overrightarrow{M_0M_2} = C(M_0) = OM_0^2 - r^2.$$

DÉMONSTRATION : Cette propriété est un sous-produit de la démonstration précédente. Néanmoins on peut en donner une démonstration géométrique ... □

Définition 48 La quantité $C(M_0) = OM_0^2 - r^2$ est appelée puissance du point M_0 par rapport à $\mathcal{C}$.

Remarque : Le point M_0 est intérieur (resp appartient, est extérieur) au cercle si sa puissance est négative (resp. nulle, positive).

Proposition 7.2.3 La tangente à $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ au point $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ a pour équation cartésienne

$$* \quad xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0,$$

(méthode de doublement des coordonnées).

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur. □

Exercice Construire géométriquement la tangente à un cercle issue d'un point M extérieur au cercle.

7.3 Axe radical, orthogonalité

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles d'équations $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ et $x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0$. Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ revient à résoudre le système formé par ces deux équations, qui est équivalent au système obtenu en remplaçant une des équations par leur différence. Lorsque les deux cercles ne sont pas concentriques ($(a, b) \neq (a', b')$) cette différence est l'équation d'une droite. Ce qui motive la définition suivante :

Définition 49 Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles d'équations respectives $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ et $x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0$ non concentriques. On appelle axe radical des deux cercles la droite d'équation $2(a' - a)x + 2(b' - b)y + c - c' = 0$. C'est aussi l'ensemble des points M ayant même puissance par rapport à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur. □

Remarque : L'axe radical est par définition orthogonal à la ligne des centres OO' .

Déterminer l'intersection de deux cercles revient à étudier l'intersection d'un des cercles avec l'axe radical, ce qui conduit à

Proposition 7.3.1 Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ des cercles de centre O et O' , de rayons r et r' .

- Si $OO' > r + r'$ ou $OO' < |r - r'|$ alors $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \emptyset$,

- Si $OO' = r + r'$ ou $OO' = |r - r'|$ alors les deux cercles sont tangents, i.e. ils ont un seul point commun M et une tangente commune en ce point.
- Si $|r - r'| < OO' < r + r'$ alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécants en 2 points.

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur. □

Définition 50 Deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont dits orthogonaux s'ils sont sécants et si aux points communs les tangentes sont orthogonales.

Proposition 7.3.2 Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont orthogonaux si et seulement une des propriétés suivantes est satisfaite

- $OO'^2 = r^2 + r'^2$,
- $C(O') = r'^2$,
- $C'(O) = r^2$,
- $2aa' + 2bb' = c + c'$.

DÉMONSTRATION : Laissez au lecteur. □

Proposition 7.3.3 Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles orthogonaux. Tout diamètre de l'un est divisé harmoniquement par l'autre.

DÉMONSTRATION : Supposons que le diamètre $[AB]$ de $\mathcal{C}$ rencontre $\mathcal{C}'$ en C et D : la puissance du centre O de $\mathcal{C}$ est donnée par $\overline{OC} \overline{OD}$ et d'après l'orthogonalité elle est égale au rayon. On a donc $\overline{OC} \overline{OD} = OA^2 = OB^2$ propriété caractéristique d'une division harmonique. □

7.4 Faisceaux de cercles

Dans tout ce paragraphe $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ désignent deux cercles *non concentriques* d'équations cartésiennes respectives $C_1(x, y) = 0$ et $C_2(x, y) = 0$.

Définition 51 Le faisceau (linéaire) de cercles engendré par $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ est l'ensemble des courbes ayant pour équation cartésienne $\lambda C_1(x, y) + \mu C_2(x, y) = 0$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

On peut remarquer que

- $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ appartiennent au faisceau.
- Pour $\lambda + \mu = 0$ la « courbe » obtenue est l'axe radical Δ de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
- Par tout point du plan, en dehors de l'axe radical, passe (au moins) un cercle du faisceau.
- Pour $\lambda + \mu \neq 0$, on peut toujours supposer que $\lambda + \mu = 1$; les cercles du faisceau ont donc pour équation $\lambda C_1(x, y) + (1 - \lambda) C_2(x, y) = 0$.
- Deux cercles quelconques du faisceau ont pour axe radical Δ .

Réciproquement on a une définition géométrique d'un faisceau de cercle.

Proposition 7.4.1 Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ non concentriques d'axe radical Δ : tout cercle $\mathcal{C}$ ayant pour axe radical avec $\mathcal{C}_1$ la droite Δ appartient au faisceau défini par $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

DÉMONSTRATION : On peut définir de deux façons des équations de l'axe radical qui seront proportionnelles

$$\Delta = \mathcal{C} - \mathcal{C}_1 = \lambda(\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_1) \implies \mathcal{C} = \lambda \mathcal{C}_1 + (1 - \lambda) \mathcal{C}_2.$$

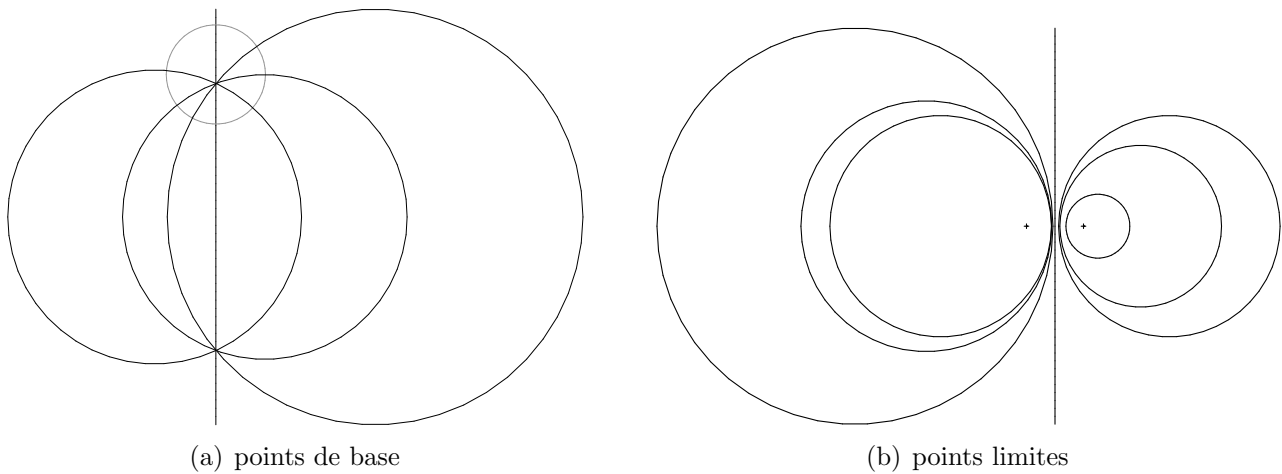


FIG. 7.1 – Faisceaux de cercles et cercle orthogonal

Remarque : Pour éviter de traiter à part l'axe radical, il peut être commode de considérer Δ comme un cercle de rayon infini.

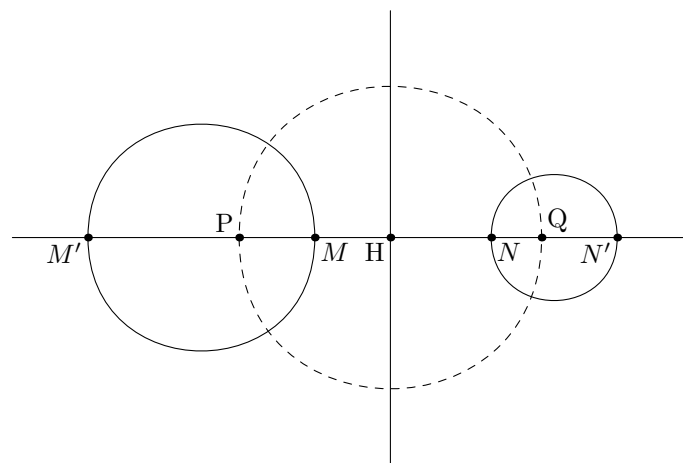
Selon la position relative de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ (ou de $\mathcal{C}_1$ et Δ) on obtient trois sortes de faisceaux de cercles :

à points de base Lorsque $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont sécants en deux points A et B (les points de base) les cercles du faisceau sont tous les cercles contenant A et B .

tangent Lorsque $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents en A avec pour tangente commune l'axe radical Δ , les cercles du faisceau sont les cercles tangents à Δ en A .

à points limites (on dit aussi **à points de Poncelet**) Lorsque $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont disjoints : il existe deux cercles de rayons nuls P et Q appartenant au faisceau, appelés points limites du faisceau, qui sont intérieurs à tous les cercles du faisceau.

Dans le dernier cas, soit H la projection orthogonale des centres sur Δ , M et M' (resp N et N') les extrémités du diamètre (commun) de $\mathcal{C}_1$ (resp. de $\mathcal{C}_2$) contenant H . Par définition H est extérieur au cercle, donc $\overline{HM} \overline{HM'} = \overline{HN} \overline{HN'} > 0$; on peut donc trouver deux points P et Q situés sur le diamètre commun tels que $HP^2 = HQ^2 = \overline{HM} \overline{HM'} = \overline{HN} \overline{HN'}$. Si on considère ces points comme des cercles de rayons nuls, on voit facilement qu'ils appartiennent au faisceau défini par $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. $\square$



Remarque : La division (M, M', P, Q) est harmonique, donc tout cercle passant par P et Q est orthogonal à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. **Remarque :** Comment construire à la règle et au compas les points de base?

Proposition 7.4.2 *Si un cercle Γ est orthogonal à deux cercles C_1 et C_2 alors il est orthogonal à tous les cercles du faisceau défini par C_1 et C_2 .*

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur □

Proposition 7.4.3 *Les cercles orthogonaux à deux cercles C_1 et C_2 forment un faisceau.*

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur □

Remarque : L'orthogonal d'un faisceau à point de base est un faisceau à point limite (et réciproquement).

7.5 Polaire d'un point par rapport à un cercle

Définition 52 *On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O . On dit que deux points M et N de $\mathcal{P}$ sont conjugués par rapport à $\mathcal{C}$ si et seulement si le cercle de diamètre $[MN]$ est orthogonal à $\mathcal{C}$.*

Proposition 7.5.1 *Soit $M \in \mathcal{P}$ distinct de O , A et B les extrémités du diamètre de $\mathcal{C}$ contenant M . Un point N est conjugué de M si et seulement si le projeté orthogonal H de N sur (OM) est tel que (A, B, M, H) est une division harmonique.*

Définition 53 *Soit $M \in \mathcal{P}$ distinct du centre O du cercle $\mathcal{C}$. L'ensemble des conjugués de M est une droite perpendiculaire à (OM) appelée polaire du point M par rapport à $\mathcal{C}$.*

Proposition 7.5.2 *Il y a équivalence entre*

- les points M et N sont conjugués,
- le point N appartient à la polaire de M ,
- le point M appartient à la polaire de N .

DÉMONSTRATION : immédiate. □

Proposition 7.5.3 *Soit $\mathcal{D}$ une droite sécante avec $\mathcal{C}$ en deux points A et B . Deux points M et N de $\mathcal{D}$ sont conjugués par rapport à $\mathcal{C}$ si et seulement si (A, B, M, N) est une division harmonique.*

7.6 Exercices

1. Soient A, B, A', B' quatre points distincts ; on suppose que AB et $A'B'$ sont sécantes en P . Montrer que les quatre points sont cocycliques si et seulement si $\overline{PA} \overline{PB} = \overline{PA'} \overline{PB'}$.

2. *Centre radical de trois cercles*

Soient $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ trois cercles dont deux quelconques ne sont pas concentriques. Montrer qu'il existe un unique point Ω ayant même puissance par rapport aux trois cercles.

3. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles disjoints. Expliquer comment construire l'axe radical de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. (On pourra utiliser un cercle auxiliaire).

4. Soient $P(0, a)$ et $P'(0, -a)$ deux points du plan.

a) Montrer que l'équation du faisceau à point de base P et P' est $x^2 + y^2 - 2\lambda x - a^2 = 0$.

b) A quelle condition un cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0$ est-il orthogonal au faisceau précédent ?

c) En déduire l'équation du faisceau à points limites P et P' .

5. On considère 3 points non alignés A , B , et C et une droite $\mathcal{D}$ coupant (BC) en D , (CA) en E et (AB) en F . On dit que les quatre droites ABF , BCD , CAE , DEF constituent un quadrilatère complet dont les points A , B , C , D , E et F constituent les sommets, les droites (AD) , (BE) , (CF) les diagonales.

On note A' le projeté orthogonal de A sur (BC) , B' le projeté orthogonal de B sur (AC) et H l'orthocentre du triangle ABC .

a) Montrer que $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HB'}$.

b) Démontrer que H est le centre radical des cercles de diamètres respectifs $[AD]$, $[BE]$ et $[CF]$.

c) Démontrer que les orthocentres des quatre triangles ABC , BDF , CDE et AEF sont alignés. sur une droite Δ et que les milieux des diagonales sont alignés sur une droite perpendiculaire à Δ .

6. a) Déterminer la polaire par rapport à $\mathcal{C}$ d'un point M appartenant à $\mathcal{C}$.

b) Montrer que si M est extérieur à $\mathcal{C}$, la polaire de M passe par les points de contact des tangentes issues de M .

c) En déduire une construction simple de la polaire d'un point M (distinct de O) intérieur à $\mathcal{C}$.

Chapitre 8

Coniques

8.1 Historique

Historiquement (et étymologiquement !) les coniques correspondent à l'intersection d'un cône de révolution et d'un plan. APOLLONIUS DE PERGE (v. 262-v. 180 av. J.-C.) est connu comme étant le plus grand géomètre de l'histoire. Né à Perge en Asie Mineure, Apollonius fut formé à Alexandrie dans la tradition euclidienne, tradition qu'il développa tout particulièrement en géométrie, avec son travail sur les coniques. Son traité, constitué de 8 livres, a introduit les termes *parabole*, *ellipse* et *hyperbole*. Les livres 1 à 4 ne contiennent pas d'informations vraiment originales. Ils traitent des propriétés de base des coniques déjà introduites par EUCLIDE, ARCHIMÈDE, ARISTÉE et d'autres. Les livres 5 à 7 contiennent, au contraire, des informations toutes nouvelles qui ont permis d'établir la propriété caractéristique des sections coniques. Quant au 8^{ème} livre, il a été perdu. Après la définition et la construction des trois coniques, Apollonius a étudié leurs propriétés fondamentales : les asymptotes, les tangentes, les foyers, le diamètre conjugué, etc. En particulier, il a démontré un théorème qui est la base de la théorie des *polaires*.

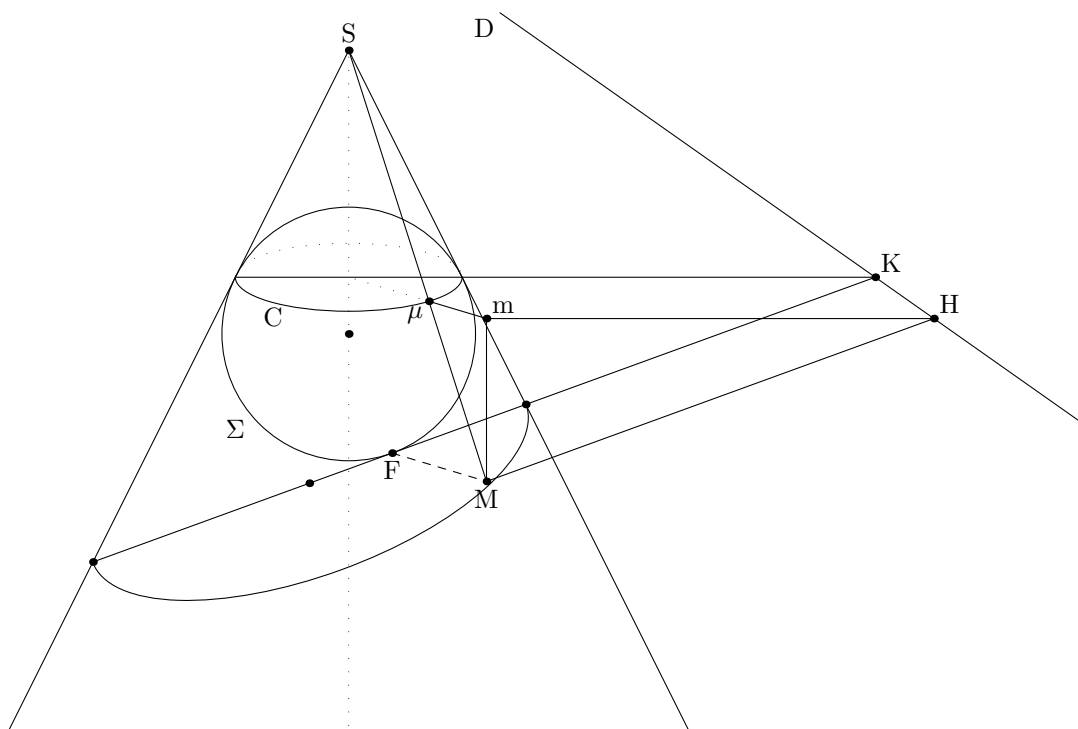
Les avancées nouvelles ont lieu au XVII^{ème} siècle : DESARGUES introduit les propriétés projectives, DESCARTES les coordonnées et la géométrie analytique (une conique n'est plus définie géométriquement mais par une équation) enfin PASCAL rédige son *Essay sur les Coniques* dans lequel figure le fameux *hexagramme mystique*. Pierre DANDELIN, mathématicien belge du XIX^{ème} siècle, fut le premier à utiliser les sphères en contact avec le cône et le plan d'intersection pour définir les coniques. Plus près de nous, Henri LEBESGUE a écrit *Les coniques* paru en 1942 dont voici un extrait :

« Il m'a alors semblé utile de rappeler qu'en réalité toute l'étude des coniques est l'étude d'une transformée homographique d'une circonférence. Il en a toujours été ainsi. DESARGUES et PASCAL, comme antérieurement les Grecs et plus tard PONCELET, considérant les projections des cercles, utilisaient bien une transformation homographique du cercle. »

8.2 Le « théorème belge »

On considère un cône de sommet S , et un plan sécant P avec le cône ; soit Σ la sphère inscrite (i.e. tangente intérieurement) au cône et tangente au plan en F . L'intersection de Σ et du cône est un cercle C qui définit un plan sécant (Q) dont l'intersection avec (P) est une droite D .

Soit $\mu \in C$ et M l'intersection de la génératrice $(S\mu)$ avec (P) ; par construction MF et $M\mu$ sont deux tangentes à Σ issues de M , on a donc $MF = M\mu$. Il est facile de voir que l'angle μMm est constant (c'est le demi-angle au sommet du cône) d'où $MF = M\mu = mM / \cos \alpha$. Enfin $mM = MH \sin \beta$ où β est l'angle entre les plans (P) et (Q) . D'où la relation $MF = eMH$ où e est une constante.



Remarque : Il est facile de voir que $e = 1$ correspond à un plan parallèle à une génératrice ($\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$). Dans le cas où le plan n'est pas parallèle à une génératrice, il existe une deuxième sphère inscrite dans le cône et tangente au plan : on peut faire un raisonnement analogue qui conduit à une définition bifocale.

8.3 Définition des coniques

8.3.1 Définition monofocale

Définition 54 Soit e un réel strictement positif, $\mathcal{D}$ une droite du plan et $F \notin \mathcal{D}$. On appelle conique de foyer F , de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e l'ensemble des points M du plan tels que

$$\frac{MF}{MH} = e$$

où H désigne la projection orthogonale de M sur $\mathcal{D}$.

Généralement on note K le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$, appelé pied de la directrice ; la droite (FK) est appelée *axe focal* de la conique.

Remarque : Une conique ainsi définie n'est jamais vide ! Il existe au moins un point de la conique appartenant à l'axe focal : il suffit de résoudre $\overrightarrow{MF} = e\overrightarrow{MK}$. Pour $e = 1$ il y a une seule solution qui est le milieu de (F, K) , sinon il y a deux points (c.f. Exercice ...).

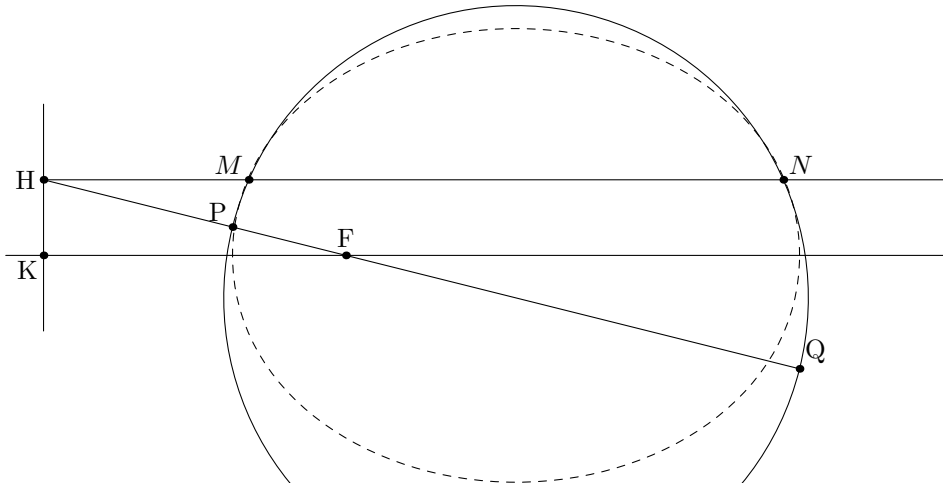
Définition 55 Le ou les point(s) de la conique situés sur (FK) sont appelés *sommet(s)* (principaux) de la conique.

On peut généraliser la remarque précédente pour obtenir une construction point par point d'une conique : F et $\mathcal{D}$ étant donnés, on choisit un point $H \in \mathcal{D}$, on trace l'ensemble des points M tels que $MF = eMH$ et on regarde l'intersection de cet ensemble (E) avec la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ issue de H : les points obtenus appartiennent à la conique.

Si $e = 1$ l'ensemble (E) est la médiatrice de (M, H) : il y a exactement un point commun. (voir figure

8.1).

Si $e \neq 1$ l'ensemble (E) est un cercle qui peut rencontrer la droite en 0, 1 ou 2 points.



8.3.2 Equation réduite

On choisit un repère d'origine F tel que K ait pour coordonnées $(d, 0)$. Dans ce repère l'équation de la conique d'excentricité e s'écrit $MF^2 = e^2 MH^2$ soit

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= e^2(x - d)^2 \\ (1 - e^2)x^2 + y^2 + 2e^2dx - d^2e^2 &= 0 \\ (1 - e^2)\left(x + \frac{e^2d}{1 - e^2}\right)^2 + y^2 &= \frac{d^2e^2}{1 - e^2} \quad \text{si } e \neq 1. \end{aligned}$$

Il y a trois cas à envisager

$e = 1$ La conique est appelée *parabole*. Le sommet O est le milieu de (F, K) , l'axe focal est axe de symétrie et par un changement d'origine en O , l'équation réduite est

$$Y^2 = 2pX.$$

$0 < e < 1$ La conique est appelée *ellipse*. Il y a deux sommets A et A' et en faisant un changement d'origine en O milieu de (A, A') on obtient l'équation réduite

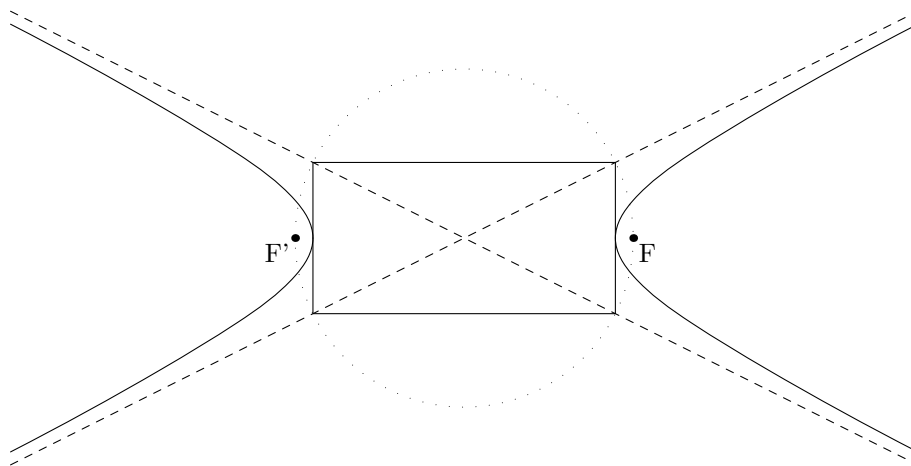
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Le point O est centre de symétrie de la conique, l'axe $(O, \vec{i})$ est axe de symétrie de la conique et les deux points de coordonnées $(0, b)$ et $(0, -b)$ sont appelés sommets de l'ellipses. Dans le repère d'origine O , les coordonnées de F sont $(c, 0)$ avec $a^2 = b^2 + c^2$, la directrice a pour équation $x = \frac{a^2}{c}$ et l'excentricité est égale à $e = \frac{c}{a}$. Il est facile de voir que l'ellipse est incluse dans le rectangle défini par $\{|x| \leq a, |y| \leq b\}$.

$e > 1$ La conique est appelée *hyperbole*. Il y a deux sommets A et A' et en faisant un changement d'origine en O milieu de (A, A') on obtient l'équation réduite

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Le point O est centre de symétrie de la conique, l'axe $(O, \vec{j})$ est axe de symétrie de la conique mais ne rencontre pas celle-ci. Dans le repère d'origine O , les coordonnées de F sont $(c, 0)$ avec $a^2 + b^2 = c^2$, la directrice a pour équation $x = \frac{a^2}{c}$ et l'excentricité est égale à $e = \frac{c}{a}$. Il est facile de voir que l'hyperbole est extérieure au rectangle défini par $\{|x| \leq a, |y| \leq b\}$; les diagonales de ce rectangle $y = \pm \frac{b}{a}x$ sont asymptotes de l'hyperbole.



On peut remarquer que les foyers sont obtenus simplement à partir des diagonales du rectangle qui sont aussi les asymptotes de l'hyperbole.

Exemple : On considère l'ellipse (E) de la Figure... où $\mathcal{D}$ a pour équation $x = 0$, F pour coordonnées $(4, 0)$ avec $e = \frac{3}{5}$. Cherchons les éléments géométriques de (E) en réduisant l'équation $MF^2 = \frac{9}{25}MH^2$.

$$\begin{aligned}(x - 4)^2 + y^2 &= \frac{9}{25}x^2 \\ \frac{16}{25}x^2 - 8x + y^2 + 16 &= 0 \\ \frac{16}{25}\left(x - \frac{25}{4}\right)^2 + y^2 &= 9 \\ \frac{X^2}{\frac{9 \times 25}{16}} + \frac{Y^2}{9} &= 1.\end{aligned}$$

D'où les coordonnées du centre $(\frac{25}{4}, 0)$ le demi grand-axe $a = \frac{15}{4}$ et le demi petit-axe $b = 3$ et la demi-distance focale $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{9}{4}$. Ce qui donne comme sommets principaux $(\frac{5}{2}, 0)$ et $(10, 0)$; on vérifie que l'excentricité $e = \frac{c}{a}$ est bien égale à $\frac{3}{5}$.

L'hyperbole et l'ellipse sont appelées *coniques à centre* par opposition à la parabole.

Remarque : On prendra bien garde qu'en présence d'une équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $b > a$ il convient d'échanger $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$ et les rôles joués par a et b . Même remarque pour l'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$.

8.3.3 Définition bifocale des coniques à centre

Proposition 8.3.1 Soit Γ une conique de centre O , de foyer F de directrice $\mathcal{D}$ ayant pour sommets principaux A et A' .

- Soient F' et $\mathcal{D}'$ les symétriques de F et $\mathcal{D}$ par rapport à O ; Γ est la conique de foyer F' de directrice $\mathcal{D}'$ et de même excentricité.

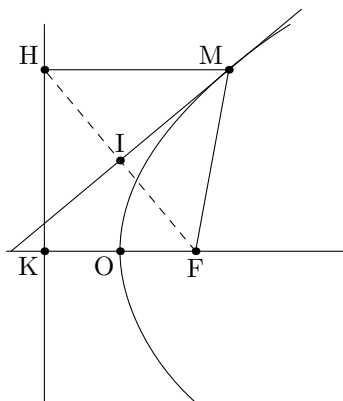


FIG. 8.1 – Tangente à la parabole

– Si Γ est une ellipse (resp. une hyperbole) c'est l'ensemble des points M tels que

$$MF + MF' = AA' = 2a \quad (\text{resp. } |MF - MF'| = AA' = 2a).$$

DÉMONSTRATION : La première affirmation résulte du fait que la symétrie de centre O est une isométrie. La deuxième est laissée au lecteur. $\square$

Remarque : La relation $MF + MF' = 2a$ est à l'origine d'une construction simple de l'ellipse appelée *ellipse des jardiniers* : elle permet avec un cordeau et deux piquets de dessiner des massifs harmonieux.

8.4 Tangentes à une conique

Les coniques sont bien évidemment des courbes différentiables : en tout point elles admettent une tangente.

8.4.1 Cas de la parabole

Proposition 8.4.1 Soit Γ une parabole de foyer F , de directrice $\mathcal{D}$, $M \in \Gamma$ et H la projection orthogonale de M sur $\mathcal{D}$. La tangente (T) à Γ au point M est la médiatrice de (M, H) . Autrement dit (T) est bissectrice de (MF, MH) .

DÉMONSTRATION : On va donner une démonstration analytique. $\square$

Remarque : Cette propriété est la cause de la « floraison » des antennes paraboliques sur nos toits : si l'axe de la parabole est dirigée vers l'émetteur, suffisamment éloigné pour que les rayons émis puissent être considérés comme parallèle à l'axe, ceux-ci sont tous réfléchis au foyer de celle-ci, là où se situe la tête de réception.

8.4.2 Coniques à centre

Proposition 8.4.2 Soit Γ une conique de foyers F et F' , $M \in \Gamma$. La tangente (T) à Γ au point M est la bissectrice de (MF, MF') .

DÉMONSTRATION : laissée au lecteur. $\square$

Remarque : Dans les stations de métro parisiennes, la forme de la voûte est celle d'une ellipse dont les foyers se situent sur les quais ; cette disposition est voulue car elle permettrait aux employés de se parler d'un quai à l'autre sans être obligé de traverser les voies : en effet tout onde émise d'un foyer est réfléchi par l'ellipse vers l'autre foyer.

Proposition 8.4.3 Soit Γ une conique d'équation réduite $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$. La tangente à Γ au point $M(x_0, y_0) \in \Gamma$ a pour équation

$$\frac{x x_0}{a^2} \pm \frac{y y_0}{b^2} = \pm 1.$$

(méthode de doublement des coordonnées).

DÉMONSTRATION : Un vecteur normal à l'ellipse en M est donné par $\nabla f = (\frac{2x_0}{a^2}, \pm \frac{2y_0}{b^2})$. L'équation de la tangente est alors $(x - x_0)\frac{x_0}{a^2} \pm (y - y_0)\frac{y_0}{b^2}$, d'où le résultat annoncé. $\square$

8.4.3 Ellipse et affinité

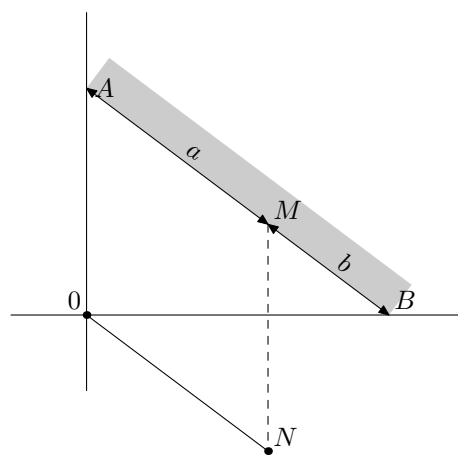
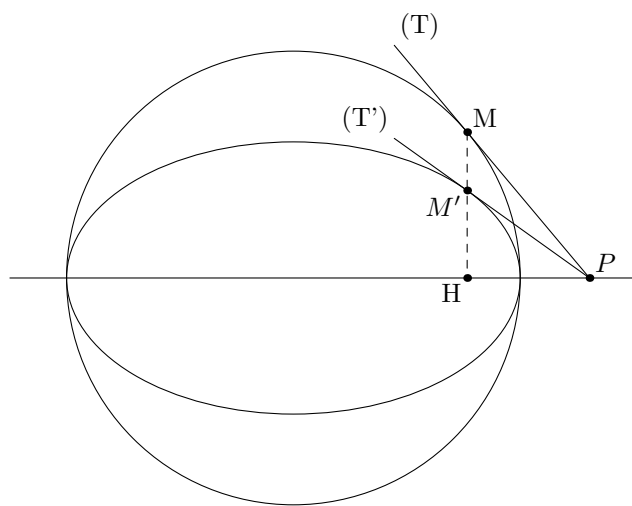
Soit (E) une ellipse de sommets principaux A et A' ; le cercle de diamètre AA' est appelé cercle principal de (E) .

Proposition 8.4.4 L'ellipse (E) est l'image du cercle principal par une affinité d'axe AA' et de rapport convenable.

DÉMONSTRATION : Si (E) a pour équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, le cercle principal a pour équation $x^2 + y^2 = a^2$ et l'affinité d'axe AA' et de rapport b/a convient. $\square$

Remarque : On peut aussi transformer le cercle $x^2 + y^2 = b^2$ par une affinité d'axe $(O, \vec{j})$ et de rapport a/b pour obtenir (E) .

Corollaire 8.4.5 On en déduit la construction suivante de la tangente à (E) : la tangente au cercle en M recoupe l'axe focal en P : la tangente à l'ellipse en M' est l'image de (T) par l'affinité qui est la droite PM' puisque P est invariant par l'affinité.



La construction suivante, dite *méthode de la bande de papier* permet le tracé de l'ellipse point par point.

Corollaire 8.4.6 On marque sur une bande de papier 3 points A, M, B dans cet ordre tels que $AM = a$ et $MB = b$; lorsqu'on fait glisser la bande de papier de façon que A décrive $(O; \vec{j})$ et B décrive $(O; \vec{i})$ le point M décrit l'ellipse d'axes a et b .

DÉMONSTRATION : Soit N tel que $OAMN$ soit un parallélogramme; le point N décrit le cercle de centre O et de rayon a et d'après le théorème de Thalès $\frac{HM}{HN} = \frac{HO}{HB} = \frac{MB}{ON} = \frac{b}{a}$. Le lieu de M est

l'image du cercle par une affinité.

□

8.5 Exercices

1. a) Soient a, b, c, d, e, f des réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$. On considère la courbe Γ définie par $ax^2 + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$. Réduire cette équation et montrer que Γ est une conique en général. Etudier les cas de dégénérescence.

b) Montrer que par un changement de repère par rotation, le cas de l'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ se ramène au précédent. Montrer que le genre de la conique correspondante est intimement lié à la nature de la forme quadratique de matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

2. a) Déterminer foyer et directrice pour une parabole définie par $y = ax^2 + bx + c$. Vérifier par le calcul que $MF = MH$ pour tout point M .

b) Même question pour une hyperbole (H) $xy = k$; on pourra remarquer que l'excentricité de (H) est égale à $\sqrt{2}$.

3. Démontrer la Proposition 8.4.1 en dérivant $MF-MH$ comme dans la Proposition 8.4.2.

4. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O , F un point intérieur à $\mathcal{C}$ distinct de O et F' le symétrique de F par rapport à O .

a) Montrer que l'ensemble des points ω centre d'un cercle (C) contenant F et tangent (intérieurement) à $\mathcal{C}$ est une ellipse Γ de foyer F et F' . Le cercle $\mathcal{C}$ est appelé *cercle directeur* de l'ellipse.

b) Donner une construction simple de la tangente à Γ à partir de son cercle directeur.

c) Reprendre le problème dans le cas où F est un point extérieur à $\mathcal{C}$.

5. Soit une famille des droites $\mathcal{D}$: on appelle *enveloppe* de la famille de droite (si cela existe) une courbe (C) telle que que chacune des droites $\mathcal{D}$ soit tangente à (C).

a) Soit Δ une droite fixe, $F \notin \Delta$ un point fixe, enveloppe de la médiatrice de (M,F) lorsque M parcourt Δ ?

b) Soit $\mathcal{C}$ un cercle fixe, $F \notin \mathcal{C}$ un point fixe, enveloppe de la médiatrice de (M,F) lorsque M parcourt $\mathcal{C}$? On pourra utiliser l'exercice 4.

6. Dans la construction par la méthode de la bande de papier, si on appelle φ l'angle entre la bande de papier et l'axe $(O, \vec{j})$, montrer que la construction donne la paramétrisation $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$.

7. Soit Γ une conique de foyer F d'excentricité e . On considère les coordonnées polaires dans un repère $(F, \vec{u})$ avec $\vec{u}$ unitaire et normal à la directrice $\mathcal{D}$. Montrer que Γ a une équation en polaire de la forme $\rho = \frac{p}{1 \pm e \cos \theta}$ où p (appelé *paramètre* de la conique) est l'ordonnée du point de F ayant même abscisse que le foyer.