Université François Rabelais Tours **2009-2010**

L2 SM **Mathématiques UE 302**

Examen terminal du 15/12/2009

Les documents ne sont pas autorisés.

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie

Durée : 2 heures

Exercice 1: Pour tout entier $n \geq 1$ soit f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par l'expression $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x+n}}$.

1. Pour $n \geq 1$, donner le maximum M_n de la fonction f_n sur $[0, +\infty[$.
2. Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite de fonctions (f_n)?
3. On considère la série de fonctions
$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{x+n}}.$$
4. Montrer que S converge simplement sur $[0, +\infty[$.
5. Justifier le fait que la convergence n'est pas normale sur $[0, +\infty[$.
6. Montrer que S converge uniformément sur $[0, +\infty[$.
7. Montrer que la fonction somme S est continue sur $[0, +\infty[$ et donner sa limite en $+\infty$.
8. Exprimer $\int_0^1 S(x)dx$ comme une série numérique alternée.

Exercice 2: On considère un réel a et la série S entière de variable $x \in \mathbb{R}$ définie par
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+a)^2 x^n.$$

1. Donner le rayon de convergence de S.
2. En déduire, après justification, le plus grand intervalle I de $\mathbb{R}$ où la série est convergente.
3. Justifier l'égalité
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$$
4. Exprimer sur I les séries entières suivantes à l'aide de fonctions usuelles
$$S_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n \text{ et } \quad S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)x^n.$$
5. Vérifier que $(n+a)^2 = (n+2)(n+1) + (2a-3)(n+1) + (a-1)^2$.
6. En déduire l'expression de $S(x)$ en termes des fonctions usuelles.

Exercice 3: On considère la fonction f périodique de période 2π égale à $f(x) = \pi^2 - x^2$ pour $x \in [-\pi, \pi]$.

1. Représenter la fonction f sur $[-\pi, \pi]$ puis sur $[-3\pi, 5\pi]$.

2. Justifier que f est paire et qu'elle est continue. Que peut-on en déduire pour les coefficients de Fourier b_n.

3. En effectuant deux intégrations par parties successives, montrer que les coefficients de Fourier a_n sont donnés par

$$a_0 = \frac{4}{3} \text{ et } a_n = (-1)^{n+1} \frac{4}{n^2} \text{ pour } n \geq 1$$

   où l'on a utilisé la formule

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x)dx = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx$$

   pour le coefficient a_0.

4. Appliquer l'égalité de Parceval. En déduire la somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \frac{2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(nx). \tag{1}$$

6. En déduire les sommes des séries $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.