

Examen deuxième session de juin 2010

Les documents ne sont pas autorisés.

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie

Durée : 2 heures

Exercice 1: Pour tout entier $n \geq 0$ soit f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par l'expression

$$f_n(x) = \frac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)}.$$

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) .

2. Montrer que

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx} - \frac{1}{1+(n+1)x}.$$

3. Soit pour tout $n \geq 0$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$. Montrer que

$$S_n(x) = 1 - \frac{1}{1+(n+1)x}.$$

4. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$. La convergence de la série de fonctions est-elle uniforme sur $[0, +\infty[$?

5. Soit a un réel strictement positif. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Exercice 2: Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $a_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

1. Justifier que pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \geq 0$, on a $\frac{1}{e}x^n \leq x^n e^{-x} \leq x^n$.

2. En déduire l'encadrement

$$\frac{1}{e(n+1)} \leq a_n \leq \frac{1}{(n+1)}.$$

3. Quel est le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e(n+1)} x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)} x^n$?

4. En déduire le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Exercice 3: On considère la fonction f périodique de période 2π égale à $f(x) = x$ pour $x \in]-\pi, \pi]$.

1. Représenter la fonction f sur $] -\pi, \pi]$ puis sur $] -3\pi, 5\pi]$. Est-elle continue ?
2. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f .
3. Appliquer l'égalité de Parseval. En déduire la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.
4. Quelles égalités peut-on obtenir en appliquant le théorème de Dirichlet à la fonction f .
5. Justifier que la série $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2p+1}$ converge.
6. Calculer sa somme en utilisant la question 4.