Université François Rabelais **2014-2015**

L3 Mathématiques

Algèbre: Contrôle continu du 9/12/14

Durée: une heure

Aucun document ni machine autorisé

Exercice 1: Question de cours :

1. Soit G un groupe d'ordre 35 agissant sur un ensemble à 13 éléments. Quels sont les cardinaux possibles pour les orbites de cette action de groupe ? Justifier qu'il y au moins un point fixe pour cette action.
2. Enoncer le premier théorème de Sylow vu en cours.
3. Soit G un groupe d'ordre 21. Justifier que G possède un élément a d'ordre 3 et un autre b d'ordre 7. Si G est abélien que dire de l'ordre de ab ? Conclure.

Exercice 2:

1. Soit dans $\mathfrak{S}_{10}$
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 2 & 7 & 9 & 6 & 10 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$
Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints. Calculer $\sigma^{-1}, \sigma^{2014}$ puis $\varepsilon(\sigma)$.
2. Dans $\mathfrak{S}_n$, quelle relation lie $\varepsilon(\sigma)$ et $\varepsilon(\sigma^{-1})$, pourquoi ?
3. Justifier que
$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) = 0.$$
4. On se donne $\delta : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$ un morphisme surjectif.
   (a) Prouver que $\delta(\sigma) = \delta(\sigma^{-1})$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
   (b) Justifier que toute transposition $(a, b) \in \mathfrak{S}_n$ est conjuguée à la transposition $(1, 2)$.
   (c) En déduire que $\delta = \varepsilon$.