

Algèbre: Contrôle continu du 14/10/14

Durée 25 minutes

Aucun document ni machine autorisé

Exercice 1: Question de cours :

1. Définition d'un sous-groupe H de G .
2. Définition du noyau et de l'image d'un morphisme de groupes $f : G \rightarrow G'$.
3. Énoncer le théorème de Lagrange.
4. Soit H un sous-groupe de G . Qu'appelle-t-on classe à droite de $g \in G$ dans H ? Que se passe-t-il si $g \in H$.

Exercice 2: Pour chacun des ensembles E suivants, dire si il s'agit d'un groupe pour la loi indiquée (lorsque c'est le cas, on précisera son élément neutre et on indiquera si le groupe est abélien).

1. $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ muni de la multiplication des nombres complexes.
2. $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ muni de l'addition des nombres complexes.
3. $E = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det(M) = 1\}$. Attention, les matrices considérées sont à coefficients dans \mathbb{Z} .

Exercice 3: On rappelle que pour tout entier $n \geq 1$, $C_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ est le groupe des racines n -ièmes de 1.

1. Expliciter le groupe C_4 et en donner tous les sous-groupes.
2. Quels sont les sous-groupes du groupe C_5 .
3. Montrer que C_8 possède un sous-groupe H isomorphe à C_4 et décrire C_4/H .