

UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE
Faculté des sciences de Luminy
Institut de Mathématiques de Luminy

THÈSE

présentée en vue de l'obtention du grade de
Docteur de l'Université de la Méditerranée
Spécialité : Mathématiques

par

Yann Jullian

**Représentation géométrique des systèmes
dynamiques substitutifs par
substitutions d'arbre**

Soutenue le samedi 4 juillet 2009 devant un jury composé de

| | | |
|-------------------------|-------------------------------------|--------------------|
| Valérie Berthé | LIRMM, Université Montpellier 2, | rapporteur |
| Xavier Bressaud | IMT, Université Toulouse III, | directeur de thèse |
| Julien Cassaigne | IML, Université Aix-Marseille II, | examineur |
| Fabien Durand | LAMFA, Université de Picardie, | examineur |
| Gilbert Levitt | LMNO, Université de Caen, | examineur |
| Martin Lustig | LATP, Université Aix-Marseille III, | examineur |

au vu des rapports de

| | |
|-----------------------|----------------------------------|
| Valérie Berthé | LIRMM, Université Montpellier 2, |
| Richard Kenyon | Brown University - USA |

Remerciements

J'exprime ma reconnaissance à mon directeur de thèse, Xavier Bressaud, qui a joué un rôle non négligeable dans ma décision d'entreprendre une thèse. Toujours enthousiaste et intéressé, il a su me guider efficacement lorsque je ne savais plus où aller.

J'adresse un remerciement spécial à Richard Kenyon, qui m'a fait l'honneur d'accepter rapidement le travail de rapporteur, alors qu'il n'avait, jusqu'alors, aucune idée de mon existence. Je remercie également Valérie Berthé ; je suis très content qu'elle ait pris le temps de rapporter cette thèse.

Merci à Gilbert Levitt et Martin Lustig (qui à eux deux constituent la moitié de ma bibliographie), à Fabien Durand (qui aime mes dessins!), et à Julien Cassaigne (qui a pris le temps de répondre à mes questions naïves, et qui est resté tout au long d'une répétition d'exposé catastrophique!), d'avoir accepté sans hésiter de faire partie de mon jury.

Merci à Thierry Coulbois et Arnaud Hilion, qui ont pris le temps de m'expliquer successivement, tout, puis le reste.

Petit kikoo à ma famille, qui continue de me supporter.

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction | 9 |
| 1 Combinatoire des mots | 21 |
| 1.1 Shift | 21 |
| 1.1.1 Full shift | 21 |
| 1.1.2 Espace de shift | 21 |
| 1.1.3 Langage | 22 |
| 1.1.4 Code à fenêtre glissante | 22 |
| 1.1.5 Shift de type fini | 23 |
| 1.2 Eclatement et amalgamation d'états | 25 |
| 1.2.1 Matrices d'incidence | 27 |
| 1.2.2 Amalgamation idéale | 30 |
| 1.2.3 Graphes pondérés | 32 |
| 1.2.4 Equivalence de shift | 35 |
| 1.3 Système dynamique | 35 |
| 1.4 Substitutions | 36 |
| 1.4.1 Abélianisé | 36 |
| 1.4.2 Substitution de type Pisot | 37 |
| 1.4.3 Système dynamique substitutif | 37 |
| 1.5 Automate et développement en préfixes-suffixes | 37 |
| 1.5.1 Désubstitution et développement en préfixes-suffixes | 37 |
| 1.5.2 Automate des préfixes-suffixes | 38 |
| 1.5.3 Propriétés remarquables de Γ | 39 |
| 1.5.4 Développements et shiftés | 39 |
| 1.6 Fractal de Rauzy | 40 |
| 2 Arbres réels, groupes libres, automorphismes | 43 |
| 2.1 Définitions | 43 |
| 2.1.1 Arbres réels | 43 |
| 2.1.2 Le groupe libre et son bord | 43 |
| 2.1.3 Action de groupe | 44 |
| 2.2 Automorphismes de groupes libres | 44 |
| 2.2.1 Représentant train-track d'un automorphisme iwip | 45 |
| 2.3 Arbre invariant d'un automorphisme | 47 |
| 2.3.1 Application Q | 48 |
| 3 Points fixes et automates des préfixes-suffixes | 49 |
| 3.1 Le cas des automorphismes positifs | 50 |
| 3.2 Propriétés de l'automate des préfixes-suffixes | 52 |
| 3.3 Reconnaissance de points fixes | 54 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.4 | Un exemple | 56 |
| 4 | Arbres simpliciaux | 59 |
| 4.1 | Définitions générales | 59 |
| 4.1.1 | Notations | 59 |
| 4.1.2 | Propriétés de $\mathcal{S}_0(A)$ | 60 |
| 4.1.3 | Récurrence | 61 |
| 4.2 | Substitutions | 61 |
| 4.2.1 | Point fixe de substitution | 62 |
| 4.2.2 | Points fixes pertinents | 66 |
| 4.2.3 | Abélianisation | 66 |
| 4.2.4 | Discernement | 67 |
| 4.3 | Dynamique | 69 |
| 5 | Substitutions sur des arbres réels | 73 |
| 5.1 | Constructions graphe-dirigées | 73 |
| 5.1.1 | Dimension de Hausdorff | 73 |
| 5.1.2 | Constructions graphe-dirigées | 74 |
| 5.1.3 | Multi-graphes | 75 |
| 5.2 | Un espace métrique adapté | 77 |
| 5.2.1 | Produit libre de copies de \mathbb{R} | 77 |
| 5.2.2 | Complété métrique de \mathcal{R}^k | 78 |
| 5.2.3 | Ensemble des arbres réels compacts | 78 |
| 5.3 | Substitutions sur des arbres réels | 79 |
| 5.3.1 | Substitutions | 79 |
| 5.3.2 | Sous-shift de type fini d'une substitution | 80 |
| 5.3.3 | Substitutions bornées et simplement bornées | 80 |
| 5.3.4 | Propriétés des substitutions | 81 |
| 5.4 | Etude des compacts limites | 82 |
| 5.4.1 | Exemple | 83 |
| 5.5 | Substitutions d'arbre simplicial et réalisations | 85 |
| 5.5.1 | Réalisations | 85 |
| 5.5.2 | Choisir la bonne métrique | 85 |
| 6 | Constructions de cœurs compacts par substitutions d'arbre | 89 |
| 6.1 | Premier exemple | 89 |
| | Enoncés des résultats de la section 6.1 | 89 |
| 6.1.1 | Abélianisé et points périodiques | 92 |
| 6.1.2 | Points fixes de la classe extérieure | 93 |
| 6.1.3 | Automate des préfixes-suffixes | 93 |
| 6.1.4 | Facteurs spéciaux | 95 |
| 6.1.5 | Une caractérisation du shift unilatéral | 97 |
| 6.1.6 | Arbre invariant de σ^{-1} | 98 |
| 6.1.7 | Substitution d'arbre | 99 |
| 6.1.8 | De $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$ à Ω_0^+ | 104 |
| 6.1.9 | Les points fixes dans l'arbre | 108 |
| 6.1.10 | Injection de L dans \overline{T} | 110 |
| 6.1.11 | Cœur et cylindres | 113 |
| 6.1.12 | Cœur et fractal de Rauzy | 120 |
| 6.2 | Deuxième exemple | 121 |

| | |
|---|-----|
| Différences principales avec le premier exemple | 121 |
| Enoncés des résultats de la section 6.2 | 123 |
| 6.2.1 Abélianisé et points périodiques | 126 |
| 6.2.2 Points fixes de la classe extérieure | 126 |
| 6.2.3 Automate des préfixes-suffixes | 126 |
| 6.2.4 Facteurs spéciaux | 128 |
| 6.2.5 Une caractérisation du shift unilatéral | 130 |
| 6.2.6 Arbre invariant de σ^{-1} | 132 |
| 6.2.7 Substitution d'arbre | 134 |
| 6.2.8 De $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$ à $\Omega_0^+ \cup \Omega_{g,1}^+$ | 139 |
| 6.2.9 Les points fixes dans l'arbre | 146 |
| 6.2.10 Injection de L dans \overline{T} | 146 |
| 6.2.11 Une première décomposition de L_n | 150 |
| 6.2.12 D'autres décompositions de L_n | 156 |
| 6.2.13 Cœur et fractal de Rauzy | 158 |
| 6.3 Vers des cas plus généraux | 163 |
| 6.4 Quelques conjectures | 164 |
| Références | 167 |

Introduction

On distingue deux grandes classes de systèmes symboliques ; les shifts de type fini, et les systèmes substitutifs. Les derniers sont souvent de bons candidats pour décrire des systèmes auto-similaires, c'est-à-dire des systèmes dont la dynamique globale se retrouve localement par l'application premier retour. On se pose ici le problème inverse ; étant donné un système dynamique substitutif, peut-on interpréter géométriquement sa dynamique ? Cette question a été largement étudiée et abordée sous des angles multiples, et chaque méthode vient avec son propre jeu de restrictions. On citera par exemple les fractals de Rauzy ou les échanges d'intervalles, dont la dynamique symbolique est engendrée par un échange de domaines. Une condition suffisante pour l'existence d'un fractal de Rauzy (et d'un échange de domaines défini à ensembles de mesures nulles près sur ce fractal) est donnée dans [6] et [23] (chapitre 3) ; si la matrice d'incidence de la substitution est unimodulaire Pisot et si la substitution vérifie la condition de forte coïncidence, alors on peut définir un fractal de Rauzy qui supporte la dynamique de la substitution. Dans le cas des échanges d'intervalles, la matrice d'incidence de la substitution doit être symplectique. En règle générale, la question de l'existence d'un fractal de Rauzy (et d'un échange de domaines bien défini) ou d'un échange d'intervalles, est encore largement ouverte. On note que ces représentations sont basées sur la minimalité des systèmes dynamiques symboliques engendrés par une classe de substitutions ; les substitutions primitives. On rappellera les propriétés les plus importantes de ces systèmes dans le chapitre 1.

Toute substitution sur un alphabet A peut s'étendre en un endomorphisme du groupe libre de base A . Tandis que la théorie générale des endomorphismes de groupe libre est encore incertaine, celle des automorphismes est beaucoup plus développée, et c'est dans ce cadre que nous nous placerons. En général, la dynamique engendrée par un automorphisme est plus compliquée que celle d'une substitution ; des annulations peuvent se produire. Dans [4], M. Bestvina et M. Handel donnent des méthodes pour contrôler ces annulations, et définissent notamment les représentants topologiques (applications $f : G \rightarrow G$, où G est un graphe topologique) train-track des automorphismes de groupe libre. Pour une métrique bien choisie sur G , une application train-track étend uniformément les arcs de G (en multipliant leurs longueurs par un facteur constant). Quelques unes de ces notions sont énoncées dans le chapitre 2.

Se servant de ces résultats, D. Gaboriau, A. Jaeger, G. Levitt et M. Lustig associent dans [10] un arbre réel T_α à tout automorphisme α de groupe libre. Il est de plus montré que le groupe libre agit (par isométries) sur ces arbres de manière non-triviale, minimale, avec des stabilisateurs d'arcs triviaux. Lorsque le facteur d'extension du train-track représentant α (s'il existe) est > 1 , l'action est à orbites denses. Rejoignant les travaux de G. Levitt et M. Lustig dans [14], on peut alors construire une application équivariante surjective Q de ∂F dans $\overline{T_\alpha} \cup \partial T_\alpha$. D'autres définitions de cette application peuvent être trouvées dans [7] et [8]. Dans [8], elle est utilisée pour définir un compact (l'ensemble limite ou cœur) ($\subset \overline{T}$) associé à tout arbre T défini avec une action (par isométries) très petite, minimale, et à orbites denses ; ce compact joue un rôle important dans l'approximation de T par des systèmes d'isométries.

Une substitution primitive inversible (qui s'étend en un automorphisme de groupe libre) σ engendre un système dynamique symbolique minimal (Ω, S) , où $\Omega \subset A^{\mathbb{Z}}$ et S est l'application

shift sur $A^{\mathbb{Z}}$. Ω contient souvent des paires de mots (u, v) , avec $u_{-1} \neq v_{-1}$ (resp. $u_0 \neq v_0$) et $u_i = v_i$ pour tout $i \geq 0$ (resp. $i < 0$). Il est montré dans [10] (théorème 1') que ces paires sont en nombre fini ; le théorème explicite même une borne, et il ne se restreint pas aux substitutions primitives inversibles. Dans le chapitre 3, nous nous basons sur ce résultat pour donner une méthode de reconnaissance de ces paires de mots (dans le cas des substitutions primitives inversibles). Nous nous servons pour cela d'un outil propre aux substitutions : l'automate des préfixes-suffixes (cf. [5] et [23] (chapitre 2)).

Le chapitre 4 définit une nouvelle notion : les substitutions d'arbre. Dans un premier temps, la définition donnée est purement combinatoire, et on peut voir ces constructions comme des généralisations des substitutions (sur les mots) ; notamment, toute substitution induit naturellement une substitution d'arbre. On commence par étudier les problèmes posés par ces définitions, et on essaie de trouver des équivalents aux théorèmes connus sur les mots. Principalement, si une substitution σ est primitive, on peut construire un système dynamique minimal et uniquement ergodique (Ω^+, S) , où Ω^+ est l'adhérence des shiftés d'un point fixe (ou périodique) quelconque de σ et S est l'application shift. La seule adaptation de l'application shift sur les arbres est un problème en soit, puisque, étant donné un sommet quelconque d'un arbre, il existera très souvent plus de deux manières de se déplacer. On se posera également la question de la recherche de points fixes de substitutions d'arbre, et on essayera de retrouver un équivalent des systèmes minimaux dans le cas des substitutions d'arbre primitives.

Le rôle principal de ces substitutions d'arbre est de donner un moyen simple de construire des arbres réels supportant des dynamiques engendrées par certaines substitutions (chapitres 5 et 6). On montre dans le chapitre 5 que les arbres obtenus sont des compacts auto-similaires invariants par constructions graphe-dirigées (au sens de [17]). On associera un arbre réel à tout arbre simplicial. La substitution d'arbre produira ainsi une suite convergente d'arbres réels et on s'intéressera à l'arbre limite.

Etant donnée une substitution, l'objectif est de construire une substitution d'arbre, et d'obtenir grâce à elle un arbre réel auto-similaire et une partition de celui-ci ; cette partition nous permettra de définir un échange de domaines conjugué au système dynamique engendré par la substitution initiale. L'objet principal du chapitre 6 est de proposer une telle construction pour deux familles particulières d'exemples. On définira des ensembles de substitutions σ_d primitives inversibles. Considérant celles-ci comme des automorphismes de groupe libre, on définira l'arbre T_d de [10] associé à l'automorphisme σ_d^{-1} , inverse de σ_d . On obtiendra, par substitution d'arbre, un compact borné de $\overline{T_d}$, le complété métrique de T_d . Ce compact supportera la dynamique symbolique engendrée par σ_d ; il est également à rapprocher de l'ensemble limite décrit dans [8].

Dynamique symbolique

On étudiera les shifts de type fini dans un premier temps, et les systèmes substitutifs par la suite. Notre utilisation des résultats sur les shifts de type fini sera inhabituelle ; on s'en servira pour donner des résultats sur les constructions graphe-dirigées définies dans [17]. On discutera plus amplement de ces constructions par la suite ; l'idée principale est de construire des ensembles compacts autosimilaires par un jeu de similitudes dans un espace métrique complet. Une construction graphe-dirigée produit un vecteur de compacts ; c'est l'invariant de construction. On mettra l'accent sur la comparaison des shifts de type fini. Deux shifts sont conjugués si on peut passer de l'un à l'autre par un recodage inversible (ce sont les applications à fenêtre glissante) ; on voudra pouvoir reconnaître et créer des shifts conjugués. En adaptant un peu les techniques utilisées dans le cadre des shifts de type fini, on pourra grandement simplifier certaines constructions graphe-dirigées, tout en conservant la totalité de l'information. Plus précisément, on obtiendra des constructions dont l'invariant ne contient aucune paire de compacts homothétiques.

La seconde partie du chapitre 1 rappelle quelques résultats sur les systèmes dynamiques substitutifs. On étudiera notamment les systèmes minimaux engendrés par les substitutions primitives, et on s'attardera sur la définition de l'automate des préfixes-suffixes (en particulier dans le cas primitif) définis dans [5] et [23] (chapitre 2) par V. Canterini et A. Siegel. Cet objet est crucial pour les chapitres 3 et 6.

On terminera le chapitre en donnant une définition des fractals de Rauzy. Sous certaines conditions (suffisantes) ils seront définis avec un échange de domaines (modulo des ensembles de mesures de Lebesgue nulle) qui induit la dynamique symbolique associée à une substitution.

Shifts de type fini

A étant un alphabet fini, on note A^* le monoïde libre (ensemble des mots finis sur A) associé, et $A^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des mots bi-infinis $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ indicés sur \mathbb{Z} . On note S l'application shift sur $A^{\mathbb{Z}}$; pour tout $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de $A^{\mathbb{Z}}$, $S(x) = (x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$. S est inversible sur $A^{\mathbb{Z}}$ et on note S^{-1} son inverse. Un espace de shift, ou simplement shift, est un ensemble $X_{\mathcal{F}} \subset A^{\mathbb{Z}}$ où $\mathcal{F} \subset A^*$ est un ensemble de mots interdits et $X_{\mathcal{F}}$ est l'ensemble des mots de $A^{\mathbb{Z}}$ qui ne contiennent aucun mot de \mathcal{F} . Tout espace de shift est invariant sous l'action du shift S .

On s'intéresse à une classe particulière d'espace de shift appelés shift de type fini. Un ensemble X est un shift de type fini s'il existe un ensemble fini \mathcal{F} tel que $X = X_{\mathcal{F}}$. Dans [16], D. Lind et B. Marcus donne des méthodes pour comparer les shifts de type finis. En effet, la définition des shifts de type fini est fortement dépendante de l'alphabet considéré, et le problème de base est de savoir si deux shifts de type fini représente le même espace.

Soit X un shift de type fini (sur un alphabet A). Pour tout entier k , on note $\mathcal{L}_k(X) \subset A^*$ l'ensemble des mots de longueurs contenus dans les mots de X . Si \mathcal{U} est un alphabet, et m, n deux entiers tels que $-m < n$, une application Φ à fenêtre fixe est une application de $\mathcal{L}_{m+n+1}(X)$ dans \mathcal{U} .

Définition i Une *application à fenêtre glissante* est une application $\phi : X \rightarrow \mathcal{U}^{\mathbb{Z}}$ qui à x associe $y = \phi(x)$ avec $y_i = \Phi(x_{i-m} \dots x_{i+n})$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

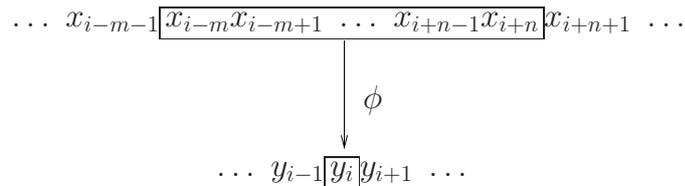


FIG. 1: Application à fenêtre glissante.

Définition ii Deux espaces de shift X et Y sont dits *conjugués* s'il existe une application à fenêtre glissante inversible $\phi : X \rightarrow Y$.

La recherche de conjugaison entre espaces de shifts repose sur la représentation de ceux-ci par des graphes. Un graphe G est défini par un couple (V, E) , où V est un ensemble de sommets, et E est une partie de $V \times V$; pour toute arête e de E , on note $i(e)$ son sommet initial et $t(e)$ son sommet terminal. Tout graphe (fini) G définit un shift de type fini X_G de la manière suivante :

$$X_G = \{\xi = (\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in E^{\mathbb{Z}} : t(\xi_i) = i(\xi_{i+1}) \forall i \in \mathbb{Z}\}.$$

Réciproquement, tout shift de type fini peut être décrit par l'ensemble des chemins bi-infinis sur des graphes.

On définit les éclatements d'états élémentaires entrant. Il s'agit de choisir un sommet s d'un graphe G et de le dédoubler en suivant les règles suivantes :

- les arêtes non adjacentes de s sont inchangées,
- les arêtes sortantes (dont s est le sommet initial) sont inchangées,
- on crée un nouveau sommet t ; ses arêtes sortantes sont des copies de celles de s ,
- les arêtes entrantes de s (du graphe initiale) sont distribuées arbitrairement entre s et t .

Les éclatements d'états entrant seront simplement une suite d'éclatements d'états élémentaires entrant, et on peut définir de manière similaire les éclatements d'états sortant. Par la suite, on sera plus intéressé par l'application inverse de l'éclatement d'état : l'amalgamation d'état. Procéder à une amalgamation élémentaire entrante consiste simplement à choisir 2 sommets s et t dont les arêtes sortantes correspondent, et à les fusionner en s ; une seule copie de l'ensemble des arêtes sortantes est conservée, et l'ensemble des arêtes entrantes de s dans le nouveau graphe est l'union des arêtes entrantes dans s et t dans l'ancien graphe. Le théorème de R. F. Williams ([24]) répond complètement au problème de la comparaison des shifts de type fini.

Théorème iii *Toute conjugaison d'un shift à un autre peut être obtenue par une suite d'éclatement et d'amalgamation.*

Les résultats énoncés jusqu'à présent peuvent être retrouvés dans [16] et [2].

On introduit quelques nouvelles notions afin que l'adaptation de ces résultats aux constructions graphe-dirigées se fasse facilement. L'un des problèmes posés est celui de la simplification maximale des graphes (par rapport au nombre de sommets). Si H est un graphe quelconque, on appelle amalgamation idéale entrante de H , le graphe G obtenu par une suite d'amalgamations entrantes de H et tel qu'aucune autre amalgamation entrante ne peut être effectuée. L'existence d'une telle amalgamation ne fait aucun doute puisque toute amalgamation réduit strictement le nombre de sommet. On montrera en plus que cette amalgamation idéale entrante est unique.

Un autre aspect important est la représentation matricielle des graphes. Pour ce qui concerne les constructions graphe-dirigées, les dimensions de Hausdorff des compacts constituants le vecteur invariant sont essentiellement données par la matrice d'incidence du graphe. On étend la définition des amalgamations aux graphes pondérés (un réel est associé à chaque arête du graphe) et on montre le résultat suivant.

Proposition iv *Soit H un graphe pondéré à n sommets, et G une amalgamation de H à m sommets. On note M_H et M_G leurs matrices d'incidence respectives. Le spectre de M_H est exactement constitué de celui de M_G et de la valeur propre 0 d'ordre $n - m$.*

Systèmes dynamiques substitutifs

Soit A un alphabet, A^* le monoïde libre associé, $A^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des mots infinis à droite indicés sur \mathbb{N} et $A^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des mots bi-infinis indicés sur \mathbb{Z} . On note S l'application shift sur $A^{\mathbb{N}}$ et $A^{\mathbb{Z}}$; l'image de $u = (u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ (resp. $u = (u_i)_{i \in \mathbb{Z}}$) par S est définie par $S(u) = (u_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$ (resp. $S(u) = (u_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$). Pour tout mot u de $A^{\mathbb{N}}$ ou $A^{\mathbb{Z}}$, on note $\mathcal{L}(u)$, et on l'appelle le langage de u , l'ensemble des mots de A^* contenus dans u .

Une substitution σ est un morphisme de monoïde qui envoie A sur $A^* \setminus \{\epsilon\}$ (ϵ représente le mot vide). La définition de σ s'étend naturellement sur $A^{\mathbb{N}}$ et $A^{\mathbb{Z}}$. On s'intéressera au cas où σ est primitive, c'est-à-dire que pour tout $a, b \in A$ il existe un entier k tel que b est une lettre de $\sigma^k(a)$.

Si ω est mot de $A^{\mathbb{N}}$ ou $A^{\mathbb{Z}}$ σ -périodique (il existe un entier k tel que $\sigma^k(\omega) = \omega$), on note Ω^+ (resp. Ω) l'ensemble des mots u de $A^{\mathbb{N}}$ (resp. $A^{\mathbb{Z}}$) tels que $\mathcal{L}(u) \subset \mathcal{L}(\omega)$. Si σ est une substitution primitive, Ω^+ (resp. Ω) ne dépend pas de ω . On dit alors que (Ω^+, S) et (Ω, S) sont les systèmes dynamiques symboliques engendrés par σ ; ces systèmes dynamiques sont minimaux et uniquement ergodiques.

Les résultats suivants sont énoncés dans [5] et [23] (chapitre 2). Pour toute substitution σ sur un alphabet A , on définit l'automate A_σ des préfixes-suffixes associé à σ ;

- A est l'ensemble des états de A_σ ; tous les états sont initiaux,
- P est l'ensemble des étiquettes,
- il existe une flèche entre les états a et b étiquetée (p, a, s) si $\sigma(b) = pas$.

On note D l'ensemble des suites infinies (indicées sur \mathbb{N}) d'étiquettes reconnues par l'automate.

Théorème v *Soit σ une substitution primitive non S -périodique (le langage des points périodiques de σ est infini), (Ω, S) le système dynamique symbolique (sur les mots bi-infinis) engendré par σ et Ω_{per} l'ensemble des mots σ -périodiques de Ω . Il existe une fonction Γ vérifiant :*

- Γ est continue surjective de Ω dans D ,
- Γ est injective sur $\Omega \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S^n(\Omega_{per})$,
- si $u \in \Omega \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S^n(\Omega_{per})$ et $\Gamma(u) = (p_i, a_i, s_i)_{i \in \mathbb{N}}$, alors

$$u = \dots \sigma^n(p_n) \dots \sigma^2(p_2) \sigma(p_1) p_0 a_0 s_0 \sigma(s_1) \sigma^2(s_2) \dots \sigma^n(s_n) \dots$$
- pour tout $d \in D$, $\#(\Gamma(\{d\})) \leq \#(\Omega_{per})$.

Cette application est construite explicitement en utilisant des résultats de [19] sur les désubstitutions. Pour terminer sur l'automate des préfixes-suffixes, on explicitera des moyens simples pour obtenir $\Gamma(\sigma(u))$ et $\Gamma(S(u))$ connaissant $\Gamma(u)$.

Arbres réels, groupes libres, automorphismes

Le but du chapitre 2 est la construction de l'arbre invariant d'un automorphisme défini dans [10] (on se restreint au cas iwip), et la définition de l'application Q définie dans [14].

On note F_n le groupe libre de rang $n \geq 2$. Une base A étant fixé, on peut voir $F_n = F(A)$ comme l'ensemble des mots réduits finis à lettres dans $A \cup A^{-1}$. Le bord de Gromov du groupe, noté $\partial F(A)$ peut être vu comme l'ensemble des mots réduits infinis à droites de $(A \cup A^{-1})^{\mathbb{N}}$. On munit $A \cup A^{-1}$ de la topologie discrète et $(A \cup A^{-1})^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit ; le bord $\partial F(A) \subset (A \cup A^{-1})^{\mathbb{N}}$ hérite de la topologie induite.

L'ensemble des automorphismes de F_n est noté $Aut(F_n)$. Pour tout élément w de F_n , on note i_w l'automorphisme de F_n défini pour tout élément g de F_n par $i_w(g) = w^{-1}gw$; on dit que i_w est un automorphisme intérieur ou une conjugaison. On note $Inn(F_n)$ l'ensemble des conjugaisons de F_n et on définit $Out(F_n) = Aut(F_n)/Inn(F_n)$; $Out(F_n)$ est l'ensemble des automorphismes extérieurs.

Définition vi *Un automorphisme ϕ de $Aut(F_n)$ est dit **iwip** si pour tout facteur libre (sous-groupe de F_n engendré par un sous-ensemble d'une base de F_n) F de F_n , et pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\phi^k(F)$ n'est pas un conjugué de F . Un automorphisme extérieur Φ est dit **iwip** s'il existe un automorphisme $\phi \in \Phi$ iwip ; dans ce cas, tous les éléments de Φ sont iwip.*

La première étape de la construction de l'arbre invariant d'un automorphisme est la construction d'un représentant topologique train-track. On suit ici le travail de M. Bestvina et M. Handel dans [4] ; il est basé sur la représentation des automorphismes de groupe libre par des équivalences d'homotopie sur des graphes topologiques.

A tout graphe simplicial (la donnée d'un ensemble de sommets et d'un ensemble d'arêtes), on peut associer un graphe topologique en remplaçant chaque arête par un arc topologique (un espace topologique homéomorphe à un intervalle de \mathbb{R}) et en identifiant les extrémités des arcs adjacents. Une équivalence d'homotopie $f : G \rightarrow G'$ entre deux graphes topologiques est une application continue qui induit un isomorphisme entre les groupes fondamentaux de G et G' . On appelle R_n le graphe topologique constitué d'un unique sommet $*$ et de n arcs topologiques. On identifie son groupe fondamental $\pi_1(R_n, *)$ avec F_n . Pour tout graphe topologique connexe,

il existe un unique entier n tel qu'il existe une équivalence d'homotopie τ (appelé le marquage) de R_n dans G . En considérant que τ induit l'identité entre $\pi_1(R_n, *)$ et $\pi_1(G, \tau(*))$, on identifie $\pi_1(G, \tau(*))$ et F_n . Si $\tau : R_n \rightarrow G$ est le marquage de G , et si f est une équivalence d'homotopie de G dans G , alors f induit un automorphisme de $\pi_1(G, \tau(*))$. Cet automorphisme est défini à conjugaison près puisque l'identification entre $\pi_1(G, \tau(*))$ et $\pi_1(G, f(\tau(*)))$ dépend du choix d'un chemin entre $\tau(*)$ et $f(\tau(*))$.

Définition vii Soit $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ un automorphisme extérieur. On appelle **représentant topologique** de Φ , une application $f : G \rightarrow G$, où G est un graphe marqué, telle que :

- l'image d'un sommet est un sommet,
- l'image d'un arc est un chemin (réduit) de G ,
- f induit Φ sur $F_n \simeq \pi_1(G, \tau(*))$ (en particulier, f est une équivalence d'homotopie).

Si f est un représentant topologique, l'image d'un arc est un chemin, mais l'image d'un chemin n'est pas nécessairement un chemin (des annulations peuvent avoir lieu). On définit donc les applications **train-track**.

Définition viii Une application **train-track** est un représentant topologique $f : G \rightarrow G$ d'un automorphisme de groupe libre tel que :

- G n'a pas de sommet de valence 1 ou 2,
- pour tout arc e et tout n , $f^n(e)$ est un chemin de G .

Ainsi, itérer f sur un arc ne produira pas d'annulations. Le théorème suivant est énoncé dans [4].

Théorème ix Tout automorphisme iwip possède un représentant topologique train-track.

Dans [10], les auteurs se servent des représentants topologiques train-track pour associer un arbre réel (muni d'une action du groupe libre par isométries) à tout automorphisme de groupe libre. Le théorème suivant y est énoncé.

Théorème x Pour tout automorphisme α du groupe libre F , il existe un arbre réel T tel que

- l'action de F sur T est non-triviale, minimale, les stabilisateurs d'arcs sont triviaux,
- il existe λ et une homothétie $H : T \rightarrow T$ de facteur λ telle que

$$\alpha(w)H = Hw : T \rightarrow T$$

pour tout $w \in F$.

Si $h_0 : G \rightarrow G$ est un représentant train-track d'un automorphisme extérieur Φ contenant α , sa matrice d'incidence est positive et le théorème de Perron-Frobenius s'applique ; on note λ la valeur propre dominante. On munit G de la métrique définie par un vecteur propre à gauche associé à λ . Cette métrique définit une distance d_0 sur un revêtement universel \tilde{G} de G , et F agit par isométries sur \tilde{G} . On choisit un relevé $h : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ de h_0 pour lequel $\alpha(w)h = hw$, quel que soit $w \in F$. L'arbre invariant T est défini comme l'espace métrique \tilde{G} muni de la distance d_∞ vérifiant, pour tout $x, y \in \tilde{G}$, $d_\infty(x, y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda^{-n} d_0(h^n(x), h^n(y))$. L'application $H : T \rightarrow T$ induite par h est une homothétie de rapport λ et vérifie $\alpha(w)H = Hw : T \rightarrow T$ pour tout $w \in F$.

Si $\lambda > 1$, on peut associer à T une fonction Q équivariante et surjective de ∂F dans $\overline{T} \cup \partial T$ (où \overline{T} est le complété métrique de T et ∂T son bord de Gromov). Cette application est introduite dans [14] pour tout arbre muni d'une action par isométries du groupe libre qui est minimale, à stabilisateurs d'arcs triviaux, et à orbites denses. La propriété principale de cette application est énoncée ci-dessous.

Propriété xi Soit $X \in \partial F$; pour tout Z de \overline{T} , si la suite $(X_n)_n$ de F tend vers X (lorsque $n \rightarrow +\infty$) et si la suite $(X_n Z)_n$ converge (lorsque $n \rightarrow +\infty$) vers un point R de \overline{T} , alors $R = Q(X)$.

Points fixes et automate des préfixes-suffixes

On se placera dans le groupe libre F_d muni d'une base quelconque. Pour tout automorphisme α de F_d , on définit $Fix(\alpha) = \{g \in F_d; \alpha(g) = g\}$. Un mot X de ∂F_d est un mot fixe attractif de α si pour tout X' dans un certain voisinage de X , $\lim_{p \rightarrow +\infty} \alpha^p(X') = X$. Deux mots fixes X_1 et X_2 sont équivalents s'il existe un élément g de $Fix(\alpha)$ tel que $X_2 = gX_1$ et on note $a(\alpha)$ le nombre de classes d'équivalence de mots fixes attractifs. Enfin, on dit que deux automorphismes α et β représentant le même automorphisme extérieur sont similaires s'il existe un mot du groupe libre F tel que $\beta = i_v \circ \alpha \circ (i_v)^{-1}$.

L'arbre invariant d'un automorphisme est en fait un outil utilisé pour compter le nombre de points fixes d'un automorphisme. Plus précisément, le théorème suivant est démontré dans [10] (théorème 1') :

Théorème xii *Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ des automorphismes de $Aut(F_d)$ représentant le même automorphisme extérieur et appartenant à des classes de similarité distinctes. Alors*

$$\sum_{i=0}^k (rk(Fix(\alpha_i)) + \frac{1}{2}a(\alpha_i) - 1) \leq n - 1.$$

Le chapitre 3 présente une nouvelle manière d'aborder le problème des points fixes dans le cas des substitutions primitives inversibles (qui s'étendent naturellement en automorphismes de groupe libre). On rappelle qu'une substitution primitive σ sur un alphabet A engendre un système dynamique minimal (Ω, S) , où $\Omega \subset A^{\mathbb{Z}}$ et S est l'application shift sur $A^{\mathbb{Z}}$. Si $u = (u_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est un mot bi-infini, alors $(u_i)_{i \in -\mathbb{N}^*}$ est appelé passé de u , et $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est appelé futur de u .

Définition xiii *On appellera **point fixe** (en opposition à mot fixe) un n -uplet, avec $n \geq 2$, $(u^{(1)}, \dots, u^{(n)})$ de mots fixes (par un automorphisme représentant le même automorphisme extérieur que σ) de Ω vérifiant soit*

- pour tout $1 \leq i \leq n$ et pour tout $k \in -\mathbb{N}^*$, $u_k^{(i)} = u_k^{(1)}$,
- les $u_0^{(i)}$ (premières lettres des futurs des $u^{(i)}$) sont deux à deux distincts,
- pour tout mot $v \in \Omega$, $v \neq u^{(i)}$ quel que soit $1 \leq i \leq n$, il existe un entier k de $-\mathbb{N}^*$ tel que $v_k \neq u_k^{(1)}$,

soit

- pour tout $1 \leq i \leq n$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k^{(i)} = u_k^{(1)}$,
- les $u_{-1}^{(i)}$ (dernières lettres des passés des $u^{(i)}$) sont deux à deux distincts,
- pour tout mot $v \in \Omega$, $v \neq u^{(i)}$ quel que soit $1 \leq i \leq n$, il existe un entier k de \mathbb{N} tel que $v_k \neq u_k^{(1)}$.

Dans le cas qui nous intéresse (substitutions primitives inversibles), le théorème xii peut alors être reformulé. σ désigne aussi bien une substitution primitive inversible que l'automorphisme associé.

Proposition xiv *Si $(u^{(1,1)}, \dots, u^{(n_1,1)}), (u^{(1,2)}, \dots, u^{(n_2,2)}), \dots, (u^{(1,p)}, \dots, u^{(n_p,p)})$ sont des points fixes de σ , alors $\sum_{1 \leq i \leq p} (n_i - 1) \leq 2n - 2$.*

Dans le chapitre 6, on voudra définir des échanges de domaines sur des arbres réels, et les points fixes seront à la base de cette définition. Essentiellement, deux domaines de l'arbre ont au plus 1 point commun (par connexité), et l'emplacement de ce point est complètement défini par un point fixe de l'automorphisme extérieur. L'arbre sera construit par substitution d'arbre (chapitre 4 et 5), et les développements en préfixes-suffixes de ces points fixes seront primordiaux à la définition de cette substitution d'arbre.

On obtient rapidement un premier théorème qui motive une étude plus approfondie du phénomène. σ est une substitution primitive inversible sur un alphabet A (l'automorphisme induit sur $F_d = F(A)$ est également noté σ), (Ω, S) est le système dynamique (sur les mots bi-infinis) engendré par σ , et Γ est la fonction qui associe une suite (infinie indicée sur \mathbb{N}) de l'automate des préfixes-suffixes à tout mot de Ω .

Théorème xv *Soit u un mot de Ω . Si u est un mot fixe par un automorphisme $i_w \circ \sigma^k$ (avec $w \in F_d$ et $k \in \mathbb{N}^*$), alors $\Gamma(u)$ est ultimement périodique de période $\leq k$. Réciproquement, si $\Gamma(u)$ est ultimement périodique, alors il existe $w \in F_d$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que u est fixe par $i_w \circ \sigma^k$.*

On note que σ^k est également une substitution primitive inversible qui engendre (Ω, S) , et on peut définir l'application Γ_k qui associe une suite de l'automate des préfixes-suffixes de σ^k à tout mot de Ω . Par définition, si $\Gamma(u)$ est ultimement périodique de période k , alors $\Gamma_k(u)$ est ultimement constante.

La remarque précédente permet de se ramener à des développements ultimement constants. De plus, il est facile de se rendre compte que si u et v de Ω sont fixes par un automorphisme commun $i_w \circ \sigma$, alors le couple (u, v) est un point fixe et réciproquement. Le chapitre se termine en répondant à la question suivante : si Φ est la classe extérieure de σ , et si u et v sont deux mots de Ω dont les développements en préfixes-suffixes (dans l'automate associé à σ) sont ultimement constants à (p, a, s) et (q, b, r) respectivement, existe-t-il un automorphisme de Φ qui fixe à la fois u et v .

Définition xvi *Soient γ_- et γ_+ les applications de F_d dans F_d définies, pour tout mot $v = v_0v_1 \dots v_{p-1}v_p$, par*

- $\gamma_-(v) = \sigma(v_p)v_0v_1 \dots v_{p-1}$,
- $\gamma_+(v) = v_1 \dots v_{p-1}v_p\sigma(v_0)$.

On démontrera le théorème suivant, qui répond à la question en donnant un moyen très simple de reconnaissance de points fixes.

Théorème xvii *On suppose que $\Gamma(u) = (p, a, s)^*$ et $\Gamma(v) = (q, b, r)^*$.*

- *S'il existe $h, k > 0$ tels que $\gamma_-^h(p) = \gamma_-^k(q) = w$, alors le couple $(S^{-h}(u), S^{-k}(v))$ forme un point fixe par $i_w \circ \sigma$; les deux mots ont un passé commun.*
- *S'il existe $h, k > 0$ tels que $\gamma_+^h(s) = \gamma_+^k(r) = w^{-1}$, alors le couple $(S^{h+1}(u), S^{k+1}(v))$ forme un point fixe par $i_w \circ \sigma$; les deux mots ont un futur commun.*

Réciproquement si le couple (u', v') forme un point fixe par $i_w \circ \sigma$ dont les mots ont un passé (resp. futur) commun, alors leurs développements sont ultimement constants de termes (p, a, s) et (q, b, r) avec $\gamma_-^h(p) = \gamma_-^k(q) = w$ (resp. $\gamma_+^h(s) = \gamma_+^k(r) = w^{-1}$) pour un certain couple h, k .

Arbres simpliciaux

Un arbre simplicial (graphe connexe sans cycles) est la donnée d'un couple (V, E) , où V est un ensemble de sommets et E est une partie de $V \times V \times A$ (où A est un alphabet); les arêtes sont orientées, et tout arbre est muni d'une racine. $\mathcal{S}_0(A)$ désigne l'ensemble des arbres finis (au sens du nombre d'arêtes) ainsi définis. On note $\mathcal{S}_E(A)$ l'ensemble des arbres de $\mathcal{S}_0(A)$ constitués d'une unique arête. Pour tout arbre X de $\mathcal{S}_0(A)$, V_X désignera l'ensemble des sommets de X et E_X l'ensemble de ses arêtes.

Si $A = \{a_0, \dots, a_k\}$, on note $\overline{A} = \{\overline{a_0}, \dots, \overline{a_k}\}$ et on définit pour tout arbre $X = (V_X, E_X)$ de $\mathcal{S}_0(A)$, l'application γ_X (auss appelé fonction chemin de X) de $V_X \times V_X$ dans $(A \cup \overline{A})^*$ telle que :

- si $(x, x', a) \in E_X$, alors $\gamma_X(x, x') = a$ et $\gamma_X(x', x) = \overline{a}$,

- si $(x, x_1, x_2, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}, x')$ est le plus court chemin de x à x' dans X , alors $\gamma_X(x, x') = \gamma_X(x, x_1)\gamma_X(x_1, x_2) \dots \gamma_X(x_{k-2}, x_{k-1})\gamma_X(x_{k-1}, x')$.

On donne ici une définition d'égalité qui ne prend pas en compte les sommets de l'arbre, mais seulement sa combinatoire. Etant donné deux arbres de $\mathcal{S}_0(A)$, on note $X =_{\mathcal{S}_0(A)} Y$ s'il existe une fonction f bijective de V_X dans V_Y telle que pour tout couple (x, x') de sommets de X , $\gamma_X(x, x') = \gamma_Y(f(x), f(x'))$, et telle que l'image par f de la racine de X est la racine de Y .

Soit X un arbre de $\mathcal{S}_0(A)$. Si x est un sommet de X , on note $B_{x,n}(X)$ le sous-arbre de X enraciné en x et constitué des sommets de X à distance $\leq n$ (dans un arbre, il n'y a qu'un seul chemin minimal d'un sommet à un autre, et la distance entre deux sommets est donnée par le nombre d'arêtes constituant ce chemin); $B_{x,n}(X)$ est également appelé boule de rayon n autour de x . La boule de rayon n autour de la racine est simplement notée $B_n(X)$. On note d la distance sur $\mathcal{S}_0(A)$ définie pour tout $X, Y \in \mathcal{S}_0(A)$, $X \neq_{\mathcal{S}_0(A)} Y$, par

$$d(X, Y) = 2^{-\min\{k \in \mathbb{N}^*; B_k(X) \neq_{\mathcal{S}_0(A)} B_k(Y)\}}.$$

On note finalement $\mathcal{S}(A)$ le complété métrique de $\mathcal{S}_0(A)$.

Définition xviii Une *substitution d'arbre* est une application τ de $\mathcal{S}_E(A)$ dans $\mathcal{S}_0(A)$ vérifiant les propriétés suivantes.

- Si $X = (\{x_1, x_2\}, \{(x_1, x_2, a)\})$ est un élément de $\mathcal{S}_E(A)$ enraciné en x_1 , d'image $\tau(X)$, alors $x_1, x_2 \in V_{\tau(X)}$, et $\tau(X)$ est enraciné en x_1 .
- Pour tout a de A , si $X = (\{x_1, x_2\}, \{(x_1, x_2, a)\})$ et $Y = (\{y_1, y_2\}, \{(y_1, y_2, a)\})$ sont deux éléments de $\mathcal{S}_E(A)$, alors il existe une bijection f de $V_{\tau(X)}$ dans $V_{\tau(Y)}$ vérifiant
 - $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$,
 - pour tout couple (x, x') de $V_{\tau(X)}$, $\gamma_{\tau(X)}(x, x') = \gamma_{\tau(Y)}(f(x), f(x'))$.
- Soient X et Y deux éléments quelconques distincts de $\mathcal{S}_E(A)$, $\tau(X)$ et $\tau(Y)$ étant leurs images respectives par l'application τ . Alors $(V_{\tau(X)} \setminus V_X) \cap V_{\tau(Y)} = \emptyset$ et $(V_{\tau(Y)} \setminus V_Y) \cap V_{\tau(X)} = \emptyset$.
- Pour toute liste $(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k = a_1)$ ($k \leq \#A + 1$) d'éléments de A telle que pour tout $1 \leq j \leq k - 1$, (x_1, x_2, a_{j+1}) ou (exclusif) (x_2, x_1, a_{j+1}) est une arête de $\tau(X_{a_j})$ (où $X_{a_j} = (\{x_1, x_2\}, \{(x_1, x_2, a_j)\})$), les degrés de x_1 et x_2 dans $\tau(X_{a_j})$ sont égaux à 1.

τ s'étend naturellement en une application de $\mathcal{S}(A)$ dans $\mathcal{S}(A)$ en prenant l'union des images des arêtes. De plus, si x_0 est la racine d'un arbre X , alors x_0 est également la racine de $\tau(X)$. Un exemple est donné en figure 2.

On peut voir ces substitutions d'arbre comme une généralisations des substitutions (sur les mots); notamment, toute substitution induit naturellement une substitution d'arbre. On essaiera donc d'adapter certains résultats classiques de combinatoire des mots.

On note $=_{\mathcal{S}(A)}$ l'extension de $=_{\mathcal{S}_0(A)}$ à l'ensemble $\mathcal{S}(A)$. Le premier travail consiste à étudier les points fixes (de diamètres infinis) d'une substitution d'arbre. Soit τ une substitution et X_0 un arbre tel que $X_0 =_{\mathcal{S}(A)} B_1(\tau(X_0))$. Sous réserve que X_0 vérifie une certaine condition de croissance (qui assure que la suite des diamètres de $\tau^n(X_0)$ tend vers l'infini), l'arbre $X =_{\mathcal{S}(A)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau^n(X_0)$ est un point fixe de τ . Réciproquement si X est un point fixe de τ et que $B_1(X)$ vérifie la condition de croissance, alors $X =_{\mathcal{S}(A)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau^n(B_1(X))$.

Un des problèmes liés aux arbres vient du fait qu'on peut définir une infinité de point fixe à une substitution donnée. En effet, si X et Y sont deux points fixes (ou deux points périodiques) possiblement égaux (au sens de $\mathcal{S}(A)$), l'arbre obtenu en faisant l'union disjointe de X et Y et en identifiant leurs racines sera également fixe. On définit donc les points fixes pertinents.

Définition xix On dit que X est un *point fixe pertinent* de τ s'il existe un entier $p \geq 0$, une lettre $a \in A$ et un sommet c de $\tau^p(X_a)$, avec $X_a = (\{x, y\}, \{(x, y, a)\})$, $c \neq x$ et $c \neq y$, tels que $B_1(X) =_{\mathcal{S}(A)} B_{c,1}(\tau^p(X_a))$.

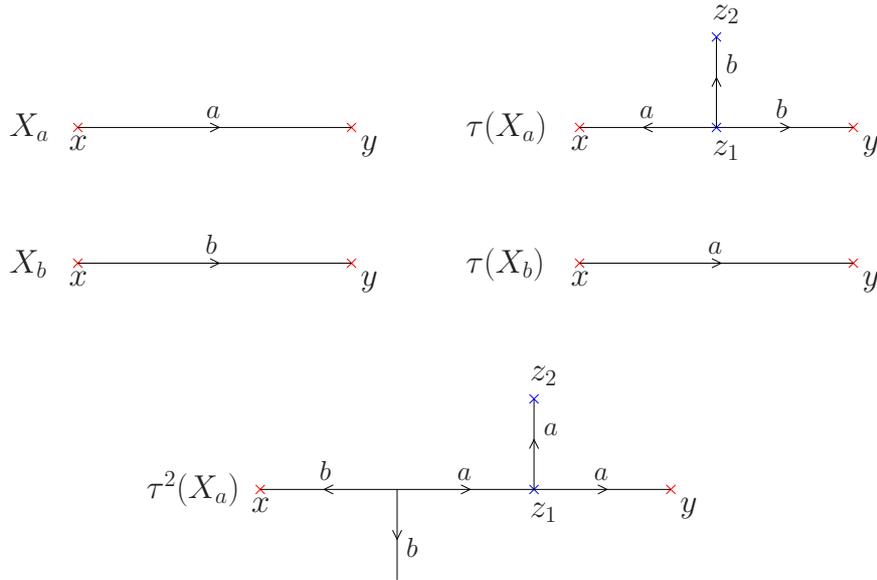


FIG. 2: Un exemple de substitution d'arbre.

On sait qu'une substitution primitive (sur les mots) engendre un système dynamique symbolique minimal. Il n'y a pas de fonction sur les arbres qui soit équivalente au shift (sur les mots). Cependant, déplacer la racine d'un arbre sur tous les sommets possibles peut s'apparenter à l'action d'un pseudo-groupe, et on montrera le théorème suivant.

Théorème xx Soit τ une substitution primitive, X un point pertinent de τ . Pour tout arbre Z , on note $\mathcal{L}(Z) = \{B_{z,n}(Z); z \in V_Z, n \in \mathbb{N}\}$ et on note $\Omega = \{Y; \mathcal{L}(Y) \subset \mathcal{L}(X)\}$. Toutes les orbites des points de Ω sous l'action du déplacement de racine sont denses (pour la topologie métrique) dans Ω .

Substitutions sur des arbres réels

Un arbre réel est un espace métrique géodésique et 0-hyperbolique. Le but de ce chapitre est d'adapter la notion de substitution d'arbre aux arbres réels. On s'y prendra de deux manières. La première se détache de son homologue sur les arbres simpliciaux. Bien que plus lourde, elle permet notamment de mettre en évidence la relation entre ces constructions et les constructions graphe-dirigées définies dans [17]; on a ainsi une manière relativement simple de déterminer la dimension de Hausdorff des arbres créés. La seconde méthode consiste à partir d'une substitution d'arbre simplicial, et à "réaliser" les arbres simpliciaux propres à la substitution. On construira ainsi des suites d'arbres réels, et on montrera comment elles peuvent converger vers un arbre réel limite compact.

Les détails relatifs à la première méthode sont laissés de côté dans cette introduction. On donne ici quelques éléments de la seconde; ceux-ci vont nous permettre d'énoncer rapidement le théorème xxii, qui sera très important par la suite.

$\mathbb{R} * \mathbb{R}$ désignant le produit libre de deux copies de \mathbb{R} , on note, pour k un entier naturel, \mathcal{R}^k le produit libre $\mathbb{R} * \dots * \mathbb{R}$ de k copies de \mathbb{R} . \mathcal{R}^k est un groupe dans lequel tout élément t (différent de l'origine) a une unique écriture réduite (finie) $x_0^{t_0} x_1^{t_1} \dots x_q^{t_q}$, avec

- pour $0 \leq i \leq q$, $0 \leq x_i \leq k - 1$ et t_i est un réel non nul,
- pour $0 \leq i \leq q - 1$, $x_i \neq x_{i+1}$,
- l'origine est notée O .

On définit la distance d invariante par multiplication à gauche sur \mathcal{R}^k telle que tout point $x_0^{t_0} x_1^{t_1} \dots x_q^{t_q}$ (en écriture réduite) est à distance $|t_0| + |t_1| + \dots + |t_q|$ de l'origine. On note $\overline{\mathcal{R}^k}$ le complété métrique de \mathcal{R}^k et \mathcal{T}^k l'ensemble des arbres réels compacts de $\overline{\mathcal{R}^k}$. \mathcal{T}^k est complet pour la métrique de Hausdorff.

Définition xxi Un arbre T de \mathcal{T}^k est une *réalisation* d'un arbre simplicial X de $\mathcal{S}(A)$ s'il existe une fonction injective $\nu : V_X \rightarrow \mathcal{R}^k$ telle que

- si (x_1, x_2, a) et (y_1, y_2, b) sont deux arêtes distinctes de E_X , alors $]\nu(x_1), \nu(x_2)[\cap]\nu(y_1), \nu(y_2)[= \emptyset$,
- T est l'enveloppe convexe de $\nu(V_X)$.

ν est la *fonction de réalisation*.

En fait, on peut naturellement associer un arbre réel compact à toute substitution d'arbre simplicial si celle-ci vérifie une certaine condition combinatoire. Soit τ une substitution d'arbre simplicial de $\mathcal{S}(A)$. Pour tout $a \in A$, on note $X_a = (\{y, z\}, \{(y, z, a)\})$, et on définit l'application

$$\begin{aligned} \kappa & : A \cup \overline{A} & \rightarrow & A \\ & a & \mapsto & a \quad \text{si } a \in A \\ & \overline{a} & \mapsto & a \quad \text{si } \overline{a} \in \overline{A} \end{aligned}$$

La **substitution tronc** de τ est la substitution (morphisme de monoïde) σ_τ définie pour tout $a \in A$ par

$$\sigma_\tau(a) = \kappa(\gamma_{\tau(X_a)}(y, z))$$

où $\gamma_{\tau(X_a)}$ est la fonction chemin de $\tau(X_a)$. $\sigma_\tau : A \rightarrow A^*$ est dite **sous-primitive** s'il existe un unique ensemble $\alpha \subset A$ tel que

- la restriction $\sigma : \alpha \rightarrow \alpha^*$ est primitive,
- pour tout élément $a \in A \setminus \alpha$, il existe un entier k tel que $\sigma^k(a)$ est un mot de α^* .

On montrera le théorème suivant.

Théorème xxii Si τ est une substitution primitive de $\mathcal{S}(A)$ et si la substitution tronc associée est sous-primitive, alors fixer une fonction de réalisation ν_0 de $X_a = (\{x, y\}, \{(x, y, a)\})$ (quel que soit a) définit de manière unique (à isométrie près) une suite de réalisations $(\nu_n)_n$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- ν_n est une réalisation de $\tau^n(X_a)$,
- pour tout sommet x de $\tau^n(X_a)$, $\nu_{n+1}(x) = \nu_n(x)$,
- pour tout $b \in A$, si (x_1, x_2, b) et (y_1, y_2, b) sont deux arêtes de $\tau^n(X_a)$, alors $d(\nu(x_1), \nu(x_2)) = d(\nu(y_1), \nu(y_2))$.

On obtient alors une suite de Cauchy (pour la métrique de Hausdorff) de \mathcal{T}^k convergente vers $T_\tau \in \mathcal{T}^k$.

Constructions par substitutions d'arbre

Dans le chapitre 6, on construit des arbres réels auto-similaires qui supportent, par échanges de domaines, les dynamiques de certaines substitutions primitives inversibles. On travaillera sur deux classes d'exemples ; la première est définie pour tout $d \geq 3$ sur l'alphabet $A = \{1, \dots, d\}$ par :

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)} & : 1 & \mapsto & 12 \\ & k & \mapsto & (k+1) \quad \text{pour } 2 \leq k \leq d-1 \\ & d & \mapsto & 1. \end{aligned}$$

La seconde est définie sur le même alphabet ; c'est la substitution de Tribonacci si $d = 3$ et elle est plus généralement définie pour $d \geq 3$ par :

$$\begin{aligned} \sigma^{(2)} & : 1 \mapsto 12 \\ & \quad k \mapsto 1(k+1) \quad \text{pour } 2 \leq k \leq d-1 \\ & \quad d \mapsto 1. \end{aligned}$$

La méthode générale que nous appliquons pour construire des arbres auto-similaires supportant leurs dynamiques symboliques est relativement commune.

On choisit une substitution σ quelconque de ces deux classes. σ est une substitution primitive inversible qui engendre un système dynamique (Ω^+, S) où $\Omega^+ \subset A^{\mathbb{N}}$. On note $F_d = F(A)$ le groupe libre de base A et on désigne encore par σ l'automorphisme de groupe libre correspondant. Etant donné un représentant train-track de son inverse σ^{-1} (ou plutôt de sa classe extérieure), on construit l'arbre invariant T de σ^{-1} (voir théorème x).

Remarque xxiii *L'étude des deux classes se justifie par le fait que le représentant train-track de σ^{-1} peut être sur la rose à d pétales dans le premier cas, et ne le peut pas dans le second.*

Il existe une homothétie H de rapport $\eta > 1$ (où η est la valeur propre de la matrice d'incidence de σ^{-1}), et on définit (comme dans [14]) l'application $Q : \partial F_d \rightarrow \overline{T} \cup \partial T$.

On construit une substitution d'arbre τ associée à σ , et on associe à τ une suite d'arbres réels compacts $(L_n)_n$ et un arbre réel compact limite L grâce au théorème xxii. On montre alors les théorèmes suivants.

Théorème xxiv *Il existe une application f_Q de Ω^+ dans L (définie par la combinatoire des arbres décrits par τ) telle que l'application ξ définie pour tout v de Ω^+ par*

$$\begin{aligned} \xi & : L \rightarrow Q(\Omega^+) \\ & \quad f_Q(v) \mapsto Q(v) \end{aligned}$$

est une bijection isométrique.

On dit de $Q(\Omega^+)$ que c'est l'ensemble limite de σ .

Théorème xxv *Chaque arbre L_n peut être explicitement partitionné de manière à engendrer une partition de Ω^+ .*

Perspectives

On voudra adapter les constructions faites sur les exemples du chapitre 6 à toute substitution primitive inversible dans un premier temps, et à tout automorphisme dans un second. La première question à se poser est celle de l'existence ; étant donné un automorphisme σ de groupe libre (positif ou non), existe-t-il une substitution d'arbre dont l'arbre limite est isométrique à l'ensemble limite de σ . Dans le cas général, l'ensemble limite d'un automorphisme peut être un arbre réel ou un Cantor (voir [8]). On devra donc donner des conditions sur l'automorphisme initial pour savoir dans quel cas on se trouve. Afin d'inclure les cas où l'ensemble limite est un Cantor, il faudra généraliser la définition de substitution d'arbre ; on obtiendra des substitutions de graphe sans cycles.

Donner les automorphismes dont l'ensemble limite peut être construit par substitution de graphe sans cycles n'est pas une fin en soit ; σ étant un automorphisme de groupe libre, nous voulons expliciter une méthode systématique permettant d'associer à σ une bonne substitution de graphe sans cycles (c'est-à-dire une substitution dont le graphe limite est isométrique à l'ensemble limite de σ). Dans la section 6.3, on énumère les propriétés des automorphismes qui peuvent influencer sur l'existence ou sur le choix d'une bonne substitution ; on énoncera également quelques conjectures.

Chapitre 1

Combinatoire des mots

1.1 Shift

Les deux sections qui suivent sont en partie inspirées de [2] et [16].

1.1.1 Full shift

On considère un ensemble de symboles A . A est appelé alphabet, et ses éléments sont des lettres. On note $A^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des séquences bi-infinies à lettres dans A . Une séquence $x \in A^{\mathbb{Z}}$ sera notée $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ou encore $x = \dots x_{-2}x_{-1}x_0x_1x_2 \dots$, où chaque $x_i \in A$.

Définition 1.1.1 *A étant un alphabet fini, $A^{\mathbb{Z}}$ est appelé **full shift** sur A ou **full A -shift**. Le **full r -shift** est le full shift sur l'alphabet $\{0, 1, \dots, r-1\}$.*

On notera A^* le monoïde libre associé à A , c'est-à-dire l'ensemble des séquences finies, appelées **mots**, ou **blocs**, dont les lettres sont celles de A . On dira d'un élément u de A^* que c'est un **mot (ou un bloc) sur A** . Le **mot vide** (ou **bloc vide**) est noté ϵ . La longueur d'un mot est le nombre de symboles qu'il contient ; si $u = u_1 \dots u_k \in A^*$, la longueur de u est notée $|u|$ et on a $|u| = k$.

Si x est un élément de $A^{\mathbb{Z}}$, on notera $x_{[i,j]} = x_i \dots x_j$; $x_{[i,j]}$ est un **sous-mot** ou **facteur** de x .

Définition 1.1.2 *Le **shift** S est une fonction de $A^{\mathbb{Z}}$ dans $A^{\mathbb{Z}}$ qui à x associe $y = S(x)$ tel que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $y_i = x_{i+1}$.*

L'application inverse à S est notée S^{-1} et vérifie, pour tout x de $A^{\mathbb{Z}}$, $S^{-1}(x) = y$ où pour tout i de \mathbb{Z} , $y_i = x_{i-1}$.

Définition 1.1.3 *Un point x de $A^{\mathbb{Z}}$ est **périodique** pour S (ou **shift-périodique**) s'il existe un entier k tel que $S^k(x) = x$. La **période** de x est le plus petit entier naturel k non nul vérifiant cette égalité. Si $k = 1$, x est un **point fixe** de S .*

1.1.2 Espace de shift

Pour \mathcal{F} un ensemble de mots de A^* , on note $X_{\mathcal{F}}$ l'ensemble des mots de $A^{\mathbb{Z}}$ qui ne contiennent aucun mot de \mathcal{F} ; on peut voir \mathcal{F} comme l'ensemble des mots ou blocs interdits.

Définition 1.1.4 *Un **espace de shift** (ou simplement **shift**) est un sous-ensemble X d'un full shift $A^{\mathbb{Z}}$ tel que $X = X_{\mathcal{F}}$ pour un certain ensemble \mathcal{F} de blocs interdits sur l'alphabet A .*

Lorsqu'un shift X est inclu dans un shift Y , on dit que X est un **sous-shift** de Y .

Le full shift est évidemment un shift : il suffit de prendre $\mathcal{F} = \emptyset$. L'ensemble des mots sur l'alphabet $\{0, 1\}$ ne contenant jamais deux 1 consécutifs, autrement dit $\mathcal{F} = \{11\}$ est appelé le **golden mean shift**. Il y a un nombre indénombrable de shifts différents pour un alphabet de cardinal supérieur ou égal à 2 donné, mais en tant que sous-shift de full shift, ils possèdent tous la propriété de **shift invariance** ; A étant un alphabet, et S étant la fonction shift sur $A^{\mathbb{Z}}$, on a

$$\forall \mathcal{F} \subset A^*, S(X_{\mathcal{F}}) = X_{\mathcal{F}}$$

1.1.3 Langage

On a défini les espaces de shift en fonction de leurs mots interdits. On donne ici des définitions permettant de les décrire par un ensemble de mots autorisés.

Définition 1.1.5 Soit X un sous-ensemble d'un full shift, et soit $\mathcal{L}_n(X)$ l'ensemble des sous-mots de longueur n de points de X . Le **langage** de X est l'ensemble $\mathcal{L}(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n(X)$.

On donne ici une caractérisation des espaces de shift par leurs langages.

Propriété 1.1.6

- (1) X est un espace de shift, et \mathcal{L} est son langage. Si $w \in \mathcal{L}$, alors
 - tout sous-mot de w est dans \mathcal{L} ,
 - il existe des mots u et v de \mathcal{L} tels que $uwv \in \mathcal{L}$.
- Si \mathcal{L} est un ensemble de mots sur un alphabet A , alors \mathcal{L} est le langage d'un espace de shift si et seulement si \mathcal{L} vérifient les propriétés énoncées en (1).
- Deux espaces de shift sont égaux si et seulement si leurs langages le sont.

1.1.4 Code à fenêtre glissante

Soit $x = \dots x_{-1}x_0x_1\dots$ une séquence de symboles d'un espace de shift X sur un alphabet A . On transforme x en $y = \dots y_{-1}y_0y_1\dots$ sur un second alphabet \mathcal{U} de la manière suivante : Soit m et n deux entiers, $-m \leq n$, alors la i -ième coordonnée de y ne dépend que de la "fenêtre" des coordonnées de x entre $i - m$ et $i + n$. On définit donc $\Phi : \mathcal{L}_{m+n+1}(X) \rightarrow \mathcal{U}$: Φ est l'application à $(m + n + 1)$ -fenêtre fixe vérifiant :

$$y_i = \Phi(x_{i-m} \dots x_{i+n}) = \Phi(x_{[i-m, i+n]})$$

Définition 1.1.7 X est un espace de shift sur A , et $\Phi : \mathcal{L}_{m+n+1}(X) \rightarrow \mathcal{U}$ une application à fenêtre fixe. On définit alors la fonction $\phi : X \rightarrow \mathcal{U}^{\mathbb{Z}}$ qui, à x de X associe $y = \phi(x)$ où $y_i = \Phi(x_{[i-m, i+n]})$. ϕ est l'application à fenêtre glissante de mémoire m et d'anticipation n induite par Φ .

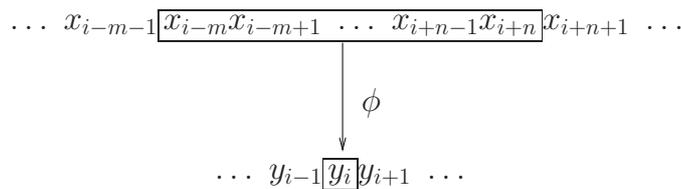


FIG. 1.1: Application à fenêtre glissante.

Remarque 1.1.8 Si X est un espace de shift sur un alphabet A . Soit $\Phi : \mathfrak{L}_2(X) \rightarrow \mathfrak{L}_1(X)$ telle que, pour tout a_0a_1 de $\mathfrak{L}_2(X)$, $\Phi(a_0a_1) = a_1$. ϕ est l'application à 2-fenêtre glissante de mémoire 0 et d'anticipation 1 induite par Φ . ϕ est exactement l'application shift sur X .

Les applications à fenêtre glissante sont parfois appelées **applications locales** (voir [2] et [11]). Si m est la mémoire, et n est l'anticipation, d'une telle application, elle sera dite **k -locale**, avec $k = n + m + 1$. Le résultat suivant est attribué à M. L. Curtis, G. Hedlund, et R. C. Lyndon dans [11].

Proposition 1.1.9 Soient X et Y deux espaces de shift, S_X et S_Y leurs applications shift respectives. Si ϕ est une application à fenêtre glissante de X dans Y , alors $\phi \circ S_X = S_Y \circ \phi$.

Cette propriété de commutation par shift n'est en fait pas suffisante à caractériser les applications à fenêtre glissante. Une description précise est donnée par la proposition suivante.

Proposition 1.1.10 Soient X et Y deux espaces de shift. Une application ϕ est à fenêtre glissante si et seulement si $\phi \circ S_X = S_Y \circ \phi$ et il existe $N \geq 0$ tel que $\phi(x)_0$ est fonction de $x_{[-N,N]}$.

Parfois, une application à fenêtre glissante ϕ peut avoir un inverse. Dans ce cas, cet inverse est unique ; on le note alors ϕ^{-1} et on dit de ϕ qu'elle est **inversible**.

Définition 1.1.11 Une application à fenêtre glissante $\phi : X \rightarrow Y$ est une **conjugaison** si elle est inversible. On dira alors de X et Y qu'ils sont **conjugués** et on notera $X \cong Y$.

On peut penser à deux shifts conjugués comme à deux manières de représenter le même objet.

1.1.5 Shift de type fini

Définition 1.1.12 Un **shift de type fini** est un espace de shift de la forme $X_{\mathcal{F}}$ où \mathcal{F} , l'ensemble des mots prohibés, est de cardinal fini.

Une méthode efficace pour construire des shifts de type fini consiste à donner un graphe orienté, et à considérer l'ensemble des marches bi-infinis sur ce graphe. En fait, quel que soit le shift de type fini, il peut être recodé de manière à obtenir un shift descriptible par les marches bi-infinis d'un certain graphe ; on pourra se reporter à la figure 1.3 pour un exemple.

On ne parlera ici que de graphes finis et orientés. On va d'abord donner quelques propriétés simples de ces graphes.

Définition 1.1.13 Un **graphe** G est la donnée d'un couple (V, E) où V est un ensemble fini de **sommets** ou **états** et E est un ensemble fini d'**arêtes**. Le **sommet initial** de chaque arête e de E est noté $i(e)$ et le **sommet terminal** est noté $t(e)$.

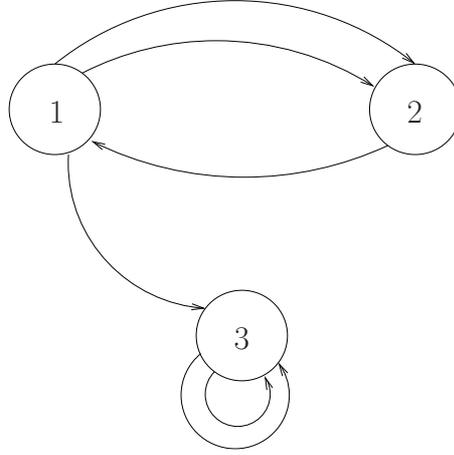
On autorisera ici les graphes contenant un couple de sommets reliés par plusieurs arcs, ou contenant des arêtes e telles que $i(e) = t(e)$.

Pour un état s , on note O_s l'ensemble des arêtes de sommet initial s (les arêtes sortantes de s) et I_s l'ensemble des arêtes dont s est le sommet terminal (les arêtes entrantes de s). Le cardinal $|O_s|$ de O_s est appelé **degré sortant** de s , et $|I_s|$ est son **degré entrant**.

Définition 1.1.14 On appelle **chemin** d'un graphe G une suite (x_1, x_2, \dots, x_n) de sommets de G tels que pour tout $1 \leq i \leq n - 1$, il existe une arête e_i de x_i à x_{i+1} ; $i(e_i) = x_i$, $t(e_i) = x_{i+1}$. On appellera **circuit** un chemin (x_1, x_2, \dots, x_n) tel que $x_1 = x_n$.

On considérera que l'ensemble des états d'un graphe est l'ensemble $\{1, 2, \dots, r\}$ où deux états ne peuvent avoir le même nom. Cela donne notamment un ordre naturel sur les sommets et facilite la définition suivante.

Définition 1.1.15 Soit G un graphe et V l'ensemble de ces états. Pour s et t deux sommets, on note A_{st} le nombre d'arêtes de sommet initial s et de sommet final t . On définit alors $A_G = [A_{st}]_{s,t \in A}$; A_G est la **matrice d'incidence** de G .



Le graphe de la figure 1.1.5 a pour matrice d'incidence :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

On définit maintenant des shifts de type fini à partir de graphes.

Définition 1.1.16 Soit G un graphe, E l'ensemble de ses arêtes et A_G sa matrice d'incidence. On note X_G ou X_{A_G} le **shift des arêtes** défini par :

$$X_G = X_{A_G} = \{\xi = (\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in E^{\mathbb{Z}}; t(\xi_i) = i(\xi_{i+1}) \forall i \in \mathbb{Z}\}.$$

En d'autres termes, l'alphabet A de X_G est donné par l'ensemble des arêtes, et les points du shift sont les marches bi-infinis sur le graphe.

Il est facile de montrer qu'un shift obtenu de cette manière est un shift de type fini. Il suffit pour cela de choisir $\mathcal{F} = \{ef; e, f \in A, t(e) \neq i(f)\}$. Les nombres d'arêtes et de sommets étant finis, \mathcal{F} l'est également, et $X_G = X_{\mathcal{F}}$.

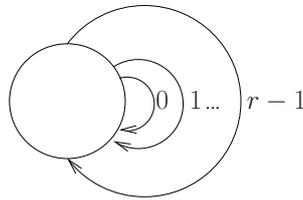


FIG. 1.2: Graphe du full r -shift.

Si $\mathcal{F} = \{eg, ff, fg, gg\}$, $X_{\mathcal{F}}$ est le shift de type fini sur $A = \{e, f, g\}$ associé au graphe de la figure 1.3. On remarque que ce shift est conjugué au shift $X_{\mathcal{F}_1}$ défini sur l'alphabet $\{0, 1\}$ avec $\mathcal{F}_1 = \{11\}$; il suffit pour s'en convaincre de considérer l'application à fenêtre glissante inversible ϕ définie par

- $\phi(00) = e$,
- $\phi(01) = f$,
- $\phi(10) = g$.

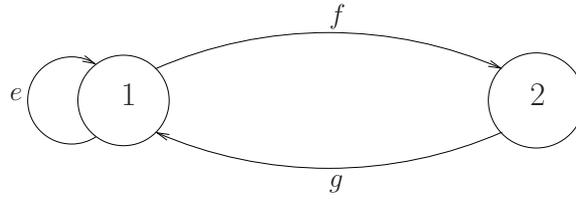


FIG. 1.3: Exemple de graphe dont est issu un espace de shift.

1.2 Eclatement et amalgamation d'états

Les éclatements et fusions d'états sont des opérations sur les graphes ; nous étudions ici leurs influences sur les shifts associés. La notion d'éclatement d'état a été introduite par R. F. Williams dans [24]. Des définitions plus précises peuvent être trouvées dans [16] et [2].

Nous allons décrire l'**éclatement d'état entrant**. Soit $G = (V, E)$ un graphe et s un sommet de G . On va supposer dans un premier temps qu'il n'existe aucune arête b de E telle que $i(b) = t(b) = s$. On note I_s (resp. O_s) l'ensemble des arêtes e de E telles que $t(e) = s$ (resp. $i(e) = s$). Soit $I_s = I_s^1 + I_s^2$ une partition de I_s ; l'opération d'**éclatement d'état entrant** relativement à (I_s^1, I_s^2) transforme le graphe G en un graphe $H = (V_H, E_H)$ où $V_H = V \cup \{s_1\}$, s_1 étant un nouvel état, et où E_H est défini par :

$$E_H = E - I_s^1 + O_s^1 + U$$

avec $O_s^1 = \{(s_1, t); (s, t) \in O_s\}$ et $U = \{(t, s_1); (t, s) \in I_s^1\}$. En d'autres termes, on obtient le graphe H en :

- laissant inchangées les arêtes non adjacentes à s et les arêtes de O_s .
- donnant à s_1 des copies des arêtes sortantes de s (ensemble O_s^1).
- distribuant les arêtes entrantes de s entre s et s_1 suivant la partition de I_s en I_s^2 et I_s^1 .

L'exemple de la figure 1.4 illustre un éclatement de l'état 1 ; I_1^1 est constitué de l'arête entre 2 et 1, I_1^2 de l'arête entre 3 et 1, O_1^1 de l'arête entre 1₁ et 2, et U de l'arête entre 2 et 1₁.

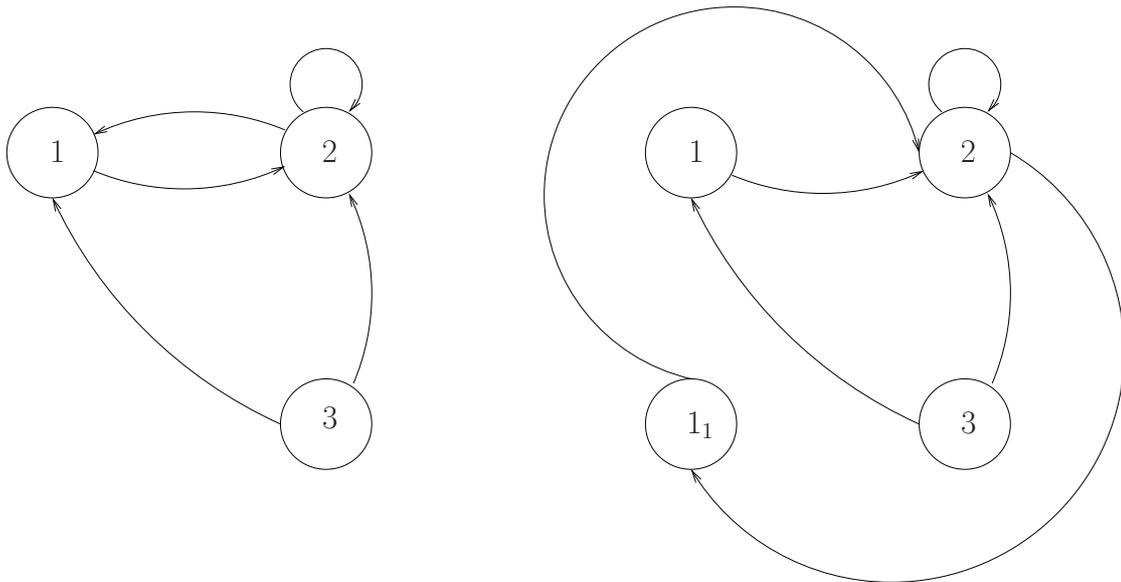


FIG. 1.4: Un éclatement (entrant) de l'état 1.

On étend maintenant cette définition afin de pouvoir :

- partitionner l'ensemble des arêtes entrantes en autant d'ensembles que l'on veut (pas seulement 2).
- effectuer cette opération sur plusieurs sommets simultanément.
- éclater un état qui boucle sur lui-même (c'est-à-dire tel qu'il existe une arête dont il est à la fois état initial et état final).

Définition 1.2.1 Soit $G = (V, E)$ un graphe. Pour chaque état s de V , on note I_s l'ensemble de ses arêtes entrantes et O_s l'ensemble de ses arêtes sortantes. On partitionne I_s en ensembles deux à deux disjoints $I_s^1, I_s^2, \dots, I_s^{m(s)}$ où $m(s) \geq 1$; \mathcal{P} est la partition obtenue de E et \mathcal{P}_s est la partition restreinte à I_s . Le **graphe éclaté (entrant)** $G^{[\mathcal{P}]}$ formé à partir de G selon \mathcal{P} a pour états $s_1, s_2, \dots, s_{m(s)}$, où s parcourt V , et pour arêtes e_j , où $e \in E$ et $1 \leq j \leq m(i(e))$. Si $e \in E$ est tel que $i(e) = s$ et $t(e) = t$, alors $e \in I_t^j$ pour un certain j , et on définit e_i , arête de $G^{[\mathcal{P}]}$ par $i(e_i) = s_i$ et $t(e_i) = t_j$. Un **éclatement d'état élémentaire** de G à l'état s se produit lorsque $m(s) = 2$ et $m(t) = 1$ pour tout $t \neq s$.

La figure 1.5 illustre cette définition. Dans cet exemple, on a choisi $I_1^1 = \{b, c\}$, $I_1^2 = \{a\}$, $I_2^1 = \{d, e\}$, $I_3^1 = \{f\}$ et $I_3^2 = \{g\}$.

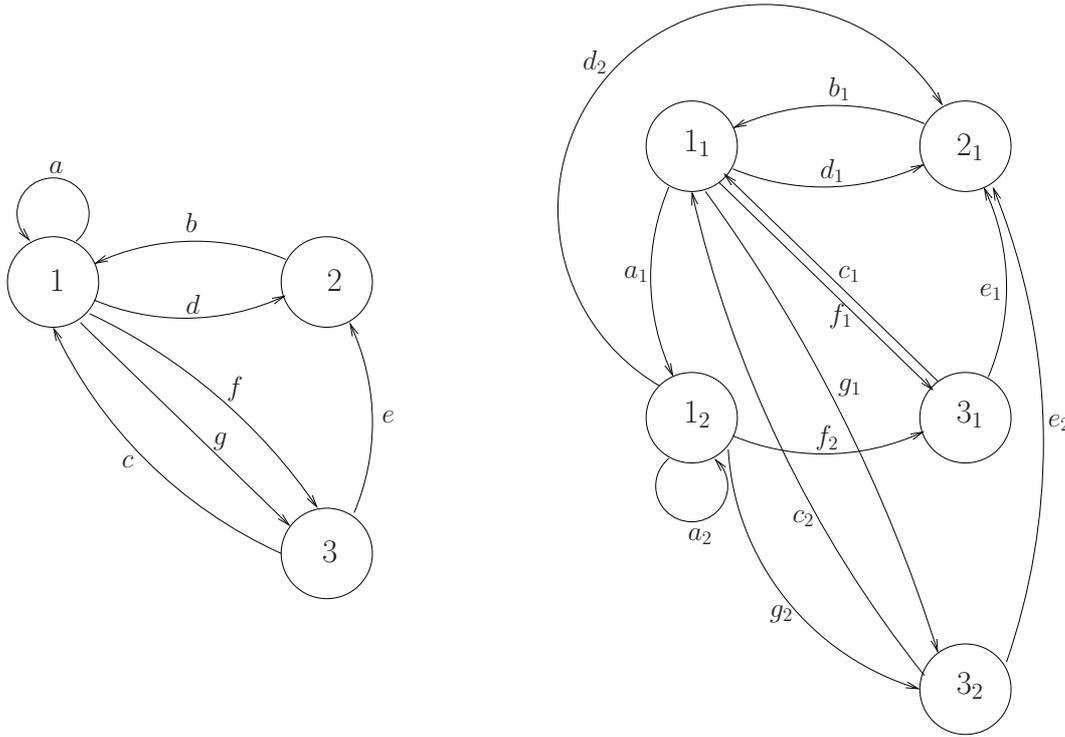


FIG. 1.5: Exemple d'éclatement entrant.

Si un graphe H est obtenu à partir d'un graphe G par cette procédure, on dira de H que c'est un **éclatement entrant** de G , et on dira de G que c'est une **amalgamation entrante** de H .

Remarque 1.2.2 On peut définir de la même manière l'**éclatement sortant** H d'un graphe G ; G sera alors une **amalgamation sortante** de H .

Théorème 1.2.3 Si H est un éclatement de G , alors les shifts des arêtes X_H et X_G sont conjugués.

Preuve On démontre le théorème dans le cas d'un éclatement entrant, l'autre cas étant similaire.

On suppose que $H = G^{[\mathcal{P}]}$, et on définit l'application à 1-fenêtre fixe $\Psi : \mathfrak{L}_1(X_H) \rightarrow \mathfrak{L}_1(X_G)$ par $\Psi(e_j) = e$ pour tout $e_j \in \mathfrak{L}_1(X_H)$. On note ψ l'application à 1-fenêtre glissante de mémoire 0 et d'anticipation 0 induite par Ψ . On déduit de l'observation : $e_j f_i \in \mathfrak{L}_2(X_H) \Rightarrow ef \in \mathfrak{L}_2(X_G)$, que $\psi(X_H) \subseteq X_G$.

Soit alors $\Phi : \mathfrak{L}_2(X_G) \rightarrow \mathfrak{L}_1(X_H)$ l'application à 2-fenêtre fixe définie par $\Phi(ef) = f_j$ où j est tel que $e \in I_s^j$ pour un certain état s . ϕ étant l'application à 2-fenêtre glissante de mémoire 1 et d'anticipation 0 induite par Φ , on a $\phi(X_G) \subseteq X_H$.

Si $x = \dots x^{-1} x^0 x^1 \dots \in X_G$, alors $\phi(x)$ est de la forme $\dots x_{j_{-1}}^{-1} x_{j_0}^0 x_{j_1}^1 \dots$, et on aura $\psi(\phi(x)) = x$.

Si $y = \dots y_{j_{-1}}^{-1} y_{j_0}^0 y_{j_1}^1 \dots \in X_H$, alors $\psi(y) = \dots y^{-1} y^0 y^1 \dots$. Puisque $y_{j_i}^i y_{j_{i+1}}^{i+1} \in \mathfrak{L}_2(X_H)$, alors $y^i \in I_{i(y^{i+1})}^{j_{i+1}}$. On déduit donc que pour tout i , $\Phi(y^i y^{i+1}) = y_{j_{i+1}}^{i+1}$, ce qui donne $\phi(\psi(y)) = y$.

Il existe donc une application à fenêtre glissante inversible de X_H dans X_G ; X_G et X_H sont conjugués. \square

Cette preuve fait apparaître la fonction ϕ inverse de ψ où ψ symbolise l'éclatement d'états. La fonction ϕ est la fonction d'amalgamation d'états (entrante). Soit $G = (V, E)$ un graphe et M sa matrice d'incidence. Si deux arêtes e et f sont telles que $t(e) = t(f)$, on dira que e et f **correspondent**. Soient s_1 et s_2 deux sommets de G tels que $\forall t \in V, |O_{s_1} \cap I_t| = |O_{s_2} \cap I_t|$: en d'autres termes leurs arêtes sortantes correspondent. On suppose de plus qu'il n'y a aucune arête de s_1 à s_1 , de s_1 à s_2 , de s_2 à s_1 , ou de s_2 à s_2 . s_1 et s_2 peuvent être **amalgamés** en fusionnant s_1 et s_2 en un état s dont les arêtes sortantes correspondent aux arêtes sortantes de s_1 . On obtient l'ensemble des arêtes entrantes de s en faisant l'union (disjointe) des arêtes entrantes de s_1 et des arêtes entrantes de s_2 .

On étend maintenant cette définition afin de pouvoir :

- fusionner autant de sommets ensemble que l'on veut (pas seulement 2).
- effectuer cette opération sur plusieurs ensembles de sommets simultanément.
- fusionner des états qui bouclent sur eux-même ou qui sont reliés entre eux.

Définition 1.2.4 Soit $H = (V_H, E_H)$ un graphe et M_H sa matrice d'incidence. Soit $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_p\}$ une partition de V_H telle que :

- $\forall P \in \mathcal{P}, P \neq \emptyset$,
- $\forall P \in \mathcal{P}, \forall (s_1, s_2) \in P^2, \forall t \in V_H, |O_{s_1} \cap I_t| = |O_{s_2} \cap I_t|$.

Une partition vérifiant cette propriété sera par la suite appelée **acceptable**.

Le **graphe amalgamé (entrant) $H_{[\mathcal{P}]}$ formé à partir de H selon \mathcal{P}** a p sommets. Si x et y sont deux sommets de H , on note n_{xy} le nombre d'arêtes de E_H de sommet initial x et de sommet terminal y . On note $n_{ij} = \sum_{y \in P_j} n_{xy}$ où x est un élément quelconque de P_i et y parcourt P_j . Alors le nombre d'arêtes entre deux sommets i et j de $H_{[\mathcal{P}]}$ est exactement n_{ij} .

Puisque cette opération est l'opération inverse de l'éclatement d'états (entrant), on pourra se reporter à la figure 1.5 pour un exemple d'application.

Le théorème suivant est dû à R. F. Williams ([24]).

Théorème 1.2.5 Toute conjugaison d'un shift à un autre peut être obtenue par une suite d'éclatements et d'amalgamations.

1.2.1 Matrices d'incidence

On étudie dans ce paragraphe l'influence des opérations d'éclatement et d'amalgamation sur la matrice d'incidence.

On reprend l'exemple de la figure 1.5. On note $V = \{1, 2, 3\}$ et $V_H = \{1_1, 1_2, 2_1, 3_1, 3_2\}$ les ensembles des sommets des graphes G et $H = G^{[\mathcal{P}]}$, M_G et M_H sont leurs matrices d'incidence. La matrice D représente la manière d'obtenir les éléments de V_H à partir de ceux de V .

$$D = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

On désignera les entrées de D par $D(f_i, e)$ où $f_i \in V_H$ et $e \in V$.

Le nombre d'arêtes de chaque partition sortant d'un sommet donné de V est spécifié par la matrice :

$$E = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccccc} 1_1 & 1_2 & 2_1 & 3_1 & 3_2 \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

$E(e, f_i)$ est le nombre d'arêtes de I_f^i dont e est le sommet initial.

Calculer l'entrée (a, b) de la matrice produit ED consiste à sommer, sur chaque $I_b^i, 1 \leq i \leq m(b)$, le nombre d'arêtes de I_b^i dont a est l'état initial, ce qui revient à compter le nombre d'arêtes dont a est l'état initial et b est l'état terminal.

$$ED = M_G = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Lors d'un éclatement entrant élémentaire, si a est éclaté en a et b , les arêtes sortantes de b sont des copies de celles de a . Le produit DE explicite cette duplication. On en déduit que $DE = M_H$.

$$DE = M_H = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccccc} 1_1 & 1_2 & 2_1 & 3_1 & 3_2 \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

On explique maintenant pourquoi ces résultats sont vrais en général.

Définition 1.2.6 Soit G un graphe et $H = G^{[\mathcal{P}]}$ l'éclatement entrant de G suivant \mathcal{P} . V est l'ensemble des états de G et V_H est celui de H . La **matrice de division entrante** D est une matrice $|V_H| \times |V|$ définie par

$$D(s_i, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } s = t, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La **matrice des arêtes entrante** E est la matrice $|V| \times |V_H|$

$$E(s, t_i) = |I_t^i \cap O_s|$$

Théorème 1.2.7 Soit G un graphe et $H = G^{[\mathcal{P}]}$ l'éclatement entrant de G suivant \mathcal{P} . Si D est la matrice de division entrante et E la matrice des arêtes entrante, alors

$$ED = M_G \quad \text{et} \quad DE = M_H$$

Preuve On utilise les notations données précédemment.

$$\begin{aligned} ED(s, t) &= \sum_{i=1}^{m(t)} E(s, t_i) D(t_i, t) = \sum_{i=1}^{m(t)} E(s, t_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m(t)} |I_t^i \cap O_s| = |(\bigcup_{i=1}^{m(t)} I_t^i) \cap O_s| \\ &= |I_t \cap O_s| = M_G(s, t). \end{aligned}$$

On en conclut que $ED = M_G$.

$$\begin{aligned} DE(s_i, t_j) &= D(s_i, s) E(s, t_j) = E(s, t_j) \\ &= |I_t^j \cap O_s| = |I_{t_j} \cap O^{s_i}| \\ &= M_H(s_i, t_j). \end{aligned}$$

Ce qui donne $DE = M_H$. \square

On va s'intéresser d'un peu plus près à l'amalgamation d'état. Nous avons jusqu'à présent défini les matrices de division et d'arêtes à partir d'un graphe G que nous voulions éclater suivant une partition \mathcal{P} de l'ensemble des arêtes de G . On donne ici leurs définitions à partir d'un graphe H que nous voulons amalgamer selon une partition \mathcal{P} de l'ensemble des sommets de H .

Soit H un graphe, V_H , de cardinal h , l'ensemble de ses sommets et $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_p\}$ une partition acceptable de V_H . On pourra supposer, quitte à renommer les sommets, que $P_1 = \{1_1, 1_2, \dots, 1_{p_1}\}$, $P_2 = \{2_1, 2_2, \dots, 2_{p_2}\}$, \dots , $P_p = \{p_1, p_2, \dots, p_{p_p}\}$. $G = (V_G, E_G)$ est l'amalgamation de H suivant \mathcal{P} , et on note $V_G = \{1, 2, \dots, p\}$ où j est l'amalgamation des sommets de la partition P_j . On définit alors la **matrice de division** D de taille $h \times p$ définie par

$$D(j_i, k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et la **matrice des arêtes** E de taille $p \times h$ définie par

$$E(k, t) = |O_x \cap I_t|$$

où x est un élément quelconque de P_k . On pourra vérifier de la même manière qu'en 1.2.7 que $DE = M_H$ et $ED = M_G$ où $G = H_{[\mathcal{P}]}$.

Matrice d'incidence et forte connexité

On commence par définir les graphes fortement connexes afin d'étudier l'influence d'une amalgamation sur un graphe possédant cette propriété.

Définition 1.2.8 On dit d'un graphe H orienté qu'il est fortement connexe s'il existe un chemin entre toute paire de sommets de H .

Propriété 1.2.9 Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

- H est fortement connexe.
- Il existe un circuit passant par tous les sommets de H .

Soit H un graphe et $M = [m_{i,j}]$ sa matrice d'incidence. M est la matrice des chemins de longueur 1 ; $m_{i,j}$ est le nombre de chemins de longueur 1 allant de i à j . Une rapide récurrence montrera que $M^k = [m_{i,j}(k)]$ est la matrice des chemins de longueur k dans H . On en déduit donc la propriété suivante.

Propriété 1.2.10 *La matrice d'incidence d'un graphe fortement connexe est primitive.*

On s'intéresse aux effets des amalgamations et éclatements sur la forte connexité. Par la suite, on voudra obtenir des graphes fortement connexes par amalgamations. La proposition suivante donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit amalgamé en un graphe fortement connexe.

Proposition 1.2.11 *Soit H un graphe et $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_p\}$ une partition acceptable de V_H . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

- Il existe un sous-graphe F de H fortement connexe avec $V_F = \{f_1, f_2, \dots, f_f\}$ tel que pour tout $1 \leq i \leq p$, il existe $1 \leq j \leq f$ tel que $f_j \in P_i$.
- $G = H_{[\mathcal{P}]}$ est fortement connexe.

Preuve L'ensemble des sommets de G est $V_G = \{1, 2, \dots, p\}$. Par la définition d'amalgamation, le nombre d'arêtes de i à j dans G est égal à $\sum_{y \in P_j} |O_x \cap I_y|$ où $x \in P_i$. On en déduit notamment que si $x \in P_i$ et $y \in P_j$ sont deux sommets de H reliés par une arête, alors il existe au moins une arête de i à j dans G et inversement.

Si F est un sous-graphe de H fortement connexe, alors il existe un circuit de F qui passe par tous les sommets de F . Ce circuit passera au moins une fois dans chaque élément de \mathcal{P} ; on en déduit l'existence d'un circuit de G qui passe par tous les sommets de G , et donc que G est fortement connexe.

De même, si G est fortement connexe, on pourra trouver un circuit (y_1, y_2, \dots, y_n) de H tel que pour tout $1 \leq i \leq p$, il existe $1 \leq j \leq n$ tel que $y_j \in P_i$. Le sous-graphe de H de sommets $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ sera alors fortement connexe. \square

Corollaire 1.2.12 *Soit H un graphe fortement connexe et \mathcal{P} une partition acceptable de V_H . Alors $G = H_{[\mathcal{P}]}$ est fortement connexe.*

1.2.2 Amalgamation idéale

L'opération d'amalgamation permet une simplification de la représentation des shifts. Cependant, 2 états ne peuvent être amalgamés (de manière entrante) que si leurs arêtes sortantes correspondent. Pour H un graphe quelconque, on peut s'interroger sur l'existence d'une amalgamation donnant un graphe G ne possédant aucune paire de sommet pouvant être amalgamés.

Définition 1.2.13 *On appelle **partition maximale** \mathcal{P}_M de l'ensemble des sommets V d'un graphe H l'unique partition vérifiant :*

- $\forall Q \in \mathcal{P}_M, \forall q, r \in Q, O_q = O_r$
- $\forall P, Q \in \mathcal{P}_M; P \neq Q, \forall (p, q) \in P \times Q, O_p \neq O_q$.

On dit du graphe $H_{[\mathcal{P}_M]}$ que c'est l'**amalgamation maximale** de H .

On amalgame le graphe de gauche sur la figure 1.6 suivant sa partition maximale $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$. Le résultat est à droite sur la même figure. On remarque que les trois sommets de ce nouveau graphe peuvent à nouveau être amalgamés.

On cherche un moyen d'amalgamer "au maximum", c'est-à-dire d'obtenir un graphe ne possédant pas de paire de sommets pouvant être amalgamés.

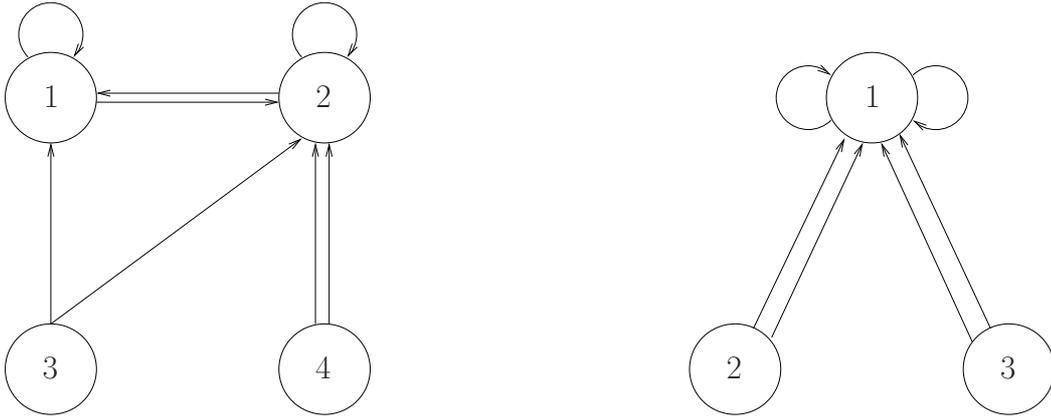


FIG. 1.6: Amalgamation selon la partition maximale.

Proposition 1.2.14 *Si deux suites d'amalgamations (entrantes) d'un graphe H produisent deux graphes F et G ne possédant aucune paire de sommets pouvant être amalgamés, alors F et G sont égaux (à renommage des sommets près). On dit que G est l'**amalgamation idéale entrante** de H .*

Preuve On note $(F_i)_{0 \leq i \leq n}$ et $(G_i)_{0 \leq i \leq m}$ les deux suites d'amalgamations de H qui produisent F et G ; $F_0 = G_0 = H$ et $F = F_n$ et $G = G_m$ ne possèdent aucune paire de sommets pouvant être amalgamés. On suppose que pour tout $0 \leq i \leq n-1$ (resp. $0 \leq i \leq m-1$) le passage de F_i à F_{i+1} (resp. G_i à G_{i+1}) se fait par une amalgamation élémentaire. On note V_H l'ensemble des sommets de H . Pour tout $0 \leq i \leq n-1$ (resp. $0 \leq i \leq m-1$), f_i (resp. g_i) associe à un sommet de H son image dans F_i (resp. G_i), et on note \mathcal{P}_i (resp. \mathcal{Q}_i) la partition de V_H égale à $\{f_i^{-1}(\{x\}); x \text{ sommet de } F_i\}$ (resp. $\{g_i^{-1}(\{x\}); x \text{ sommet de } G_i\}$).

On va montrer que \mathcal{P}_n et \mathcal{Q}_m sont égaux. Si \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont deux partitions d'un même ensemble, on note $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$ si pour tout $P \in \mathcal{P}$, il existe $Q \in \mathcal{Q}$ telle que $P \subset Q$.

$\mathcal{Q}_0 \subset \mathcal{P}_n$ de manière évidente et on suppose que $\mathcal{Q}_{k-1} \subset \mathcal{P}_n$. On identifie un élément Q de \mathcal{Q}_k avec le sommet de G_k correspondant (l'image par g_k des points de Q). On suppose que $\mathcal{Q}_k \not\subset \mathcal{P}_n$ et que Q_1 et Q_2 sont les éléments de \mathcal{Q}_{k-1} amalgamés lors du passage de G_{k-1} à G_k . On note P_1 et P_2 les éléments de \mathcal{P}_n tels que $Q_1 \subset P_1$ et $Q_2 \subset P_2$. On remarque que $P_1 \neq P_2$; \mathcal{Q}_k serait inclu dans \mathcal{P}_n dans le cas contraire.

Etant donné deux sommets a et b d'un graphe quelconque, on note $N(a, b)$ le nombre d'arêtes entre a et b . Pour tout $P_h \in \mathcal{P}_n$, il existe $Q_{i_1}, Q_{i_2}, \dots, Q_{i_h}$ de \mathcal{Q}_{k-1} tels que $P_h = \bigcup_{1 \leq j \leq h} Q_{i_j}$, et on a

$$N(P_1, P_h) = \sum_{1 \leq j \leq h} N(Q_1, Q_{i_j}) \text{ et } N(P_2, P_h) = \sum_{1 \leq j \leq h} N(Q_2, Q_{i_j}).$$

On déduit du fait que Q_1 et Q_2 peuvent être amalgamés que $N(P_1, P_h) = N(P_2, P_h)$ indépendamment de h ; P_1 et P_2 peuvent alors être amalgamés, ce qui est contraire aux hypothèses.

Finalement, $\mathcal{Q}_m \subset \mathcal{P}_n$, et un raisonnement similaire donnera $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{Q}_m$; on en conclut que $\mathcal{Q}_m = \mathcal{P}_n$. Si P et Q sont deux éléments de \mathcal{P}_n , la quantité $N(P, Q)$ est la même dans F et G ; si $p \in P$ est un sommet de H , alors on a $N(p, Q) = \sum_{q \in Q} N(p, q)$ (chaque élément q de Q est également un sommet de H). On obtient ainsi $F = G$. \square

Remarque 1.2.15 *On rappelle le théorème 1.2.5; toute conjugaison d'un shift à un autre peut être obtenue par une suite d'éclatements et d'amalgamations (entrants ou sortants). Le passage*

d'un graphe H à son amalgamation idéale se fait par amalgamations entrantes uniquement. Le résultat de la proposition précédente ne permet donc pas toujours de comparer deux shifts de type fini.

Par la suite, on s'intéressera à des graphes tels que celui de la figure 1.7 qui peuvent être grandement réduits par amalgamation. Sur ce graphe H , les sommets 1, 2, 3, 4 ont des arêtes sortantes correspondantes, et il en est de même pour les sommets 5, 6, 7. La partition maximale

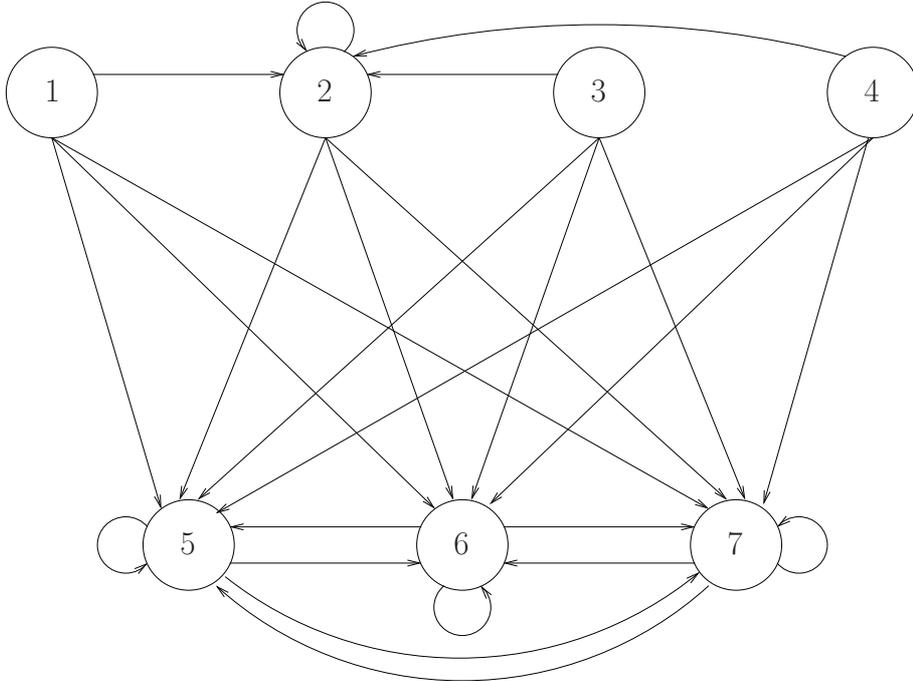


FIG. 1.7: H .

est $\mathcal{P} = \{P_1, P_2\}$ où $P_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ et $P_2 = \{5, 6, 7\}$. L'amalgamation de H selon \mathcal{P} est le graphe de la figure 1.8. Ce nouveau graphe est l'amalgamation idéale entrante de H . Au niveau

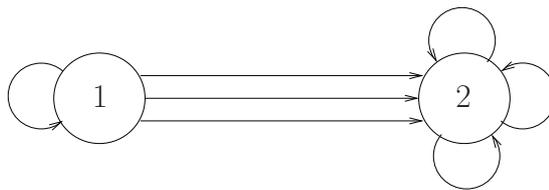


FIG. 1.8: Amalgamation maximale de H .

des matrices d'incidence, on est passé d'une matrice 7×7 à une matrice 2×2 . On est ainsi passé d'un shift dont la représentation pouvait paraître compliquée, à un shift conjugué beaucoup plus simple à décrire.

1.2.3 Graphes pondérés

Définition 1.2.16 Un *graphe pondéré* G est la donnée d'un triplet (V, E, p) où V est un ensemble fini de *sommets* ou *états*, E est un ensemble fini d'*arêtes*, et p est une application de E dans X (X est un ensemble quelconque que l'on choisira suivant les cas) appelée *fonction de pondération*. Le *sommet initial* de chaque arête e de E est noté $i(e)$, le *sommet terminal* est noté $t(e)$, et le *poinds* de l'arête e est noté $p(e)$.

Notre but est simplement d'adapter l'opération d'amalgamation vu en 1.2 aux graphes pondérés. On va donc donner une définition plus générale des amalgamations ; on pourra voir les amalgamations sur des graphes non pondérés comme des amalgamations sur des graphes pondérés pour lesquels la fonction de pondération est à valeur dans \mathbb{R} et dont toutes les arêtes sont de poids 1. On sort un petit peu du cadre des shifts même si on peut facilement associer un graphe non pondéré à tout graphe pondéré ; ces définitions nous seront cependant utiles par la suite.

Définition 1.2.17 Soit $G = (V, E, p)$ un graphe pondéré et \mathcal{P} une partition de V . \mathcal{P} sera dite **acceptable** si elle vérifie :

- $\forall P \in \mathcal{P}, P \neq \emptyset,$
- $\forall P \in \mathcal{P}, \forall s_1, s_2 \in P, \forall t \in V$
- $|O_{s_1} \cap I_t| = |O_{s_2} \cap I_t|,$
- $\forall x \in X, |\{e \in O_{s_1} \cap I_t; p(e) = x\}| = |\{e \in O_{s_2} \cap I_t; p(e) = x\}|.$

Définition 1.2.18 Soit $H = (V_H, E_H, p_H)$ un graphe pondéré. Soit $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_p\}$ une partition acceptable de V_H . Le **graphe amalgamé (entrant)** $H_{[\mathcal{P}]} = G = (V_G, E_G, p_G)$ **formé à partir de H selon \mathcal{P}** a p sommets ; $V_G = \{1, 2, \dots, p\}$. Si x et y sont deux sommets de H , on note α_{xy} l'ensemble des arêtes E_H de sommet initial x et de sommet terminal y . On note $\alpha_{ij} = \bigcup_{y \in P_j} \alpha_{xy} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ où x est un élément quelconque de P_i et y parcourt P_j .

L'ensemble $\beta_{ij} = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ des arêtes de sommet initial i et de sommet final j dans G est défini par

- $|\beta_{ij}| = |\alpha_{ij}|,$
- $\forall 1 \leq k \leq |\beta_{ij}|, p_G(f_k) = p_H(e_k).$

Pondération réelle

On se place dans le cas où les fonctions de pondération sont des applications à valeurs dans \mathbb{R}_+^* .

Remarque 1.2.19 L'égalité $\sum_{e \in \beta_{ij}} p_G(e) = \sum_{e \in \alpha_{ij}} p_H(e)$ découle directement de la définition d'amalgamation.

Définition 1.2.20 Soit $G = (V_G, E_G, p_G)$ un graphe pondéré, et $V_G = \{1, 2, \dots, p\}$. On appelle **matrice d'incidence** de G la matrice M_G définie pour tout $1 \leq i, j \leq p$ par $M_G(i, j) = \sum_{e \in O_i \cap I_j} p_G(e).$

Soit $H = (V_H, E_H, p_H)$ un graphe pondéré, V_H est de cardinal h et $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_p\}$ est une partition acceptable de V_H . On pourra supposer, quitte à renommer les sommets, que $P_1 = \{1_1, 1_2, \dots, 1_{p_1}\}, P_2 = \{2_1, 2_2, \dots, 2_{p_2}\}, \dots, P_p = \{p_1, p_2, \dots, p_{p_p}\}$. $G = (V_G, E_G, p_G)$ est l'amalgamation de H suivant \mathcal{P} , et on note $V_G = \{1, 2, \dots, p\}$ où j est l'amalgamation des sommets de la partition P_j . La **matrice de division** D de taille $h \times p$ est définie par

$$D(j, k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et la **matrice des arêtes** E de taille $p \times h$ définie par

$$E(k, t) = \sum_{e \in O_x \cap I_t} p_H(e)$$

où x est un élément quelconque de P_k .

Proposition 1.2.21 Soit G un graphe pondéré obtenu par amalgamation de H par une partition \mathcal{P} . Soient D et E les matrices de division et d'arêtes associées à \mathcal{P} . Alors $DE = M_H$ et $ED = M_G$.

Preuve On utilise les notations données précédemment.

$$\begin{aligned} ED(s^i, s^j) &= \sum_{t \in P_j} E(s^i, t) \\ &= \sum_{t \in P_j} \left(\sum_{e \in X} p_H(e) \right) && \text{avec } X = O_x \cap I_t \text{ où } x \text{ est un élément quelconque de } P_i \\ &= \sum_{e \in Y} p_H(e) && \text{avec } Y = O_x \cap \left(\bigcup_{t \in P_j} I_t \right) \text{ où } x \text{ est un élément quelconque de } P_i \\ &= M_G(s^i, s^j) && \text{d'après la remarque 1.2.19.} \end{aligned}$$

On en conclut que $ED = M_G$.

$$\begin{aligned} DE(s_i^j, s_k^l) &= E(s^j, s_k^l) \\ &= \sum_{e \in X} p_H(e) && \text{avec, pour } u = s_k^l \text{ et } x \text{ quelconque dans } P_j, X = O_x \cap I_u \\ &= \sum_{e \in Y} p_H(e) && \text{avec, pour } t = s_i^j \text{ et } u = s_k^l, Y = O_t \cap I_u \\ &= M_H(s_i^j, s_k^l). \end{aligned}$$

Cela donne $DE = M_H$. \square

En conclusion de ce paragraphe, on rappelle une propriété particulièrement pertinente sur le produit de matrices.

Proposition 1.2.22 Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times m$ avec $n \geq m$. On note $P_{AB}(X)$ le polynôme caractéristique de AB et $P_{BA}(X)$ le polynôme caractéristique de BA ; alors

$$P_{BA}(X) = (-X)^{n-m} P_{AB}(X)$$

Preuve Pour cette preuve, si A est une matrice $m \times n$, S un sous-ensemble de $\{1, \dots, m\}$, T un sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}$, on notera

- A_S la sous-matrice obtenue en ne gardant que les lignes de A dont l'indice est dans S ,
- A^T la sous-matrice obtenue en ne gardant que les colonnes de A dont l'indice est dans T ,
- A_S^T la sous-matrice obtenue en ne gardant que les éléments de A dont l'indice de ligne est dans S et l'indice de colonne est dans T .

De plus, pour i et j deux entiers naturels, on note S_i^j l'ensemble des sous-ensembles à i éléments de $\{1, 2, \dots, j\}$.

La démonstration se fait à l'aide de la formule de Binet-Cauchy :

$$\det(AB) = \sum_{S \in S_m^n} \det(A^S) \times \det(B_S)$$

où \det est l'application déterminant.

On remarque que dans le cas où $m > n$, il n'y a aucun ensemble S convenable et le déterminant est 0.

On peut adapter la formule à n'importe quel mineur principal de AB ou de BA . On suppose que $n \geq m$. La remarque précédente assure que tous les mineurs d'ordre strictement supérieur à m de BA (s'il y en a) seront tous nuls. Pour $1 \leq k \leq m$, la somme des mineurs principaux d'ordre k de AB est

$$\sum_{S \in S_k^m} \det(A_S B^S) = \sum_{S \in S_k^m} \left(\sum_{T \in S_k^n} \det(A_S^T) \times \det(B_T^S) \right)$$

La somme des mineurs principaux d'ordre k de BA est

$$\sum_{T \in S_k^n} \det(B_T A^T) = \sum_{T \in S_k^n} \left(\sum_{S \in S_k^m} \det(B_T^S) \times \det(A_S^T) \right)$$

Inverser les signes sommes permet d'obtenir l'égalité. Le coefficient de X^q dans le polynôme caractéristique d'une matrice d'ordre p est obtenu en multipliant la somme des mineurs principaux d'ordre $p - q$ (si $q \neq p$) ou 1 (si $q = p$) par $(-1)^q$; on obtient donc l'égalité proposée. \square

Si G est un graphe pondéré obtenu par amalgamation ou éclatement d'un graphe H , cette propriété donne des informations très précises sur les spectres de leurs matrices d'incidence.

1.2.4 Equivalence de shift

Ce paragraphe caractérise l'équivalence des shifts en termes de matrices. Les définitions et résultats qui vont suivre sont dûs à R. F. Williams ([24]).

Définition 1.2.23 Deux matrices carrés M, N à entrées dans \mathbb{N} sont dites **shift-équivalentes élémentaires** s'il existe 2 matrices U et V à entrées dans \mathbb{N} telle que $M = UV$ et $N = VU$. M et N peuvent être de dimensions différentes.

M et N seront **fortement shift-équivalentes** s'il y a une chaîne d'équivalences élémentaires entre M et N .

Théorème 1.2.24 Deux shifts de types de finis sont conjugués si et seulement si leurs matrices sont fortement shift-équivalentes.

La démonstration de ce théorème découle directement du théorème 1.2.5 et des définitions de matrice de division et de matrice d'arêtes associées à chaque éclatement ou amalgamation.

1.3 Système dynamique

Les 3 sections suivantes sont librement inspirées de [5] et [23] (chapitres 1,2) alternativement.

Définition 1.3.1 Un **système dynamique topologique** est la donnée d'une application continue $T : X \rightarrow X$ où X est un espace métrique compact.

Le système dynamique est dit **minimal** si X ne possède pas de fermé invariant par T non trivial. Il est **uniquement ergodique** s'il existe une unique mesure de probabilité borélienne sur X qui est invariante par T .

Système dynamique symbolique

Soit A un alphabet fini, A^* l'ensemble des mots finis sur A . On appelle mot infini bilatéral tout élément w de $A^{\mathbb{Z}}$. On écrit un tel mot en le pointant entre w_{-1} et w_0 , par exemple $w = \dots w_{-2} w_{-1} . w_0 w_1 \dots$. On note $A^{-\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des mots infinis unilatéraux indicés par les entiers strictement négatifs, et $A^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des mots infinis unilatéraux indicés par les entiers positifs ou nul. Les ensembles $A^{\mathbb{M}}$, pour $\mathbb{M} = \mathbb{Z}, \mathbb{N}, -\mathbb{N}^*$ sont munis du produit des topologies discrètes sur A , et forment des ensembles de Cantor. Ces topologies sont métrisables pour la distance définie pour tout $(w_i)_{i \in \mathbb{M}} \neq (v_i)_{i \in \mathbb{M}}$ par

$$d((w_i)_{i \in \mathbb{M}}, (v_i)_{i \in \mathbb{M}}) = \exp(-\min\{|i|; i \in \mathbb{M}; w_i \neq v_i\}).$$

On appelle $B = \{w.v; w \in A^* \cup A^{-\mathbb{N}^*}; v \in A^* \cup A^{\mathbb{N}}\}$ l'ensemble de tous les mots pointés pouvant être construits à partir de A . Cet ensemble contient $A^{\mathbb{Z}}$ et s'injecte canoniquement dans $(A \cup \{s\})^{\mathbb{Z}}$, où s est un symbole supplémentaire, en complétant tout élément de B qui n'est pas indicé par \mathbb{Z} par le symbole s .

On dit qu'une suite w_n d'éléments de B converge vers $w \in B$ si les images des w_n par l'injection canonique convergent dans $(A \cup \{s\})^{\mathbb{Z}}$ vers l'image de w . On remarque qu'une telle définition est compatible avec la convergence dans $A^{\mathbb{M}}$, pour $\mathbb{M} = \mathbb{Z}, \mathbb{N}, -\mathbb{N}^*$. En particulier une suite $(w_n)_n$ de mots finis dont la longueur tend vers l'infini et tels que w_n est toujours un préfixe (respectivement suffixe) de w_{n+1} , converge vers un mot infini de $A^{\mathbb{N}}$ (respectivement $A^{-\mathbb{N}^*}$).

On appelle **cylindres** les ensembles :

$$[W.V] = \{(w_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in A^{\mathbb{Z}}; w_{-|W|} \dots w_{-1} w_0 \dots w_{|V|-1} = WV\}$$

(lorsque W est vide, le cylindre est simplement noté $[V]$). Ils sont ouverts et fermés et forment une base de la topologie de $A^{\mathbb{Z}}$.

On note S le **décalage (shift)** sur $A^{\mathbb{Z}}$, qui à tout mot $w = (w_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ associe le mot $S(w) = (w_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$. On appelle point S -périodique tout mot w de $A^{\mathbb{Z}}$ tel qu'il existe $h \geq 1$ avec $S^h(w) = w$. Le langage $\mathcal{L}(w)$ d'un mot infini w est l'ensemble de tous les mots finis qui apparaissent dans w . Un élément de $\mathcal{L}(w)$ est appelé **facteur** de w .

Définition 1.3.2 *On dit qu'un facteur u de $\mathcal{L}(w)$ est **spécial à gauche** (resp. **à droite**) s'il existe deux éléments distincts a et b de A tels que les mots au et bu (resp. ua et ub) sont encore dans $\mathcal{L}(w)$. Un facteur est **bispécial** s'il est à la fois spécial à gauche et à droite.*

Le **système dynamique symbolique** engendré par un mot infini bilatéral u est le couple $(\Omega(u), S)$, ou $\Omega(u) = \{x \in A^{\mathbb{Z}}; \mathcal{L}(x) \subset \mathcal{L}(u)\}$. Notons que l'ensemble $\Omega(u)$ est l'adhérence dans $A^{\mathbb{Z}}$ de l'orbite de u sous l'action de S ; il est compact pour la topologie induite par celle de $A^{\mathbb{Z}}$ et la restriction de S à $\Omega(u)$, encore notée S , est un homéomorphisme. On remarque que $\Omega(u)$ est fini si et seulement si u est un point S -périodique.

On définit de même un **système dynamique unilatéral** en se plaçant dans $A^{\mathbb{N}}$. Le décalage S n'est alors plus injectif.

1.4 Substitutions

Définition 1.4.1 *Une **substitution** est un morphisme σ pour la concaténation du monoïde libre A^* , qui envoie A sur $A^* \setminus \{\epsilon\}$, et tel qu'il existe une lettre a de A vérifiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\sigma^n(a)| = +\infty$. La substitution se prolonge de manière naturelle à l'ensemble des mots infinis de $A^{\mathbb{Z}}$ par concaténation :*

$$\sigma(\dots w_{-2} w_{-1} . w_0 w_1 \dots) = \dots \sigma(w_{-2}) \sigma(w_{-1}) . \sigma(w_0) \sigma(w_1) \dots$$

Un mot u de $A^{\mathbb{Z}}$ est un **point périodique** de σ s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\sigma^k(u) = u$ et s'il existe une lettre c telle que tout facteur de u est facteur d'un itéré de σ sur c .

La substitution est dite **S -périodique** s'il existe un point périodique de σ qui soit également S -périodique.

Une substitution est dite **primitive** s'il existe un entier naturel k tel que $\sigma^k(a)$ contient une occurrence de b pour tout couple $(a, b) \in A^2$. Si σ est primitive, l'ensemble de ses points périodiques est fini et non vide.

1.4.1 Abélianisé

Si σ est une substitution primitive sur d lettres, on note M_σ la **matrice d'incidence** de σ , dont le coefficient (i, j) est le nombre d'occurrences de la lettre i dans $\sigma(j)$.

Une matrice est dite **primitive** s'il existe une puissance de cette matrice dont les coefficients sont tous strictement positifs. Une substitution est primitive si et seulement si sa matrice d'incidence est primitive. Le théorème de Perron-Frobenius implique que M_σ admet alors une valeur

propre dominante simple, qui est réelle positive et un vecteur propre associé à cette valeur propre à coefficients strictement positifs.

La substitution est dite **unimodulaire** si M_σ est de module 1.

1.4.2 Substitution de type Pisot

On dit qu'une substitution est de **type Pisot** si les valeurs propres de sa matrice d'incidence sont non nulles, différentes de 1 et si seule la valeur propre dominante est de module strictement supérieur à 1.

Propriétés 1.4.2 Soit σ une substitution de type Pisot, M_σ sa matrice d'incidence de polynôme caractéristique χ_{M_σ} ;

- σ est primitive,
- χ_{M_σ} est irréductible sur \mathbb{Q} ,
- aucun point fixe de σ n'est S -périodique.

1.4.3 Système dynamique substitutif

Soit u un point périodique d'une substitution primitive, alors $\Omega(u)$ ne dépend pas de u : on le note Ω , et (Ω, S) est appelé le **système dynamique symbolique** engendré par σ . De même $\mathfrak{L}(u)$ ne dépend pas de u , on le note alors $\mathfrak{L}(\Omega)$. Si la substitution est primitive, le système (Ω, S) est minimal : il ne possède pas de fermé invariant par S non trivial. De plus, ce système est uniquement ergodique (voir [22] chapitre V) ; ω étant un mot quelconque de Ω , l'unique mesure de probabilité invariante μ est définie sur tout cylindre $[V] = \{u \in \Omega; u_0 \dots u_{|V|-1} = V\}$ par

$$\mu([V]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} \#\{-n < k < n; \omega_k \omega_{k+1} \dots \omega_{k+|V|-1} = V\}$$

où $\#$ désigne le cardinal.

Le **système dynamique symbolique unilatéral** (Ω^+, S) possède des propriétés similaires, si ce n'est que le décalage S n'est pas une bijection sur Ω^+ . L'unique mesure de probabilité invariante μ est définie sur tout cylindre $[V] = \{u \in \Omega^+; u_0 \dots u_{|V|-1} = V\}$ par

$$\mu([V]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \#\{0 \leq k < n; \omega_k \omega_{k+1} \dots \omega_{k+|V|-1} = V\}$$

où ω est un mot quelconque de Ω^+ . On note que la projection canonique du système bilatéral sur le système unilatéral est injective sauf sur un ensemble dénombrable où elle est fini-à-un ([22], théorème V.21).

1.5 Automate et développement en préfixes-suffixes

1.5.1 Désubstitution et développement en préfixes-suffixes

Soit σ une substitution primitive non S -périodique sur un alphabet de cardinal fini A et soit (Ω, S) le système symbolique engendré par σ . La proposition suivante est assurée par un résultat de [19].

$$\forall w \in \Omega, \exists v \in \Omega, \exists k \in \mathbb{N}, v \text{ et } k \text{ uniques ;} \\ w = S^k(\sigma(v)) \text{ et } 0 \leq k < |\sigma(v_0)|.$$

Définitions 1.5.1 On appelle **désubstitution** l'application $\theta : \Omega \rightarrow \Omega$ définie par

$$\theta(w) = v \text{ si } w = S^k(\sigma(v)) \text{ avec } 0 \leq k < |\sigma(v_0)|.$$

On note $P = \{(p, a, s) \in A^* \times A \times A^*; \exists b \in A; \sigma(b) = pas\}$ et $\gamma : \Omega \rightarrow P$ l'application définie par

$$\gamma(w) = (p, w_0, s) \text{ si } \sigma((\theta(w))_0) = pw_0s \text{ et } w = S^{|p|}\sigma(\theta(w)).$$

Ces applications existent et sont continues pour les systèmes bilatères ; il est montré dans [19] que ce n'est pas toujours le cas pour les systèmes unilatères.

Définition 1.5.2 Soit $\Gamma : \Omega \rightarrow P^{\mathbb{N}}$ l'application continue définie par

$$\Gamma(w) = (\gamma(\theta^i(w)))_{i \geq 0} = (p_i, a_i, s_i)_{i \geq 0}.$$

La suite $\Gamma(w)$ est appelée **développement en préfixes-suffixes de w** .

Afin de comprendre un peu mieux ce développement, on fait les remarques suivantes. Si $\Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_{i \geq 0}$ est le développement d'un élément w de Ω , alors

$$a_0 = w_0 \text{ et } \forall i \geq 0, \sigma(a_{i+1}) = p_i a_i s_i.$$

Si les p_i et s_i ne sont pas tous vides à partir d'un certain rang, alors w est la limite de la suite des mots finis suivants :

$$\sigma^i(p_i) \dots \sigma(p_1) p_0 . w_0 s_0 \sigma(s_1) \dots \sigma^i(s_i).$$

Si les préfixes ou les suffixes sont vides à partir d'un certains rang, la suite ne converge pas vers un mot bi-infini. Le cas de ces suites sera réglé quelques lignes plus bas.

1.5.2 Automate des préfixes-suffixes

On définit l'automate A_σ associé à la substitution σ par :

- A est l'ensemble des états ; tous les états sont initiaux,
- P est l'ensemble des étiquettes (ou couleurs),
- il existe une flèche entre les états a et b étiquetée par $e = (p, a, s)$ si $\sigma(b) = pas$.

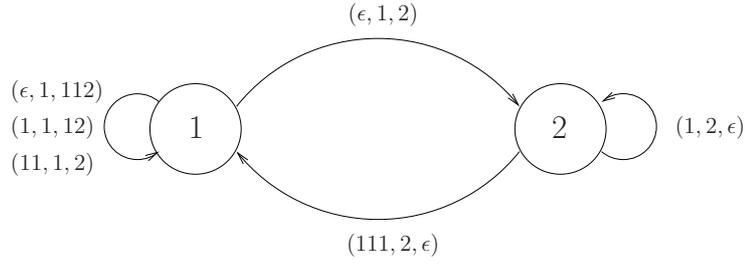
Cet automate est fortement connexe si σ est primitive.

Remarque 1.5.3 On utilisera indifféremment les termes étiquettes et couleurs.

Définition 1.5.4 Un élément $(e_i)_{i \geq 0} \in P^{\mathbb{N}}$ est dit **admissible** s'il s'agit d'un mot infini reconnu par l'automate des préfixes-suffixes. On note D l'ensemble des éléments admissibles de $P^{\mathbb{N}}$.

Il est à noter que que D est un sous-shift de type de fini de $P^{\mathbb{N}}$, pour lequel les mots interdits sont toutes les paires d'étiquettes qui ne se suivent pas dans l'automate.

Propriété 1.5.5 Pour tout $(p_i, a_i, s_i)_{0 \leq i \leq k-1}$, suite de couleurs d'un chemin fini de l'automate dont a_k est le dernier sommet, $\sigma^k(a_k) = \sigma^{k-1}(p_{k-1}) \dots \sigma(p_1) p_0 a_0 s_0 \sigma(s_1) \dots \sigma^{k-1}(s_{k-1})$. Notamment, $s_0 \sigma(s_1) \dots \sigma^{k-1}(s_{k-1})$ est un suffixe de $\sigma^k(a_k)$ et $\sigma^{k-1}(p_{k-1}) \dots \sigma(p_1) p_0$ est un préfixe de $\sigma^k(a_k)$.

FIG. 1.9: Automate des préfixes-suffixes pour $\sigma : 1 \mapsto 1112, 2 \mapsto 12$.

1.5.3 Propriétés remarquables de Γ

On note Ω_{per} l'ensemble des mots bi-infinis σ -périodiques et D_{min}, D_{max} et D_ϵ les sous-ensembles de D définis par :

- $D_{min} = \{(p_i, a_i, s_i)_{i \geq 0} \in D; \forall i \in \mathbb{N}, p_i = \epsilon\}$
- $D_{max} = \{(p_i, a_i, s_i)_{i \geq 0} \in D; \forall i \in \mathbb{N}, s_i = \epsilon\}$
- $D_\epsilon = \{(p_i, a_i, s_i)_{i \geq 0} \in D; (\exists i_0 \in \mathbb{N}; \forall i \geq i_0, p_i = \epsilon) \text{ ou } (\exists i_0 \in \mathbb{N}; \forall i \geq i_0, s_i = \epsilon)\}$.

Théorème 1.5.6 *Les égalités suivantes sont vérifiées.*

- $\Gamma(\Omega_{per}) = D_{min}$ et $\Gamma^{-1}(D_{min}) = \Omega_{per}$
- $\Gamma(S^{-1}(\Omega_{per})) = D_{max}$ et $\Gamma^{-1}(D_{max}) = S^{-1}(\Omega_{per})$
- $\Gamma(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S^n(\Omega_{per})) = D_\epsilon$ et $\Gamma^{-1}(D_\epsilon) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S^n(\Omega_{per})$.

Théorème 1.5.7 *Si σ est primitive et non S -périodique, l'application Γ est continue surjective de Ω sur D . Elle est injective sur $\Omega \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S^n(\Omega_{per})$ et est donc injective en mesure. De plus, pour tout d de D , $\#\Gamma^{-1}(\{d\}) \leq \#(\Omega_{per})$ ($\#$ désigne le cardinal).*

Soit σ une substitution primitive et non S -périodique et u un mot de Ω . On remarque que tout sommet de l'automate possède une unique arête entrante dont le triplet associé a un préfixe vide.

Propriété 1.5.8 *Si $(p_i, a_i, s_i)_i$ est le développement de u en préfixes-suffixes, alors le développement de $\sigma(u)$ est $(\epsilon, b_0, r_0)(p_i, a_i, s_i)_i$ où (ϵ, b_0, r_0) est l'unique triplet de préfixe vide dont l'arête entre dans le sommet a_0 .*

1.5.4 Développements et shiftés

Soit $(p_i, a_i, s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ le développement d'un mot u en préfixes-suffixes. Si $(p_i, a_i, s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ n'appartient pas à D_{max} , on peut obtenir le développement en préfixes-suffixes de $S(u)$ de la manière suivante :

- On note i_0 le plus petit entier tel que $s_{i_0} \neq \epsilon$.
- Si $i_0 = 0$, le développement de $S(u)$ est $(p'_0, a'_0, s'_0)(p_i, a_i, s_i)_{i \geq 1}$ avec
 - $p'_0 a'_0 s'_0 = p_0 a_0 s_0 = \sigma(a_1)$,
 - $|p'_0| = |p_0| + 1$.
- Si $i_0 > 0$, le développement de $S(u)$ est $(\epsilon, a'_i, s'_i)_{i < i_0} (p'_{i_0}, a'_{i_0}, s'_{i_0})(p_i, a_i, s_i)_{i > i_0}$ avec
 - $p'_{i_0} a'_{i_0} s'_{i_0} = p_{i_0} a_{i_0} s_{i_0} = \sigma(a_{i_0+1})$,
 - $|p'_{i_0}| = |p_{i_0}| + 1$,
 - $\forall 0 \leq j < i_0, a'_j s'_j = \sigma(a'_{j+1})$.

De même, si $(p_i, a_i, s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est le développement d'un mot u en préfixes-suffixes et $(p_i, a_i, s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ n'appartient pas à D_{min} , on peut obtenir le développement en préfixes-suffixes de $S^{-1}(u)$ de la manière suivante :

- On note i_0 le plus petit entier tel que $p_{i_0} \neq \epsilon$.
- Si $i_0 = 0$, le développement de $S^{-1}(u)$ est $(p'_0, a'_0, s'_0)(p_i, a_i, s_i)_{i \geq 1}$ avec
 - $p'_0 a'_0 s'_0 = p_0 a_0 s_0 = \sigma(a_1)$,
 - $|p'_0| = |p_0| - 1$.
- Si $i_0 > 0$, le développement de $S^{-1}(u)$ est $(p'_i, a'_i, \epsilon)_{i < i_0} (p'_{i_0}, a'_{i_0}, s'_{i_0})(p_i, a_i, s_i)_{i > i_0}$ avec
 - $p'_{i_0} a'_{i_0} s'_{i_0} = p_{i_0} a_{i_0} s_{i_0} = \sigma(a_{i_0+1})$,
 - $|p'_{i_0}| = |p_{i_0}| - 1$,
 - $\forall 0 \leq j < i_0, p'_j a'_j = \sigma(a'_{j+1})$.

1.6 Fractal de Rauzy

A tout mot u (fini) sur l'alphabet $\{1, 2, \dots, d\}$, on associe un vecteur $l(u)$ de \mathbb{R}^d appelé **abélianisé** ; la k -ième coordonnée de ce vecteur est le nombre d'occurrences de la lettre k dans u .

Définition 1.6.1 *On dit qu'une substitution σ sur un alphabet A satisfait la **condition de forte coïncidence** si pour tout paire $(b_1, b_2) \in A^2$, il existe un entier $n \geq 0$ et une lettre $a \in A$ tels que $\sigma^n(b_1) = p_1 a s_1$, $\sigma^n(b_2) = p_2 a s_2$, et $l(p_1) = l(p_2)$.*

Soit σ une substitution sur l'alphabet $A = \{1, 2, \dots, d\}$. On suppose σ unimodulaire, Pisot, vérifiant la condition de forte coïncidence et on appelle $\omega \in A^{\mathbb{N}}$ un point fixe (ou périodique) de σ . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\omega^{(n)}$ le préfixe de ω de longueur n . On note D la direction dilatante et H l'hyperplan contractant ; pour toute lettre i de A , \mathcal{F}_i est défini comme l'adhérence dans H de l'ensemble des projections sur H parallèlement à D des points $-l(\omega^{(n)})$, où n est un entier ≥ 0 tel que la première lettre de $S^n(\omega)$ est i . Le **fractal de Rauzy** \mathcal{F} est défini par

$$\mathcal{F} = \bigcup_{i \in A} \mathcal{F}_i.$$

On note $\mu_{\mathcal{F}}$ la restriction à \mathcal{F} de la mesure de Lebesgue sur H . On note que quels que soit $1 \leq i, j \leq d$, $\mu_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j) = 0$.

Remarque 1.6.2 *Si ω se projette sur l'origine de \mathbb{R}^d , la projection de $S^n(\omega)$ est effectivement donnée par le projeté du point $-l(\omega^{(n)})$.*

Pour tout lettre i , on note $\delta(i)$ la projection de $l(i)$ sur H parallèlement à D . Le théorème suivant est démontré dans [6] et [23] (chapitre 3) ; on utilise les notations données précédemment.

Théorème 1.6.3 *Soit σ une substitution (sur l'alphabet $A = \{1, 2, \dots, d\}$) unimodulaire, Pisot, et vérifiant la condition de forte coïncidence. Le système dynamique (Ω, S) engendré par σ est conjugué en mesure à l'échange de domaines défini (presque partout relativement à $\mu_{\mathcal{F}}$) par*

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \quad \mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{F} \\ x \in \mathcal{F}_i &\mapsto x - \delta(i). \end{aligned}$$

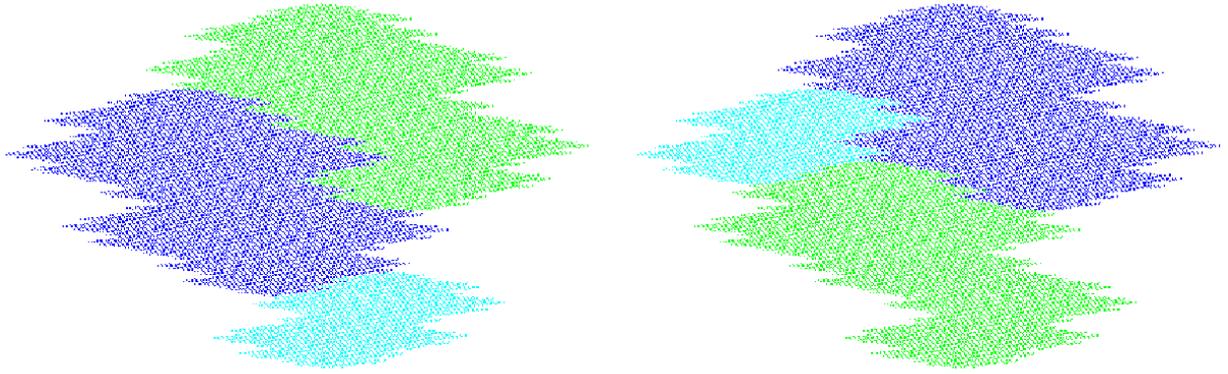


FIG. 1.10: Echange de domaines sur le fractal de Rauzy associé à $\sigma : a \mapsto ba, b \mapsto babac, c \mapsto b$.

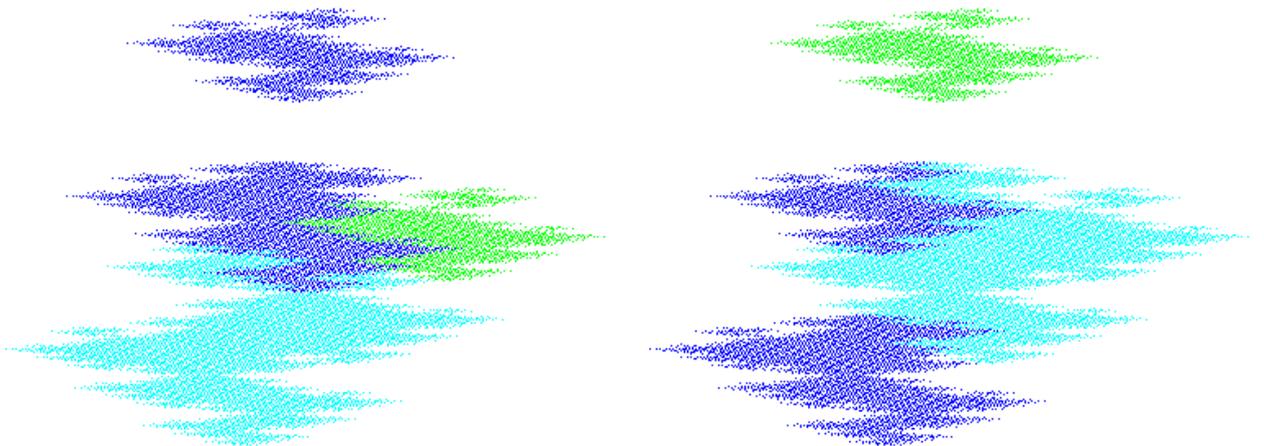


FIG. 1.11: Echange de domaines sur le fractal de Rauzy associé à $\sigma : a \mapsto c, b \mapsto bc, c \mapsto cabc$.

Chapitre 2

Arbres réels, groupes libres, automorphismes

2.1 Définitions

2.1.1 Arbres réels

Définitions 2.1.1 *Un arbre réel T est un espace métrique où deux points quelconques sont joints par un unique arc, et cet arc est isométrique à un segment de \mathbb{R} . On notera $[s, t]$ l'arc joignant s à t .*

L'ensemble \mathbb{R}^2 muni de la distance $d((s_1, t_1), (s_2, t_2)) = |s_1 - s_2| + |t_1| + |t_2|$ est un arbre réel. On peut le visualiser comme la droite ($y = 0$) sur laquelle est attachée en chaque point une droite verticale. L'arc de (s_1, t_1) à (s_2, t_2) est la concaténation de l'arc vertical $[(s_1, t_1), (s_1, 0)]$, de l'arc horizontal $[(s_1, 0), (s_2, 0)]$ et de $[(s_2, 0), (s_2, t_2)]$.

Propriétés 2.1.2 *Un arbre réel T est 0-hyperbolique ; il vérifie les deux conditions équivalentes suivantes :*

- pour tout x, y, z de T , $[x, y] \subset [x, z] \cup [z, y]$,
- pour tout w, x, y, z de T , $d(x, z) + d(y, w) \leq \max\{d(x, y) + d(z, w), d(x, w) + d(z, y)\}$.

Dans un arbre réel, un connexe est convexe. Toute partie connexe d'un arbre réel est connexe par arc et simplement connexe.

Définitions 2.1.3 *On appelle **germe** en un point t d'un arbre réel T une classe d'équivalence de chemins isométriques p de $[0, l(p)]$ dans T ($l(p)$ étant la longueur de p), avec $l(p) > 0$ et $p(0) = t$ où deux chemins p et p' sont équivalents s'il existe un réel ϵ strictement positif tel que, pour tout $x \leq \epsilon$, $p(x) = p'(x)$.*

*Un **point de branchement** d'un arbre réel T est un point t tel qu'il y a au moins 3 germes distincts issus de t .*

*On appelle **point terminal** un point dont est issu un unique germe.*

*Le **degré** d'un point est le nombre de germes issus de celui-ci.*

2.1.2 Le groupe libre et son bord

Le paragraphe suivant est tiré de [12] ; cet article présente également quelques définitions et résultats sur les arbres réels munis d'une action du groupe libre par isométries.

On note F_n le groupe libre de rang $n \geq 2$. Une base A étant fixé, on peut voir $F_n = F(A)$ comme l'ensemble des mots (finis) $w = w_0 \dots w_k$, ($w_i \in A \cup A^{-1}$) réduits ($w_i \neq w_{i+1}^{-1}$) ; l'élément neutre est noté ϵ . La loi du groupe est la concaténation-réduction.

Le bord (de Gromov) ∂F_n de F_n peut être vu comme l'ensemble $\partial F(A)$ des mots $X = x_0 \dots x_k \dots$ infinis à droite, réduits sur l'alphabet $A \cup A^{-1}$. On munit $A \cup A^{-1}$ de la topologie discrète et $(A \cup A^{-1})^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit. Le bord $\partial F_n \subset (A \cup A^{-1})^{\mathbb{N}}$ hérite de la topologie induite : c'est un ensemble de Cantor. Le groupe libre agit (continûment) sur son bord par translations à gauche : si $w = w_0 \dots w_k \in F(A)$, $Y = y_0 \dots y_l \dots \in \partial F(A)$, alors $wY = w_0 \dots w_{k-i} y_{i+1} \dots y_l \dots \in \partial F(A)$ où $y_0 \dots y_i = w_k^{-1} \dots w_{k-i+1}^{-1}$ est le plus long préfixe commun à w^{-1} et Y .

Remarque 2.1.4 *Le groupe libre F_n et son bord ∂F_n peuvent être définis sans faire mention d'une base A . Par exemple : F_n est le groupe fondamental d'un graphe de caractéristique d'Euler $n - 1$; le bord ∂F_n est le bord du revêtement universel (qui est un arbre) de ce graphe.*

2.1.3 Action de groupe

On considère un arbre réel T muni d'une action à gauche par isométries du groupe libre F_n . Le stabilisateur $Stab(x)$ d'un point x de T est le sous-groupe de F_n dont les éléments fixent x . De même, le stabilisateur d'un arc $[x, y]$ est le sous-groupe dont les éléments fixent tous les points de $[x, y]$.

L'action de F_n sur T est dite

- triviale $\Leftrightarrow \exists x \in T; Stab(x) = F_n$,
- minimale \Leftrightarrow il n'y a pas de sous-arbre propre invariant par F_n ,
- libre \Leftrightarrow le stabilisateur de chaque point est trivial,
- à stabilisateurs d'arcs triviaux \Leftrightarrow le stabilisateur de chaque arc $[x, y]$ est trivial,
- petite \Leftrightarrow aucun stabilisateur d'arc ne contient un groupe libre de rang 2,
- très petite \Leftrightarrow petite, aucun élément non trivial de F_n ne fixe de tripode (enveloppe convexe de trois points) non dégénéré (possède un point dont le complémentaire a 3 composantes connexes), aucun élément non trivial de F_n ne renverse un arc non dégénéré de T ,
- à orbites denses \Leftrightarrow il existe un point de T dont l'orbite sous l'action de F_n est dense dans T ; dans ce cas toutes les orbites sont denses.

Propriété 2.1.5 *Si l'action est à orbites denses, les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- l'action est à stabilisateurs d'arcs triviaux,
- l'action est petite,
- l'action est très petite.

2.2 Automorphismes de groupes libres

Cette section est librement inspirée de [1].

On note $Aut(F_n)$ le groupe des automorphismes du groupe libre F_n . Si w est un élément de F_n , on note i_w l'automorphisme défini pour tout élément g de F_n par $i_w(g) = w^{-1}gw$: i_w est un **automorphisme intérieur** ou **conjugaison**. On note $Inn(F_n)$ l'ensemble des conjugaisons de $Aut(F_n)$ et $Out(F_n) = Aut(F_n)/Inn(F_n)$. $Inn(F_n)$ est l'ensemble des **automorphismes intérieurs**, et $Out(F_n)$ est l'ensemble des **automorphismes extérieurs**.

Certains automorphismes nous intéresseront particulièrement : l'ensemble des automorphismes **positifs**.

Définition 2.2.1 *On dit qu'un élément ϕ de $Aut(F_n)$ est **positif** s'il existe une base A de F_n telle que le mot réduit $\phi(a)$, quel que soit a de A , ne contient aucune lettre avec un exposant négatif.*

Un automorphisme positif sur $F(A)$ (le groupe libre de base A) est l'extension d'une substitution sur A^* .

Définition 2.2.2 Une substitution est *inversible* si elle s'étend en un automorphisme de groupe libre.

Nous définissons également les automorphismes **iwip** (**irreducible with irreducible power**).

Définition 2.2.3 Un automorphisme ϕ de $\text{Aut}(F_n)$ est dit **iwip** si pour tout facteur libre (sous-groupe de F_n engendré par un sous-ensemble d'une base de F_n) F de F_n , et pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\phi^k(F)$ n'est pas un conjugué de F . Un automorphisme extérieur Φ est dit **iwip** s'il existe un automorphisme $\phi \in \Phi$ iwip; dans ce cas, tous les éléments de Φ sont iwip.

Une relation intéressante entre substitutions et automorphismes iwip est donnée ci-dessous.

Proposition 2.2.4 Soit σ une substitution inversible.

- Si le polynôme caractéristique de la matrice d'incidence de σ est irréductible sur \mathbb{Z} , alors σ s'étend en un automorphisme iwip.
- Si σ s'étend en un automorphisme iwip, alors σ est primitive.

On note que la primitivité n'implique pas la propriété iwip.

2.2.1 Représentant train-track d'un automorphisme iwip

Graphes topologiques

Un graphe combinatoire G est la donnée d'un couple (V, E) , où V est un ensemble fini de sommets, et E est un ensemble fini d'arêtes ou arcs. Le sommet initial d'une arête e est noté $i(e)$ et le sommet terminal est noté $t(e)$. L'ensemble des sommets est supposé symétrique; pour tout arête e , il existe une arête inverse notée e^{-1} telle que $i(e) = t(e^{-1})$ et $t(e) = i(e^{-1})$.

Le **graphe topologique** associé à un graphe combinatoire G est défini comme suit :

- pour toute paire $\{e, e^{-1}\}$ d'arêtes inverses, on choisit un représentant canonique (une orientation de l'arête),
- pour tout représentant canonique e_j , on définit le segment (espace topologique homéomorphe à un segment de \mathbb{R}) $I_j = [a_j, b_j]$,
- on définit une relation d'équivalence sur $V \coprod (\coprod_j I_j)$ en prenant la fermeture transitive de $a_i \sim v_j$ si v_j est le point initial de e_i et $b_i \sim v_j$ si v_j est le point terminal de e_i ,
- le **graphe topologique** associé à G est le quotient de $V \coprod (\coprod_j I_j)$ par la relation d'équivalence, muni de la topologie quotient.

Dans un graphe topologique, un **chemin** est une immersion (une application localement injective) d'un segment $[a, b]$ (pour un chemin fini), de $[0, +\infty[$ (pour un rayon), de \mathbb{R} (pour une ligne), ou d'un point (pour un chemin trivial). Cette définition implique qu'un chemin est automatiquement réduit.

Graphes marqués et représentants topologiques

La rose à n pétales, notée R_n , est le graphe constitué d'un unique sommet $*$ et de n arêtes (de $*$ à $*$). On identifie son groupe fondamental $\pi_1(R_n, *)$ au groupe libre F_n .

Une **équivalence d'homotopie** $f : G \rightarrow G'$ entre deux graphes topologiques est une application continue qui induit un isomorphisme entre les groupes fondamentaux de G et G' , c'est-à-dire une application continue telle qu'il existe $g : G' \rightarrow G$ pour laquelle $f \circ g$ et $g \circ f$ sont homotopiquement équivalents à l'identité. Pour tout graphe topologique connexe, il existe un unique entier n (le **nombre cyclomatique** de G , égal à $1 - \chi(G)$ où $\chi(G)$ est la caractéristique d'Euler de G) tel qu'il existe une équivalence d'homotopie $\tau : R_n \rightarrow G$. Un **graphe marqué** est la donnée d'un graphe G et de cette équivalence d'homotopie, appelée le **marquage**. En considérant que τ induit l'identité entre $\pi_1(R_n, *)$ et $\pi_1(G, \tau(*))$, on identifie F_n avec $\pi_1(G, \tau(*))$.

Si G est un graphe de marquage $\tau : R_n \rightarrow G$, avec une équivalence d'homotopie $f : G \rightarrow G$, alors f induit un automorphisme de $\pi_1(G, \tau(*))$. Cet automorphisme est défini à composition par conjugaison près, puisque l'identification entre $\pi_1(G, \tau(*))$ et $\pi_1(G, f(\tau(*)))$ dépend du choix d'un chemin de $\tau(*)$ à $f(\tau(*))$. f induit donc un automorphisme extérieur.

Définitions 2.2.5 Soit $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ un automorphisme extérieur. On appelle **représentant topologique** de Φ , une application $f : G \rightarrow G$, où G est un graphe marqué, telle que :

- l'image d'un sommet est un sommet,
- l'image d'un arc est un chemin (réduit) de G ,
- f induit Φ sur $F_n \simeq \pi_1(G, \tau(*))$ (en particulier, f est une équivalence d'homotopie).

Train-track

Si f est un représentant topologique, l'image d'un arc est un chemin, mais l'image d'un chemin n'est pas nécessairement un chemin (des annulations peuvent avoir lieu). On définit donc les applications **train-track**.

Définition 2.2.6 Une application **train-track** est un représentant topologique $f : G \rightarrow G$ d'un automorphisme de groupe libre tel que :

- G n'a pas de sommet de valence 1 ou 2,
- pour tout arc e et tout n , $f^n(e)$ est un chemin de G .

Ainsi, itérer f sur un arc ne produira pas d'annulations.

Une définition alternative peut être trouvée dans [3].

Définition 2.2.7 $f : G \rightarrow G$ est une application **train-track** s'il existe un ensemble L de paires de germes distincts de segments initiaux d'arcs de G tels que

- les germes d'une paire partent du même sommet de G ,
- L est fermé sous l'action de f ,
- pour tout arc e de G , les paires de germes croisées par $f(e)$ sont dans L .

Définitions 2.2.8 Les éléments de L sont appelés **tournants légaux**, et les paires de germes n'appartenant pas à L sont les **tournants illégaux**.

Un chemin α est dit **légal** s'il ne croise que des tournants légaux, ou, alternativement, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n(\alpha)$ est un chemin. Il est dit **illégal** sinon.

On note que tout automorphisme positif peut être représenté par un train-track sur la rose R_n . Dans [4], M. Bestvina et M. Handel montre le théorème suivant :

Théorème 2.2.9 Tout automorphisme extérieur iwip $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ admet une application train-track $f : G \rightarrow G$ comme représentant topologique.

Une méthode de construction est également donnée dans [4].

Matrices d'incidence, coefficient de dilatation

Soit $f : G \rightarrow G$ un représentant topologique d'un automorphisme extérieur Φ , et soient $e_1, e_1^{-1}, \dots, e_p, e_p^{-1}$ les arcs de G . La matrice d'incidence M_f associée à f est la matrice $p \times p$ dont le coefficient (i, j) est donné par le nombre de fois que $f(e_j)$ croise e_i ou e_i^{-1} . Un représentant topologique est primitif si et seulement si sa matrice d'incidence est primitive ; dans ce cas, le théorème de Perron-Frobenius donne une valeur propre réelle dominante $\lambda_f > 1$.

Propriété 2.2.10 *Si $f : G \rightarrow G$ est un représentant train-track, on peut associer des longueurs aux arcs de G , de manière à ce que f étende uniformément la longueur de chaque chemin légal par un facteur constant λ_f . λ_f est la valeur propre de Perron-Frobenius de la matrice d'incidence associée à f , et les longueurs des arcs de G sont données par son vecteur propre (à gauche) positif (unique à coefficient multiplicateur près).*

Le théorème suivant pourra être trouvé dans [4].

Théorème 2.2.11 *Si $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ est iwip, alors il existe un représentant topologique primitif f de Φ dont la valeur propre de Perron-Frobenius est minimale (inférieure ou égale à celle des autres représentants topologiques). f est alors train-track.*

Cette valeur propre minimale sera notée λ_Φ et est appelée **coefficient de dilatation** de Φ .

La proposition suivante donne une condition suffisante pour vérifier qu'un automorphisme ϕ de F_n est iwip. On note M_ϕ^+ (resp. M_ϕ^-) la matrice $n \times n$ dont le coefficient (i, j) est donné par le nombre d'occurrences de a_i (resp. a_i^{-1}) dans $\phi(a_j)$, et $A_\phi = M_\phi^+ - M_\phi^-$. La proposition suivante est démontrée dans [1] (proposition 2.11).

Proposition 2.2.12 *Si le polynôme caractéristique de A_ϕ est irréductible sur \mathbb{Z} , alors ϕ est iwip.*

Chemin de Nielsen

Soit $f : G \rightarrow G$ un représentant topologique train-track d'un automorphisme $\phi \in \text{Out}(F_n)$. Un chemin ρ de G est un **chemin de Nielsen** si $f^k(\rho) \neq \rho$ et $[f^k(\rho)] = \rho$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. $[f^k(\rho)]$ est la réduction relativement aux points terminaux de $f^k(\rho)$. Tout chemin de Nielsen est la concaténation de chemins de Nielsen indivisibles ou **iNp**. Un iNp possède exactement un tournant illégal. Un représentant train-track n'a qu'un nombre fini d'iNp, et peut être ré-arranger pour en avoir au maximum 1.

2.3 Arbre invariant d'un automorphisme

Le théorème suivant est énoncé dans [10] et [15].

Théorème 2.3.1 *Pour tout automorphisme α du groupe libre F , il existe un arbre réel T tel que*

- *l'action de F sur T est non-triviale, minimale, les stabilisateurs d'arcs sont triviaux,*
- *il existe λ et une homothétie $H : T \rightarrow T$ de facteur λ telle que*

$$\alpha(w)H = Hw : T \rightarrow T$$

pour tout $w \in F$,

- *si $\lambda > 1$, l'action est à orbites denses,*
- *si $\text{ind}(\alpha) > 0$, alors H a au moins un point fixe dans T .*

$\text{ind}(\alpha)$ désigne l'indice de l'automorphisme ; il est défini par

$$\text{ind}(\alpha) = \text{Rk}(\text{Fix}(\alpha)) + \frac{1}{2}a(\alpha) - 1,$$

où $\text{Fix}(\alpha) = \{g \in F; \alpha(g) = g\}$ et $a(\alpha)$ est le nombre de classes d'équivalence de points fixes (de ∂F) attractifs (au sens topologique) de α et X_1 et X_2 sont dits équivalents s'il existe $g \in \text{Fix}(\alpha)$ tel que $X_2 = gX_1$.

On donne une construction dans le cas où α est un automorphisme iwip dont le coefficient de dilatation est > 1 . On note Φ la classe extérieure de α . Φ admet un représentant topologique train-track h_0 sur un graphe G . On note $e_1, e_1^{-1}, \dots, e_p, e_p^{-1}$ les arcs de G . La matrice d'incidence M_{h_0} a une valeur propre dominante λ_{h_0} (supposée > 1) et il existe un unique (à homothétie près) vecteur propre (à gauche) v strictement positif associé à λ_{h_0} . On donne à chaque arc e_i la

longueur $v(i)$. On fait du revêtement universel \tilde{G} de G un arbre réel en relevant la métrique de G et on note d_0 la distance induite sur \tilde{G} ; F agit par isométries sur \tilde{G} . On relève l'application h_0 en une application $h : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ qui vérifie

$$\alpha(w)h = hw$$

quel que soit $w \in F$; on a $d_0(h(x), h(y)) \leq \lambda_{h_0} d_0(x, y)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la pseudo-distance d_n sur \tilde{G} par

$$d_n(x, y) = \frac{d_0(h^n(x), h^n(y))}{\lambda_{h_0}^n}.$$

La pseudo-distance $d_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$ vérifie $d_\infty(x, y) \leq d_0(x, y)$ et $d_\infty(h(x), h(y)) = \lambda_{h_0} d_\infty(x, y)$.

Remarque 2.3.2 *On se permettra de dire qu'un chemin de \tilde{G} est légal s'il est le relevé d'un chemin légal de G .*

La propriété suivante nous sera très utile et se déduit facilement de la propriété 2.2.10.

Propriété 2.3.3 *Si $\alpha = [x, y]$ est un chemin légal de \tilde{G} , alors la suite $(d_k(x, y))_k$ est constante; $d_\infty(x, y) = d_0(x, y)$.*

On définit finalement l'espace métrique (T, d_∞) , où $T = \tilde{G}/\sim$ avec $x \sim y$ si et seulement si $d_\infty(x, y) = 0$. \tilde{G} est un arbre réel, et il est en particulier 0-hyperbolique; par définition de d_∞ , T est encore 0-hyperbolique. De plus, puisque $d_\infty \leq d_0$, alors la surjection naturelle de \tilde{G} dans T est continue et T est connexe par arcs. Enfin, l'application H induite par h est une homothétie de rapport λ_{h_0} . T et H vérifient les propriétés du théorème 2.3.1 et on dit que T est un arbre invariant de α .

2.3.1 Application Q

Soit T un arbre réel; F agit par isométries sur T et l'action est minimale, à orbites denses, et a des stabilisateurs d'arcs triviaux. Dans [14], G. Levitt et M. Lustig définissent une application Q équivariante et surjective de ∂F dans $\overline{T} \cup \partial T$ (où \overline{T} est la complétion métrique de T et ∂T son bord de Gromov).

Définition 2.3.4 *Pour tout $X \in \partial F$, pour toute suite $(X_n)_n$ de points de F qui converge vers X , et pour tout point P de T , on a dans $\overline{T} \cup \partial T$:*

$$[P, Q(X)] = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{i \geq n} [P, X_i P]}.$$

Cette application vérifie notamment la propriété suivante.

Propriété 2.3.5 *Soit $X \in \partial F$; pour tout Z de \overline{T} , si la suite $(X_n)_n$ de F tend vers X (lorsque $n \rightarrow +\infty$) et si la suite $(X_n Z)_n$ converge (lorsque $n \rightarrow +\infty$) vers un point R de \overline{T} , alors $R = Q(X)$.*

En revanche, la suite $(X_n Z)_n$ ne converge pas pour toute suite $(X_n)_n \rightarrow X$.

Chapitre 3

Points fixes et automates des préfixes-suffixes

On munit le groupe libre F_d d'une base quelconque. $Aut(F_d)$ est le groupe des automorphismes du groupe libre F_d . Si w est un élément de F_d , on note i_w l'automorphisme défini pour tout élément g de F_d par $i_w(g) = w^{-1}gw$: i_w est un **automorphisme intérieur** ou **conjugaison**. On note $Inn(F_d)$ l'ensemble des conjugaisons de $Aut(F_d)$ et $Out(F_d) = Aut(F_d)/Inn(F_d)$. $Inn(F_d)$ est l'ensemble des **automorphismes intérieurs**, et $Out(F_d)$ est l'ensemble des **automorphismes extérieurs**.

Définitions 3.0.6 On dit que deux automorphismes α et β représentent le même automorphisme extérieur s'il existe $w \in F_d$ tel que $\beta = i_w \circ \alpha$. α et β sont dits **similaires** s'il existe un mot v de F_d tel que $\beta = i_v \circ \alpha \circ (i_v)^{-1}$, ou de manière équivalente si $w = \alpha(v^{-1})v$.

Pour tout $\alpha \in Aut(F_d)$, on note $Fix(\alpha) = \{g \in F_d; \alpha(g) = g\}$. On s'intéresse aux mots X de ∂F_d fixe par α , et plus particulièrement aux mots fixes attractifs ($\lim_{p \rightarrow +\infty} \alpha^p(X') = X$, pour tout X' dans un certain voisinage de X). On dit que deux mots fixes X_1, X_2 de ∂F_d sont équivalents s'il existe un élément g de $Fix(\alpha)$ tel que $X_2 = gX_1$. On note $a(\alpha)$ le nombre de classes d'équivalence de mots fixes attractifs. Le théorème suivant est énoncé dans [10] (théorème 1').

Théorème 3.0.7 Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ des automorphismes de $Aut(F_d)$ représentant le même automorphisme extérieur et appartenant à des classes de similarité distinctes. Alors

$$\sum_{i=0}^k (rk(Fix(\alpha_i)) + \frac{1}{2}a(\alpha_i) - 1) \leq n - 1.$$

On choisit une substitution σ primitive inversible sur un alphabet A , et on note encore σ l'automorphisme de groupe libre $F(A) = F_d$ muni de la base A . (Ω, S) est le système dynamique (sur les mots bi-infinis) engendré par σ . Pour tout mot $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de Ω on note $u = u^- . u^+$, où u^- est un mot infini à gauche tel que pour tout $n \in -\mathbb{N}^*$, $u_n^- = u_n$, et u^+ est un mot infini à droite tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^+ = u_n$.

Définition 3.0.8 Si $u = u^- . u^+$, on dit que u^- est le **passé** de u et que u^+ est son **futur**.

Enfin, si $u^- = \dots u_{-k}^- \dots u_{-2}^- u_{-1}^-$, on note $(u^-)^{-1} = v_1 v_2 \dots v_k \dots$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = (u_{-n}^-)^{-1}$.

Définition 3.0.9 On dit d'un mot $w = w_0 w_1 \dots w_n$ de $F_d = F(A)$ qu'il est **pur positif** si toute lettre w_i , $0 \leq i \leq n$ de w est un élément de A . Il est **pur négatif** si toute lettre est un élément

de A^{-1} . De même, un mot w de $\partial F_d = \partial F(A)$ est **pur positif** si pour tout $i \in \mathbb{N}$, $w_i \in A$ et il est **pur négatif** si pour tout $i \in \mathbb{N}$, $w_i \in A^{-1}$.

Le mot $(u^-)^{-1}$ est un élément pur négatif de ∂F_d .

Soit σ_0 un automorphisme représentant le même automorphisme extérieur que σ . Si $u \in \Omega$ est fixe (attractif) par σ_0 , alors u^+ et $(u^-)^{-1}$ sont fixes (attractifs) par σ_0 . Le théorème précédent justifie l'étude des mots de Ω qui sont fixe par σ_0 . On remarque cependant que si u est le seul mot de Ω fixe par σ_0 , alors il n'apparaît pas dans le décompte des points fixes.

Définition 3.0.10 On appellera **point fixe** (en opposition à mot fixe) un n -uplet, avec $n \geq 2$, $(u^{(1)}, \dots, u^{(n)})$ de mots fixes (par un automorphisme représentant le même automorphisme extérieur que σ) de Ω vérifiant soit

- pour tout $1 \leq i \leq n$ et pour tout $k \in -\mathbb{N}^*$, $u_k^{(i)} = u_k^{(1)}$,
- les $u_0^{(i)}$ (premières lettres des futurs des $u^{(i)}$) sont deux à deux distincts,
- tout mot $v \in \Omega$, $v \neq u^{(i)}$ quel que soit $1 \leq i \leq n$, tel que $v_k = u_k^{(1)}$ pour tout $k < 0$ vérifie nécessairement $v_0 = u_0^{(i)}$ pour un certain $1 \leq i \leq n$.

soit

- pour tout $1 \leq i \leq n$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k^{(i)} = u_k^{(1)}$,
- les $u_{-1}^{(i)}$ (dernières lettres des passés des $u^{(i)}$) sont deux à deux distincts,
- tout mot $v \in \Omega$, $v \neq u^{(i)}$ quel que soit $1 \leq i \leq n$, tel que $v_k = u_k^{(1)}$ pour tout $k \geq 0$ vérifie nécessairement $v_{-1} = u_{-1}^{(i)}$ pour un certain $1 \leq i \leq n$.

Remarque 3.0.11 Soient $(u^{(1)}, \dots, u^{(n)})$ un point fixe par $i_w \circ \sigma^k$ et $(v^{(1)}, \dots, v^{(m)})$ un point fixe par $i_w \circ \sigma^h$. S'il existe i et j tels que $u^{(i)}$ et $v^{(j)}$ sont sur la même orbite, alors $i_w \circ \sigma^k$ et $i_w \circ \sigma^h$ sont dans la même classe de similarité et réciproquement.

Dans le cas qui nous intéresse (substitutions primitives inversibles), le théorème 3.0.7 peut être reformulé; l'avantage de cette reformulation est qu'on ne se souciera ni du groupe fixe, ni des classes d'équivalence de mots fixes, ni des classes de similarités des automorphismes.

Proposition 3.0.12 Si $(u^{(1,1)}, \dots, u^{(n_1,1)}), (u^{(1,2)}, \dots, u^{(n_2,2)}), \dots, (u^{(1,p)}, \dots, u^{(n_p,p)})$ sont des points fixes distincts, alors $\sum_{1 \leq i \leq p} (n_i - 1) \leq 2n - 2$.

3.1 Le cas des automorphismes positifs

On va se servir de l'automate des préfixes-suffixes comme moyen de caractérisation de ces points fixes. Avant d'expliquer son rôle, on donne quelques propriétés nous permettant de passer facilement du monde des substitutions à celui des automorphismes de groupes libres et inversement. On se permettra de passer du vocabulaire des substitutions à celui des automorphismes suivant ce dont nous avons besoin. On choisit une substitution primitive inversible σ sur un alphabet A (de cardinal d) et on note (Ω, S) le système dynamique (sur les mots bi-infinis) engendré. $F_d = F(A)$ est le groupe libre de base A . On note de plus Ω^+ la projection de Ω sur $A^{\mathbb{N}}$ et Ω^- la projection de Ω sur $A^{-\mathbb{N}^*}$; l'inverse de tout mot de Ω^- est un mot pur négatif de ∂F_d .

Remarque 3.1.1 Si $u = u^- . u^+$ est un élément de Ω fixe par $i_w \circ \sigma^k$, alors u^+ et $(u^-)^{-1}$ sont des mots de ∂F_d fixes par $i_w \circ \sigma^k$ et réciproquement.

Proposition 3.1.2 Si $u = u^- . u^+$ est un élément de Ω fixe par $i_w \circ \sigma^k$, pour un certain $w \in F_d$, $w \neq \epsilon$, et $k \in \mathbb{N}^*$, alors w est pur.

Preuve Si u est fixe par $i_w \circ \sigma^k$, alors $u^+ = w^{-1}\sigma^k(u^+)$ et $wu^+ = \sigma^k(u^+)$. u^+ étant un élément de Ω^+ , $\sigma^k(u^+)$ et la réduction de wu^+ le sont également. En considérant w réduit, il y a trois possibilités :

- w est pur positif,
- w est pur négatif (dans ce cas w^{-1} est un préfixe de u^+),
- $w = w_p w_n$ avec w_p pur positif et w_n pur négatif.

De même, $u^- = \sigma^k(u^-)w$ et la réduction u^-w^{-1} est un élément de Ω^- . On a à nouveau trois possibilités :

- w^{-1} est pur positif,
- w^{-1} est pur négatif (dans ce cas w est un suffixe de u^-),
- $w^{-1} = w_q^{-1}w_m^{-1}$ avec w_q^{-1} pur négatif et w_m^{-1} pur positif.

La dernière possibilité donne $w = w_m w_q$ avec w_m pur négatif et w_q pur positif, ce qui est en contradiction avec l'égalité $w = w_p w_n$, où w_p est pur positif et w_n est pur négatif. \square

On insiste sur une propriété apparue pendant la preuve. Si w est pur positif, alors la réduction v^- de u^-w^{-1} est un mot de Ω^- ; si w est pur négatif, alors la réduction v^+ de wu^+ est un mot de Ω^+ . On se place toujours dans le cas où $u = u^- . u^+$ est un mot de Ω fixe par $i_w \circ \sigma^k$, avec $w \in F_d$ et $w \neq \epsilon$.

Proposition 3.1.3 Soit $u = u^- . u^+$ un mot de Ω fixe par $i_w \circ \sigma^k$, avec $w \in F_d$ et $w \neq \epsilon$.

- (1) Si w est pur positif, alors u est fixe par $S^{|w|} \circ \sigma^k$; si w est pur négatif, alors u est fixe par $S^{-|w|} \circ \sigma^k$.
- (2) Réciproquement, si $\alpha \in \mathbb{N}^*$, et u est fixe par $S^\alpha \circ \sigma^k$, alors u est fixe par $i_w \circ \sigma^k$, avec w pur positif et $|w| = \alpha$; si $\alpha \in -\mathbb{N}^*$, et u est fixe par $S^\alpha \circ \sigma^k$, alors u est fixe par $i_w \circ \sigma^k$, avec w pur négatif et $|w| = -\alpha$.
- (3) De plus, si u est fixe par $S^{|w|} \circ \sigma^k$, alors w est un suffixe de u^- et un préfixe de $\sigma^k(u^+)$; si u est fixe par $S^{-|w|} \circ \sigma^k$, alors w^{-1} est un préfixe de u^+ et un suffixe de $\sigma^k(u^-)$.

Preuve (1) Si u est fixe par $i_w \circ \sigma^k$, avec $w \in F_d$, $w \neq \epsilon$ et w pur positif, alors $\sigma^k(u^- . u^+) = u^- w^{-1} . wu^+$; si v^- est la réduction de $u^- w^{-1}$, le mot $v^- . wu^+$ est un élément de Ω . On a ainsi $S^{|w|} \circ \sigma^k(u^- . u^+) = v^- . wu^+$ avec $v^- w = u^- w^{-1} w = u^-$.

Si u est fixe par $i_w \circ \sigma^k$, avec $w \in F_d$, $w \neq \epsilon$ et w pur négatif, alors $\sigma^k(u^- . u^+) = u^- w^{-1} . wu^+$; si v^+ est la réduction de wu^+ , le mot $u^- w^{-1} . v^+$ est un élément de Ω . On a ainsi $S^{-|w|} \circ \sigma^k(u^- . u^+) = u^- . w^{-1} v^+$ avec $w^{-1} v^+ = w^{-1} wu^+ = u^+$.

(2) Si $S^\alpha \circ \sigma^k(u) = u$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$, on note w le préfixe de $\sigma^k(u^+)$ de longueur α , et on a $w^{-1}\sigma^k(u^+) = u^+$ et $\sigma^k(u^-)w = u^-$.

Si $S^\alpha \circ \sigma^k(u) = u$ et $\alpha \in -\mathbb{N}^*$, on note w^{-1} le suffixe de $\sigma^k(u^-)$ de longueur $|\alpha|$, et on a $\sigma^k(u^-)w = u^-$ et $w^{-1}\sigma^k(u^+) = u^+$.

La propriété (3) est évidente. \square

La propriété suivante se vérifie facilement et est la base de l'étude qui va suivre.

Propriété 3.1.4 Soient u et v deux mots de Ω fixes par un automorphisme commun $i_w \circ \sigma^k$. Si w est pur positif, alors u et v ont un passé commun qui peut s'écrire

$$\dots \sigma^{mk}(w) \dots \sigma^{2k}(w) \sigma^k(w) w.$$

Si w est pur négatif, alors u et v ont un futur commun qui peut s'écrire

$$w^{-1} \sigma^k(w^{-1}) \dots \sigma^{mk}(w^{-1}) \dots$$

3.2 Propriétés de l'automate des préfixes-suffixes

L'automate des préfixes-suffixes va être notre principal outil de recherche de points fixes. On commence par montrer que toute substitution primitive inversible est non S -périodique ; on pourra ainsi appliquer le théorème 1.5.7 (page 39) et la propriété 1.5.8.

Proposition 3.2.1 *Si σ est une substitution primitive inversible, alors σ est non S -périodique.*

Preuve *Par l'absurde. σ est une substitution primitive inversible S -périodique sur un alphabet A , et on suppose que u^+ est un mot de Ω^+ fixe par σ (on pourra choisir une puissance de σ s'il n'y en a pas). u^+ est périodique de période p , avec $|p| > 0$; par primitivité, p contient toutes les lettres de A . u^+ est fixe par σ inversible et $u^+ = pu^+$; on en déduit que $\sigma^{-1}(pu^+) = \sigma^{-1}(p)u^+ = u^+$. Il existe donc un entier z de \mathbb{Z} tel que $\sigma^{-1}(p) = p^z$, ou encore $p = \sigma(p^z)$.*

Si $z < 0$, p^z est pur négatif et $\sigma(p^z)$ aussi (par définition des substitutions), tandis que p est pur positif.

Si $z = 0$, $\sigma(p^z) = \sigma(\epsilon) = \epsilon$, ce qui contredit $|p| > 0$.

Si $z > 0$, $|p^z| \geq |p|$. Par définition des substitutions, il existe $a \in A$ tel que $|\sigma(a)| > 1$. Puisque p contient toutes les lettres de A , on en déduit que $|\sigma(p^z)| > |p|$. \square

Corollaire 3.2.2 *Soit σ une substitution primitive inversible et u^+ un mot de Ω^+ . Si u^+ est fixe par les automorphismes $\sigma_1 = i_{w_1} \circ \sigma^{k_1}$ et $\sigma_2 = i_{w_2} \circ \sigma^{k_2}$, alors σ_1 et σ_2 sont des puissances d'un automorphisme $\sigma_0 = i_{w_0} \circ \sigma^{k_0}$ qui fixe u^+ . Notamment, si $k_1 = k_2$, alors $w_1 = w_2$.*

Preuve *Si u^+ est fixe par σ_1 et σ_2 , alors il existe w'_1 et w'_2 tels que $(w'_1)^{-1}\sigma^{k_1 k_2}(u^+) = (w'_2)^{-1}\sigma^{k_1 k_2}(u^+) = u^+$. La proposition précédente nous permet de conclure que $w'_1 = w'_2$. On suppose que k_0 est l'entier le plus petit tel que $\sigma_0 = i_{w_0} \circ \sigma^{k_0}$ fixe u^+ . Si $k_1 = mk_0 + h$ avec $0 < h < k_0, m \geq 0$, alors on a*

$$(w_1)^{-1}\sigma^h(\sigma^{mk_0}(u^+)) = w_h^{-1}\sigma^h(u^+) = u^+.$$

L'automorphisme $i_{w_h} \circ \sigma^h$ fixe u^+ est k_0 n'est plus un minimum. On en déduit que k_1 est un multiple de k_0 , et le même raisonnement peut se faire sur σ_2 . \square

On dispose donc d'une substitution primitive inversible et de son automate des préfixes-suffixes. On se reportera à la section 1.5 (page 37) pour les notations concernant l'automate et pour la définition de l'application Γ . On a vu que l'application S peut s'appliquer sur un développement en préfixes-suffixes si la suite des suffixes n'est pas constante égale à ϵ ; de même on peut appliquer S^{-1} si la suite des préfixes n'est pas constante égale à ϵ . Ce problème nous oblige à prendre certaines précautions. Comme précédemment, on note Ω_{per} l'ensemble des mots σ -périodiques de Ω .

Proposition 3.2.3 *Soit $u \in \Omega$ fixe par $i_w \circ \sigma^k$. Pour $w \neq \epsilon$, les implications*

- w pur positif $\Rightarrow u \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S^n(\Omega_{per})$,
- w pur négatif $\Rightarrow u \notin \bigcup_{n \in -\mathbb{N}^*} S^n(\Omega_{per})$

sont vérifiées.

Preuve *On montre la deuxième implication par contraposition ; le même raisonnement pourra être fait pour l'autre. Soit v un mot de Ω_{per} et v^+ sa projection sur Ω^+ ; on suppose que $v^+ = \sigma^h(v^+)$ et que $u^+ = pv^+$ avec p pur positif et $|p| > 0$. On a alors $\sigma^{kh}(u^+) = \sigma^{kh}(p)v^+$. σ étant une substitution primitive, l'inégalité $|\sigma^{kh}(p)| > |p|$ (on pourra éventuellement prendre un multiple de h) est vérifiée. u^+ est fixe par $i_{w_0} \circ \sigma^{kh}$ et on déduit de ce qui précède que w_0 est pur positif. Finalement, w est pur positif. \square*

Théorème 3.2.4 *Si u est un mot de Ω fixe par un automorphisme $i_w \circ \sigma^k$, alors le développement $\Gamma(u)$ est ultimement périodique de période $\leq k$.*

Preuve *On suppose que $\Gamma(u) = (p_i, a_i, s_i)_{i \geq 0}$ et on en déduit que*

$$\Gamma(\sigma^k(u)) = (\epsilon, a'_i, s'_i)_{i \leq k-1} (p_{i-k}, a_{i-k}, s_{i-k})_{i \geq k}.$$

On suppose w pur positif; u est fixe par $S^{|w|} \circ \sigma^k$ et $u \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S^n(\Omega_{per})$. On peut donc appliquer $S^{-|w|}$ à u ; seuls les i_0 (où i_0 est un entier que l'on pourra supposer $> k$) premiers termes du développement de u vont être modifiés par application de $S^{-|w|}$, et on a

$$\begin{aligned} \Gamma(S^{-|w|}(u)) &= (q_i, b_i, r_i)_{i \leq i_0-1} (p_i, a_i, s_i)_{i \geq i_0} \\ &= \Gamma(\sigma^k(u)) \\ &= (\epsilon, a'_i, s'_i)_{i \leq k-1} (p_{i-k}, a_{i-k}, s_{i-k})_{i \geq k}. \end{aligned}$$

Si w est pur négatif, alors u est fixe par $S^{-|w|} \circ \sigma^k$ et $u \notin \bigcup_{n \in -\mathbb{N}^} S^n(\Omega_{per})$, et le même raisonnement nous permet de conclure. \square*

On s'interroge maintenant sur la validité de la réciproque. Γ est l'application associée à la substitution σ qui engendre le système dynamique (Ω, S) . Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, σ^k engendre le même système dynamique, et on peut définir une application Γ_k ($k > 1$), qui à tout mot de Ω associe une suite de couleurs de l'automate des préfixes-suffixes associé à σ^k .

Propriété 3.2.5 *Si $\Gamma(u) = (p_i, a_i, s_i)_{i \geq 0}$, alors $\Gamma_k(u) = (q_j, b_j, r_j)_{j \geq 0}$ avec, pour tout $j \geq 0$,*

- $q_j = \sigma^{k-1}(p_{jk+(k-1)}) \dots \sigma(p_{jk+1})p_{jk}$,
- $b_j = a_{kj}$,
- $r_j = s_{jk}\sigma(s_{jk+1}) \dots \sigma^{k-1}(s_{jk+(k-1)})$.

Remarque 3.2.6 *Si $\Gamma(u)$ est un développement ultimement périodique de période $\leq k$, alors $\Gamma_k(u)$ est un développement ultimement constant.*

Par la suite, et notamment dans le théorème qui suit, on considérera plutôt des développements ultimement constants. On utilisera le symbole $*$ à la fin d'un développement en préfixes-suffixes pour signifier que le dernier terme est répété à l'infini. Une éventuelle récurrence permettra de vérifier la propriété suivante, qui nous sera bien utile.

Propriété 3.2.7 *Si $\Gamma(u) = (p_i, a_i, s_i)_{i \geq 0}$, alors*

- *pour tout n tel que $s_n \neq \epsilon$, le mot $v = a_0 s_0 \sigma(s_1) \dots \sigma^{n-1}(s_{n-1})$ est un préfixe de u^+ et vérifie $\Gamma(S^{|v|}(u)) = (\epsilon, b_i, r_i)_{0 \leq i < n} (q_n, b_n, r_n) (p_i, a_i, s_i)_{i > n}$ avec $q_n = p_n a_n$,*
- *pour tout n tel que $p_n \neq \epsilon$, le mot $v = \sigma^{n-1}(p_{n-1}) \dots \sigma(p_1) p_0$ est un suffixe de u^- et vérifie $\Gamma(S^{-(|v|+1)}(u)) = (q_i, b_i, \epsilon)_{0 \leq i < n} (q_n, b_n, r_n) (p_i, a_i, s_i)_{i > n}$ avec $q_n b_n = p_n$.*

On peut finalement énoncer le théorème réciproque au théorème 3.2.4.

Théorème 3.2.8 *σ est une substitution primitive inversible qui engendre (Ω, S) , Γ est la fonction préfixes-suffixes associée, et u est un élément de Ω vérifiant $\Gamma(u) = (p_i, a_i, s_i)_{0 \leq i < n} (p, a, s)^*$ avec $n > 0$ et $(p_{n-1}, a_{n-1}, s_{n-1}) \neq (p, a, s)$.*

Si $p = p_{n-1} a_{n-1} z$, avec z pur positif ou $z = \epsilon$, alors u est fixe par l'automorphisme $i_w \circ \sigma$ pour

$$w = \sigma(a_0) \sigma(s_0) \sigma^2(s_1) \dots \sigma^{n-1}(s_{n-2}) \sigma^n(z) \sigma^{n-1}(p_{n-1}) \dots \sigma(p_1) p_0.$$

Si $n = 1$, on a simplement $z = \sigma(a_0) \sigma(z) p_0$.

Si $p_{n-1} = paz$, avec z pur positif ou $z = \epsilon$, alors u est fixe par l'automorphisme $i_w \circ \sigma$ pour

$$w = [a_0 s_0 \sigma(s_1) \sigma^2(s_2) \dots \sigma^{n-1}(s_{n-1}) \sigma^n(z) \sigma^{n-1}(p_{n-2}) \dots \sigma^2(p_1) \sigma(p_0)]^{-1}.$$

Si $n = 1$, on a simplement $w = [a_0 s_0 \sigma(z) \sigma(p_0)]^{-1}$.

Enfin, si $\Gamma(u) = (p, a, s)^*$, alors u est fixe par $i_p \circ \sigma$.

Remarque 3.2.9 On rappelle que pour tout développement $(p_i, a_i, s_i)_{i \geq 0}$, et pour tout $i \geq 0$, on a l'égalité $\sigma(a_{i+1}) = p_i a_i s_i$. Dans le cas du développement de u , $\sigma(a) = pas = p_{n-1} a_{n-1} s_{n-1}$. De plus, par primitivité, $pas \neq a$. On en déduit que seuls les cas considérés dans l'énoncé du théorème sont possibles.

Preuve $u \in \Omega$, $u = u^- . u^+$ et $\Gamma(\sigma(u)) = (\epsilon, b_0, r_0)(p_i, a_i, s_i)_{0 \leq i < n}(p, a, s)^*$ avec $b_0 r_0 = \sigma(a_0)$.

Si $p = p_{n-1} a_{n-1} z$, avec z pur positif ou $z = \epsilon$, on cherche un préfixe w de $(\sigma(u))^+$ (cf. proposition 3.1.3 (3)) tel que $\Gamma(S^{|w|} \circ \sigma(u)) = \Gamma(u)$ (l'application de $S^{|w|}$ ne posera pas de problème d'après 3.2.3). On va décomposer w en trois. Le mot $w^{(0)} = \sigma(a_0) \sigma(s_0) \sigma^2(s_1) \dots \sigma^{n-1}(s_{n-2})$ est préfixe de $(\sigma(u))^+$ d'après le développement de $\sigma(u)$. De plus,

$$\Gamma(S^{|w^{(0)}|} \circ \sigma(u)) = (\epsilon, b'_i, r'_i)_{0 \leq i < n}(q_n, b_n, r_n)(p, a, s)^* \text{ avec } q_n = p_{n-1} a_{n-1}.$$

$w^{(1)} = \sigma^n(z)$ est préfixe de $(S^{|w^{(0)}|} \circ \sigma(u))^+$ et

$$\Gamma(S^{|w^{(0)} w^{(1)}|} \circ \sigma(u)) = (\epsilon, b''_i, r''_i)_{0 \leq i < n}(p, a, s)^*.$$

Il ne reste plus qu'à définir $w^{(2)} = \sigma^{n-1}(p_{n-1}) \dots \sigma(p_1) p_0$, qui est bien préfixe de $(S^{|w^{(0)} w^{(1)}|} \circ \sigma(u))^+$ (d'après la remarque 3.2.9). Le mot $w = w^{(0)} w^{(1)} w^{(2)}$ vérifie

$$\Gamma(S^{|w|} \circ \sigma(u)) = \Gamma(u).$$

Si $p_{n-1} = paz$, avec z pur positif ou $z = \epsilon$, on va chercher un mot w , tel que w^{-1} est un préfixe de u^+ (cf. proposition 3.1.3 (3)) et $\Gamma(\sigma(u)) = \Gamma(S^{|w|}(u))$ (possible par 3.2.3). On va encore décomposer w en trois pour voir plus clairement ce qu'il se passe au niveau des développements en préfixes-suffixes. Le développement de u donne immédiatement $w^{(0)} = a_0 s_0 \sigma(s_1) \dots \sigma^{n-1}(s_{n-1})$ comme préfixe de u^+ . De plus,

$$\Gamma(S^{|w^{(0)}|}(u)) = (\epsilon, b'_i, r'_i)_{0 \leq i < n}(q_n, b_n, r_n)(p, a, s)^* \text{ avec } q_n = pa.$$

$w^{(1)} = \sigma^n(z)$ est préfixe de $(S^{|w^{(0)}|}(u))^+$ et

$$\Gamma(S^{|w^{(0)} w^{(1)}|}(u)) = (\epsilon, b''_i, r''_i)_{0 \leq i < n}(p_{n-1}, a_{n-1}, s_{n-1})(p, a, s)^*.$$

Il ne reste plus qu'à définir $w^{(2)} = \sigma^{n-1}(p_{n-2}) \dots \sigma^2(p_1) \sigma(p_0)$, qui est bien préfixe de $(S^{|w^{(0)} w^{(1)}|}(u))^+$ (d'après la remarque 3.2.9). Le mot $w^{-1} = w^{(0)} w^{(1)} w^{(2)}$ vérifie

$$\Gamma(S^{|w|}(u)) = \Gamma(\sigma(u)).$$

Enfin, si $\Gamma(u) = (p, a, s)^*$, alors $\Gamma(\sigma(u)) = (\epsilon, b, r)(p, a, s)^*$ avec $\sigma(a) = pas = br$ et $\Gamma(S^{|p|} \circ \sigma(u)) = (p, a, s)^*$. \square

L'expression de w donnée par ce théorème pourra être pratique lorsqu'on étudie des exemples.

3.3 Reconnaissance de points fixes

σ est toujours une substitution primitive inversible qui engendre (Ω, S) . On choisira σ (quitte à prendre une puissance) de manière à ce que u et v soient deux mots de Ω dont le développement en préfixes-suffixes est ultimement constant et tel que u est fixe par $i_{w_1} \circ \sigma$ et v est fixe par $i_{w_2} \circ \sigma$. Les mots u et v forment alors un point fixe (c'est-à-dire qu'ils correspondent sur leurs passés ou sur leurs futurs) si et seulement si $w_1 = w_2$. Les expressions données par le théorème 3.2.8 sont utiles dans certains cas, mais comparer deux expressions différentes devient rapidement

compliqué. Dans cette section, on donne des expressions bien plus exploitables de w_1 et w_2 , et on en déduit une méthode de recherche de points fixes.

La proposition qui suit a un double intérêt. Le premier est de caractériser deux mots de Ω qui sont sur la même orbite ; le second est d'introduire les développements constants (pas seulement ultimement constant) qui seront essentiels par la suite.

Proposition 3.3.1 *Si $\Gamma(u) = (p_i, a_i, s_i)_{0 \leq i < n}(p, a, s)^*$ ($n > 0$), alors il existe un unique $j \in \mathbb{Z}$ tel que $\Gamma(S^j(u)) = (p, a, s)^*$.*

Preuve On note $\Gamma(u) = (p_i^{(n)}, a_i^{(n)}, s_i^{(n)})_{0 \leq i < n}(p, a, s)^*$ et $j_n = 0$. Par récurrence descendante, pour tout $1 \leq k \leq n$, si $\Gamma(S^{j_k}(u)) = (p_i^{(k)}, a_i^{(k)}, s_i^{(k)})_{0 \leq i < k}(p, a, s)^*$, la propriété 3.2.7 nous permet d'obtenir un entier j_{k-1} vérifiant $\Gamma(S^{j_{k-1}}(u)) = (p_i^{(k-1)}, a_i^{(k-1)}, s_i^{(k-1)})_{0 \leq i < k-1}(p, a, s)^*$ (si $k > 1$) et un entier $j_0 = j$ tel que $\Gamma(S^j(u)) = (p, a, s)^*$ (si $k = 1$). L'unicité est immédiate d'après la non S -périodicité de σ , et donc de u . \square

Corollaire 3.3.2 *Si $\Gamma(u) = (p_i, a_i, s_i)_{0 \leq i < n}(p, a, s)^*$ et $\Gamma(v) = (q_i, b_i, r_i)_{0 \leq i < m}(q, b, r)^*$, alors il existe un unique j entier tel que $\Gamma(S^j(u)) = \Gamma(v)$.*

De plus, si $\Gamma(u) = (p_i, a_i, s_i)_{0 \leq i < n}(p, a, s)^$ et $\Gamma(v) = (q_i, b_i, r_i)_{0 \leq i < m}(q, b, r)^*$, avec $(p, a, s) \neq (q, b, r)$, alors u et v ne peuvent être sur la même orbite que si (et ce n'est pas suffisant) $p = r = \epsilon$ ou $s = q = \epsilon$.*

Pour tout élément u de Ω dont le développement en préfixes-suffixes est ultimement constant, on va maintenant donner une nouvelle caractérisation du mot w pour lequel $i_w \circ \sigma(u) = u$.

Définition 3.3.3 *Soient γ_- et γ_+ les applications de F_d dans F_d définies, pour tout mot (réduit) $v = v_0 v_1 \dots v_{p-1} v_p$, par*

- $\gamma_-(v) = \sigma(v_p) v_0 v_1 \dots v_{p-1}$,
- $\gamma_+(v) = v_1 \dots v_{p-1} v_p \sigma(v_0)$.

Théorème 3.3.4 *On suppose que $\Gamma(u) = (p_i, a_i, s_i)_{0 \leq i < n}(p, a, s)^*$.*

- (1) *Si $p = p_{n-1} a_{n-1} z$, pour un certain z pur positif ou égal à ϵ , alors $w = \gamma_-^j(p)$ où j est l'unique entier décrit dans la proposition 3.3.1.*
- (2) *Si $p_{n-1} = paz$, pour un certain z pur positif ou égal à ϵ , alors $w^{-1} = \gamma_+^{j-1}(s)$ où j est l'unique entier décrit dans la proposition 3.3.1.*

Preuve (1) *Puisque $p = p_{n-1} a_{n-1} z$, alors w est pur positif d'après 3.2.8 et on a forcément $p \neq \epsilon$. On suppose que $\Gamma(S^j(u)) = (p, a, s)^*$. Le passé de $S^j(u)$ peut s'écrire*

$$\dots \sigma^m(p) \dots \sigma^2(p) \sigma(p) p,$$

et on en déduit l'existence d'un entier k et de deux mots q, r (purs positifs ou ϵ) tels que $\sigma^k(p) = qr$ et $|r \sigma^{k-1}(p) \dots \sigma(p) p| = j$. Le mot $r \sigma^{k-1}(p) \dots \sigma(p) p$ est un préfixe de u^+ . On déduit du fait $S^j(u)$ est fixe par $S^{|p|} \circ \sigma$ que l'entier $j' = |\sigma(r) \sigma^k(p) \dots \sigma(p) p|$ vérifie l'égalité $S^j(u) = S^{j'}(\sigma(u))$, et que le mot $\sigma(r) \sigma^k(p) \dots \sigma(p) p$ est un préfixe de $(\sigma(u))^+$. On en conclut que si $i_w \circ \sigma$ fixe u , alors $w = \sigma(r) q$.

Pour tout $0 \leq i \leq k-1$, l'égalité $\gamma_-^{|\sigma^i(p)|}(\sigma^i(p)) = \sigma^{i+1}(p)$ est vérifiée et on en déduit que $\gamma_-^{|\sigma^{k-1}(p) \dots \sigma(p) p|}(p) = \sigma^k(p) = qr$. Finalement,

$$\gamma_-^{|\sigma^{k-1}(p) \dots \sigma(p) p|}(p) = \gamma_-^j(p) = \sigma(r) q = w.$$

(2) Puisque $p_{n-1} = paz$, alors w est pur négatif d'après 3.2.8 et on a forcément $s \neq \epsilon$. On suppose maintenant que $\Gamma(S^{-j}(u)) = (p, a, s)^*$, avec $j \in \mathbb{N}^*$. Le futur de $S^{-j}(u)$ peut s'écrire

$$as\sigma(s)\sigma^2(s)\dots\sigma^m(s)\dots$$

On choisit q et r tels que $\sigma^k(s) = qr$ et $j = |as\sigma(s)\dots\sigma^{k-1}(s)q|$; le mot $as\sigma(s)\dots\sigma^{k-1}(s)q$ est un suffixe de u^- . $S^{-j}(u)$ est fixe par $S^{|p|} \circ \sigma$ et on en déduit que le mot (ou plutôt sa réduction) $p^{-1}\sigma(a)\sigma(s)\sigma^2(s)\dots\sigma^k(s)\sigma(q)$ est un suffixe de $(\sigma(u))^-$. Or, $\sigma(a) = pas$; on en déduit que l'entier $j' = |as\sigma(s)\sigma^2(s)\dots\sigma^k(s)\sigma(q)|$ vérifie $S^{-j}(u) = S^{-j'}(\sigma(u))$, et on a en plus $w^{-1} = r\sigma(q)$. Finalement,

$$\gamma_+^{|s\sigma(s)\dots\sigma^{k-1}(s)q|}(s) = \gamma_+^{j-1}(s) = r\sigma(q) = w^{-1}.$$

□

On peut maintenant énoncer le théorème principal, qui donne un moyen simple de reconnaître un point fixe à partir de développements en préfixes-suffixes constants. Ce théorème découle directement du théorème précédent et de la propriété 3.1.4.

Théorème 3.3.5 *Soit σ une substitution primitive inversible et (Ω, S) le système dynamique symbolique engendré. On suppose que u et v sont deux éléments de Ω dont les développements en préfixes-suffixes sont respectivement $\Gamma(u) = (p, a, s)^*$ et $\Gamma(v) = (q, b, r)^*$. La définition 3.3.3 explicite les applications γ_- et γ_+ .*

- *S'il existe $h, k > 0$ tels que $\gamma_-^h(p) = \gamma_-^k(q) = w$, alors le couple $(S^{-h}(u), S^{-k}(v))$ forme un point fixe par $i_w \circ \sigma$; les deux mots ont un passé commun.*
- *S'il existe $h, k > 0$ tels que $\gamma_+^h(s) = \gamma_+^k(r) = w^{-1}$, alors le couple $(S^{h+1}(u), S^{k+1}(v))$ forme un point fixe par $i_w \circ \sigma$; les deux mots ont un futur commun.*

Réciproquement si le couple (u', v') forme un point fixe par $i_w \circ \sigma$ dont les mots ont un passé (resp. futur) commun, alors leurs développements sont ultimement constants de termes (p, a, s) et (q, b, r) avec $\gamma_-^h(p) = \gamma_-^k(q) = w$ (resp. $\gamma_+^h(s) = \gamma_+^k(r) = w^{-1}$) pour un certain couple h, k .

Discussion sur un algorithme de recherche de points fixes

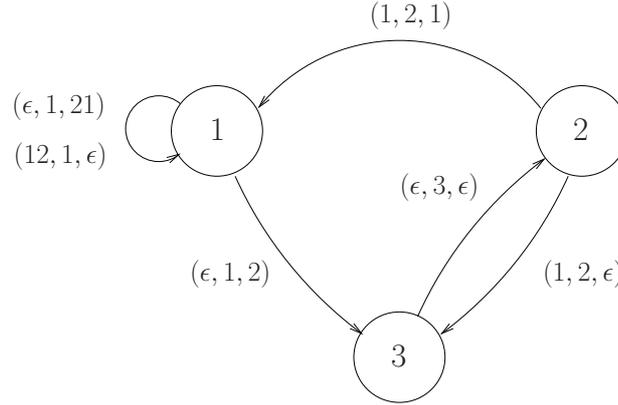
Le théorème 3.3.5 nous permet de présenter un algorithme qui trouve les points fixes d'une substitution primitive inversible σ ; il suffit d'évaluer les boucles dans les automates des préfixes-suffixes associés aux puissances de σ , puis d'appliquer γ_- (resp. γ_+) aux préfixes (resp. suffixes) de ces boucles. On obtiendra ainsi des points fixes par des automorphismes de la forme $i_w \circ \sigma^k$ (représentant le même automorphisme extérieur que σ), où w est un mot pur de F_d et $k \in \mathbb{N}^*$. S'assurer que l'algorithme résout le problème en un temps fini revient à borner k et $|w|$. Des résultats de [13] (par exemple) vont nous permettre de borner k en fonction de la taille de l'alphabet et on se contentera de conjecturer l'existence d'une borne pour $|w|$.

Conjecture 3.3.6 *Soit $A = \{1, 2, \dots, d\}$ un alphabet et V un vecteur à d coordonnées strictement positives. Il existe un entier N_V tel que si σ une substitution primitive inversible sur l'alphabet A vérifiant, pour tout $1 \leq i \leq d$, $|\sigma(i)| = V(i)$, et si $(u^{(1)}, \dots, u^{(p)})$ est un point fixe par un certain automorphisme $i_w \circ \sigma$ (w étant un mot pur de $F_d = F(A)$), alors $|w| < N_V$.*

3.4 Un exemple

On considère la substitution primitive inversible sur $A = \{1, 2, 3\}$ définie par

$$\begin{array}{rcl} \sigma & : & 1 \mapsto 121 \\ & & 2 \mapsto 3 \\ & & 3 \mapsto 12 \end{array}$$

FIG. 3.1: Automate des préfixes-suffixes associé à σ .

L'automate des préfixes-suffixes associé à σ est donné sur la figure 3.1. La fonction Γ associée à tout mot de Ω un développement en préfixes-suffixes par rapport à σ , et pour tout k entier > 1 on notera Γ_k celle qui donne le développement par rapport à σ^k .

On note $\omega_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma^n(1.1)$, $\omega_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma^{2n}(2.1)$ et $\omega_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma^{2n}(3.1)$. Le triplet $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ forme un point fixe pour l'automorphisme σ^2 et on a

$$\begin{aligned} \Gamma(\omega_1) = \Gamma(\omega_2) = \Gamma(\omega_3) &= (\epsilon, 1, 21)* & \text{et} & & \Gamma_2(\omega_1) = \Gamma_2(\omega_2) = \Gamma_2(\omega_3) &= (\epsilon, 1, 213121)* \\ \Gamma(S^{-1}(\omega_1)) &= (12, 1, \epsilon)* & \text{et} & & \Gamma_2(S^{-1}(\omega_1)) &= (121312, 1, \epsilon)* \\ \Gamma(S^{-1}(\omega_2)) &= [(1, 2, \epsilon)(\epsilon, 3, \epsilon)]* & \text{et} & & \Gamma_2(S^{-1}(\omega_2)) &= (1, 2, \epsilon)* \\ \Gamma(S^{-1}(\omega_3)) &= [(\epsilon, 3, \epsilon)(1, 2, \epsilon)]* & \text{et} & & \Gamma_2(S^{-1}(\omega_3)) &= (121, 3, \epsilon)* \end{aligned}$$

Il y a 4 chemins de longueur 2 dans l'automate (en imposant que les couleurs des 2 arêtes constituant le chemin soient distinctes), ce qui donne 4 développements constants dans l'automate associé à σ^2 . La suite des préfixes n'est ultimement constante à ϵ pour aucun de ces 4 développements ; on en déduit qu'ils ont un unique antécédent dans Ω et on note $\omega_{1,2}, \omega_{2,2}, \omega_{3,2}, \omega_{4,2}$ les mots de Ω vérifiant

- $\Gamma_2(\omega_{1,2}) = (1213, 1, 21)*$
- $\Gamma_2(\omega_{2,2}) = (12, 1, 3121)*$
- $\Gamma_2(\omega_{3,2}) = (1, 2, \epsilon)*$
- $\Gamma_2(\omega_{4,2}) = (121, 3, \epsilon)*$.

On définit l'application $\gamma_-^{(2)}$ (associée à σ^2) ; pour tout mot $v = v_0 \dots v_p$, $\gamma_-^{(2)}(v) = \sigma^2(v_p)v_1 \dots v_{p-1}$.

On remarque alors que

- $\gamma_-^{(2)}(1213) = \gamma_-^{(2)}(1)$,
- $\gamma_-^{(2)}(12) = 121$,

et on en déduit que les couples $(S^{-1}(\omega_{1,2}), (S^{-1}(\omega_{3,2}))$ et $(S^{-1}(\omega_{2,2}), (\omega_{4,2}))$ forment des points fixes pour les automorphismes $i_{1213121} \circ \sigma^2$ et $i_{121} \circ \sigma^2$ respectivement. On note que la borne des points fixes est atteinte. Un fait amusant est que les trois automorphismes $i_{1213121} \circ \sigma^2$, $i_{121} \circ \sigma^2$ et σ^2 sont similaires (voir définition 3.0.6 page 49 et remarque 3.0.11 page 50).

Chapitre 4

Arbres simpliciaux

4.1 Définitions générales

Un **graphe orienté** Γ se compose d'un ensemble V de sommets et d'un ensemble E d'arêtes, E étant une partie de $V \times V$. Si (x, y) est un élément de E , x s'appelle l'**origine** et y s'appelle le **sommet terminal** de l'arête (x, y) .

- Une **chaîne** de Γ est une liste $p = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ de sommets de V telle que $\forall 1 \leq i \leq k - 1, ((x_i, x_{i+1}) \in E \text{ ou } (x_{i+1}, x_i) \in E)$.
- On appelle **cycle** une chaîne $p = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ telle que $x_1 = x_k$.
- On dit qu'un graphe orienté est **connexe** si et seulement si il existe une chaîne entre chaque paire de sommets.

Un **arbre (orienté)** est un **graphe (orienté) connexe sans cycles**.

Définitions 4.1.1 Une arête (x, y) est dite **arête sortante** de x et **arête entrante** de y . On appelle **degré entrant** (resp. **sortant**) d'un sommet x dans un graphe orienté G , le nombre d'arêtes entrantes (resp. sortantes) de x . Le **degré** $\text{deg}(x)$ est la somme des degrés entrant et sortant. Pour tout arbre X , on note deg_X la fonction qui à tout sommet de X associe son degré.

Distance dans un arbre

Dans un arbre X , il existe une unique chaîne de longueur minimale reliant deux sommets quelconques x et x' ; si $p = (x = x_0, x_1, \dots, x_k = x')$ est cette chaîne, alors les x_i sont deux à deux distincts. La distance entre x et x' , notée $|x, x'|_X$ est alors égale à k .

4.1.1 Notations

Sauf mention contraire, lorsqu'on parlera d'un alphabet quelconque A , celui-ci sera de cardinal fini; A^* est le monoïde libre associé. Si $A = \{a_0, \dots, a_d\}$, on note $\bar{A} = \{\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_d\}$.

Etant donné un ensemble \mathcal{V} infini dénombrable quelconque, un **graphe étiqueté (coloré) par A à sommets dans \mathcal{V}** est un couple (V, E) tel que V est une partie de \mathcal{V} , et E est une partie de $V \times V \times A$.

On appelle $\mathcal{S}_0(A)$ l'ensemble des arbres finis (au sens du nombre d'arêtes), orientés, enracinés, étiquetés par A et à sommets dans \mathcal{V} . $\mathcal{S}_E(A)$ représentera l'ensemble des arbres de $\mathcal{S}_0(A)$ ne possédant qu'une seule arête. La racine d'un arbre joue le même rôle que le pointage sur les mots bi-infinis (cf. section 1.3) mais n'a aucune influence sur l'orientation des arêtes de l'arbre.

Dans la suite, pour tout élément X de $\mathcal{S}_0(A)$, l'ensemble des sommets de X sera noté V_X et l'ensemble des arêtes étiquetées de X sera noté E_X . La racine ne sera précisée que si cela est nécessaire.

Chaînes dans les éléments de $\mathcal{S}_0(A)$

A tout élément X de $\mathcal{S}_0(A)$, on associe une fonction

$$\gamma_X : V_X \times V_X \rightarrow (A \cup \overline{A})^*$$

où $(A \cup \overline{A})^*$ est le monoïde libre engendré par $A \cup \overline{A}$. Si (x, x', a) est une arête de X , alors $\gamma_X(x, x') = a$ et $\gamma_X(x', x) = \overline{a}$. Si (x, x') est une paire de sommets quelconques de X et $(x, x_1, x_2, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k = x')$ est la liste des sommets formant la chaîne la plus courte de x à x' , alors on définit $\gamma_X(x, x') = \gamma_X(x, x_1)\gamma_X(x_1, x_2) \dots \gamma_X(x_{k-2}, x_{k-1})\gamma_X(x_{k-1}, x')$.

On peut définir la distance sur un élément X de $\mathcal{S}_0(A)$ comme la longueur du mot donné par la fonction γ_X . Ainsi, si x et x' sont des éléments de X , on note $|x, x'|_X$ la distance qui les sépare et on a : $|x, x'|_X = |\gamma_X(x, x')|$.

Inclusion sur $\mathcal{S}_0(A)$

Soient X et Y deux éléments de $\mathcal{S}_0(A)$. On dit que $X \subseteq_{\mathcal{S}_0(A)} Y$ si et seulement si il existe une application f injective de V_X dans V_Y telle que pour tout couple (x, x') de sommets de X , $\gamma_X(x, x') = \gamma_Y(f(x), f(x'))$. Une telle fonction sera appelé **fonction d'inclusion**. Dans certains cas, la fonction d'inclusion pourra associer la racine de Y à la racine de X . Si une telle fonction d'inclusion existe, on notera $X \subseteq_{\mathcal{S}_0(A)} Y$.

Remarque 4.1.2 Une fonction d'inclusion conserve les distances.

Deux éléments X et Y de $\mathcal{S}_0(A)$ sont égaux, et on note alors $X =_{\mathcal{S}_0(A)} Y$ lorsque $X \subseteq_{\mathcal{S}_0(A)} Y$ et $Y \subseteq_{\mathcal{S}_0(A)} X$, ou encore s'il existe une fonction f bijective de V_X dans V_Y telle que f est une fonction d'inclusion de V_X dans V_Y , f^{-1} est une fonction d'inclusion de V_Y dans V_X et f associe la racine de Y à la racine de X . f sera alors appelée **fonction d'égalité**. C'est cette définition d'égalité que nous utiliserons.

4.1.2 Propriétés de $\mathcal{S}_0(A)$

Distance sur $\mathcal{S}_0(A)$

Définition 4.1.3 On appelle **boule** de centre c et de taille n sur un arbre X de $\mathcal{S}_0(A)$, et on note $B_{c,n}(X)$, le sous-arbre de X enraciné en c , et dont tous les sommets sont à une distance inférieure ou égale à n de c . Si X est un arbre de $\mathcal{S}_0(A)$ enraciné en x , on notera plus simplement $B_n(X)$ la boule incluse dans X de taille n et de racine x .

Définition 4.1.4 On note d l'application de $\mathcal{S}_0(A) \times \mathcal{S}_0(A)$ dans \mathbb{R} telle que pour tout $X \in \mathcal{S}_0(A)$, $d(X, X) = 0$ et pour tout $X, Y \in \mathcal{S}_0(A)$, $X \not\subseteq_{\mathcal{S}_0(A)} Y$,

$$d(X, Y) = 2^{-\min\{k \in \mathbb{N}^*; B_k(X) \not\subseteq_{\mathcal{S}_0(A)} B_k(Y)\}}.$$

Proposition 4.1.5 d définit une distance sur $\mathcal{S}_0(A)$.

Preuve Les propriétés de symétrie et de séparation sont évidentes. On s'intéresse donc à l'inégalité triangulaire. Soient X et Z deux éléments de $\mathcal{S}_0(A)$ et $d(X, Z) = 2^{-k}$. Soit Y un élément quelconque de $\mathcal{S}_0(A)$ tel que $d(X, Y) = 2^{-i}$ et $d(Y, Z) = 2^{-j}$. On suppose que $k < i$ et $k < j$. Par $d(X, Y) = 2^{-i}$, on a $B_k(X) =_{\mathcal{S}_0(A)} B_k(Y)$ et par $d(Y, Z) = 2^{-j}$, on a $B_k(Y) =_{\mathcal{S}_0(A)} B_k(Z)$; on obtient ainsi $d(X, Z) \leq 2^{-(k+1)}$, ce qui contredit l'hypothèse. On en déduit donc que $k \geq i$ ou $k \geq j$, ce qui implique :

$$2^k(2^i + 2^j) \geq 2^{i+j} \Rightarrow 2^{-j} + 2^{-i} \geq 2^{-k}.$$

On en conclut que l'inégalité triangulaire est vérifiée, et que d est une distance sur $\mathcal{S}_0(A)$. \square

Définition 4.1.6 On note $\mathcal{S}(A)$ le complété métrique de $\mathcal{S}_0(A)$.

Remarque 4.1.7 Toutes les définitions données sur $\mathcal{S}_0(A)$ s'adaptent naturellement sur $\mathcal{S}(A)$. On reprendra les mêmes notations en enlevant l'indice 0 pour travailler dans $\mathcal{S}(A)$; on notera notamment $=_{\mathcal{S}(A)}$.

4.1.3 Récurrence

Définition 4.1.8 On dit qu'un arbre X de $\mathcal{S}(A)$ est **récurrent** si pour tout sommet x de X et tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une infinité de fonctions d'inclusion (deux à deux distinctes) de $V_{B_{x,n}(X)}$ dans V_X .

On dit qu'il est **uniformément récurrent** si pour toute boule $B_{x,n}(X)$ ($x \in V_X, n \in \mathbb{N}^*$) de X , il existe un entier m tel que pour tout sommet y de X , il existe une fonction d'inclusion f telle que $f(V_{B_{x,n}(X)}) \subset V_{B_{y,m}(X)}$.

4.2 Substitutions

Définition 4.2.1 Une **substitution d'arbre** est une application τ de $\mathcal{S}_E(A)$ dans $\mathcal{S}_0(A)$ vérifiant les propriétés suivantes.

- Si $X = (\{x_1, x_2\}, \{(x_1, x_2, a)\})$ est un élément de $\mathcal{S}_E(A)$ enraciné en x_1 , d'image $\tau(X)$, alors $x_1, x_2 \in V_{\tau(X)}$, et $\tau(X)$ est enraciné en x_1 .
- Pour tout a de A , si $X = (\{x_1, x_2\}, \{(x_1, x_2, a)\})$ et $Y = (\{y_1, y_2\}, \{(y_1, y_2, a)\})$ sont deux éléments de $\mathcal{S}_E(A)$, alors il existe une bijection f de $V_{\tau(X)}$ dans $V_{\tau(Y)}$ vérifiant
 - $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$,
 - pour tout couple (x, x') de $V_{\tau(X)}$, $\gamma_{\tau(X)}(x, x') = \gamma_{\tau(Y)}(f(x), f(x'))$.
- Soient X et Y deux éléments quelconques distincts de $\mathcal{S}_E(A)$, $\tau(X)$ et $\tau(Y)$ étant leurs images respectives par l'application τ . Alors $(V_{\tau(X)} \setminus V_X) \cap V_{\tau(Y)} = \emptyset$ et $(V_{\tau(Y)} \setminus V_Y) \cap V_{\tau(X)} = \emptyset$.
- Pour toute liste $(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k = a_1)$ ($k \leq \#A + 1$) d'éléments de A telle que pour tout $1 \leq j \leq k - 1$, (x_1, x_2, a_{j+1}) ou (exclusif) (x_2, x_1, a_{j+1}) est une arête de $\tau(X_{a_j})$ (où $X_{a_j} = (\{x_1, x_2\}, \{(x_1, x_2, a_j)\})$), les degrés de x_1 et x_2 dans $\tau(X_{a_j})$ sont égaux à 1.

On étend maintenant la définition de substitution : la nouvelle application, également notée τ , est une application de $\mathcal{S}(A)$ dans $\mathcal{S}(A)$. Soit X un élément de $\mathcal{S}(A)$ enraciné en x . On note t l'application qui à tout élément (x_1, x_2, a) de E_X associe l'élément $(\{x_1, x_2\}, \{(x_1, x_2, a)\})$ de $\mathcal{S}_E(A)$ (de racine x_1). L'image de X par τ est alors :

$$\tau(X) = \left(\bigcup_{p \in E_X} V_{\tau(t(p))}, \bigcup_{p \in E_X} E_{\tau(t(p))} \right),$$

et $\tau(X)$ est enraciné en x . Un exemple est donné figure 4.1.

Proposition 4.2.2 Toute substitution d'arbre τ est uniformément continue sur $\mathcal{S}(A)$.

Preuve Soit $n \in \mathbb{N}$, et X et Y deux éléments de $\mathcal{S}(A)$ tels que $B_{n-1}(X) =_{\mathcal{S}(A)} B_{n-1}(Y)$. Alors $d(X, Y) \leq 2^{-n}$. Par ailleurs :

$$\begin{aligned} & B_{n-1}(X) &=_{\mathcal{S}(A)} & B_{n-1}(Y) \\ \Rightarrow & \tau(B_{n-1}(X)) &=_{\mathcal{S}(A)} & \tau(B_{n-1}(Y)) \\ \Rightarrow & B_{n-1}(\tau(B_{n-1}(X))) &=_{\mathcal{S}(A)} & B_{n-1}(\tau(B_{n-1}(Y))) \\ \Rightarrow & B_{n-1}(\tau(X)) &=_{\mathcal{S}(A)} & B_{n-1}(\tau(Y)) \end{aligned}$$

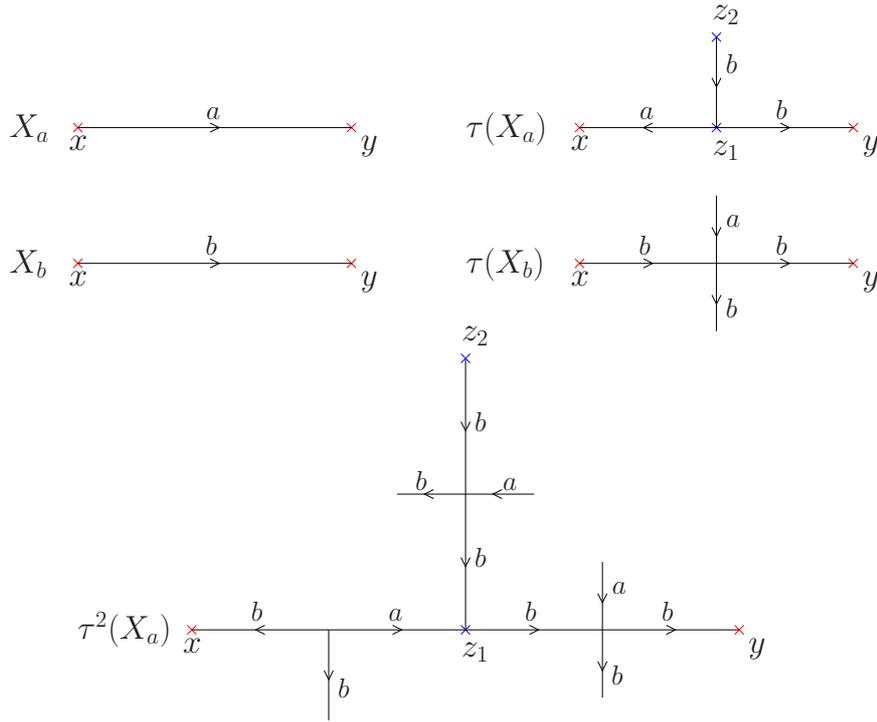


FIG. 4.1: Un exemple de substitution d'arbre.

Ainsi, pour tout X, Y de $\mathcal{S}(A)$, $d(X, Y) \leq 2^{-n} \Rightarrow d(\tau(X), \tau(Y)) \leq 2^{-n}$. Par suite, pour tout $\epsilon > 0$, si $\alpha = \min_{\beta \in \mathbb{N}} \{\beta; 2^{-\beta} < \epsilon\}$ alors pour tout X, Y de $\mathcal{S}(A)$ tels que $d(X, Y) \leq 2^{-\alpha}$, $d(\tau(X), \tau(Y)) \leq 2^{-\alpha} < \epsilon$. τ est donc uniformément continue sur $\mathcal{S}(A)$. \square

4.2.1 Point fixe de substitution

Définitions 4.2.3 On dit qu'un arbre X est **point fixe d'une substitution** τ si $\tau(X) =_{\mathcal{S}(A)} X$. Un arbre X est un **point périodique** pour la substitution τ s'il existe un entier k tel que $\tau^k(X) =_{\mathcal{S}(A)} X$.

Remarque 4.2.4 Si X est un point fixe de substitution de racine x , il vient que x doit être de degré constant. On en déduit que pour tout $a \in A$ tel qu'il existe $y \in V_X$ pour lequel (x, y, a) (resp. (y, x, a)) est dans E_X , x est de degré 1 dans $\tau(\{x, y\}, \{(x, y, a)\})$ (resp. $\tau(\{y, x\}, \{(y, x, a)\})$).

Nous voulons construire facilement des points fixes pour une substitution τ donnée. Nous nous intéressons plus particulièrement aux points fixes de diamètre infini, ce qui motive le lemme suivant.

Lemme 4.2.5 Soit X_0 un élément de $\mathcal{S}(A)$ de racine x_0 , tel que $X_0 = B_1(X_0)$ et $X_0 =_{\mathcal{S}(A)} B_1(\tau(X_0))$. L'ensemble des sommets de X_0 est $V_{X_0} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, x_1, \dots, x_n étant des points à distance 1 de x_0 . L'implication suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} & (\exists m \in \mathbb{N}; \forall 1 \leq i \leq n, |x_0, x_i|_{\tau^m(X_0)} > 1) \\ \Rightarrow & (\forall y \in (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_{\tau^n(X_0)}), y \neq x_0, \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_0, y|_{\tau^n(X_0)} = +\infty) \end{aligned}$$

Preuve On note $x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}$ les points de $\tau^m(X_0)$ à distance 1 de x_0 . On choisit ces points de manière que $x_i^{(m)}$ soit un des points du chemin entre x_0 et x_i . La distance de ces points à la

racine sera alors strictement plus grande que 1 dans l'arbre $\tau^{2m}(X_0)$. On conclut en itérant ce raisonnement que les distances de x_0 à x_i dans les arbres $\tau^{t \times m}(X_0)$ croissent strictement avec t ,

$$\forall 1 \leq i \leq n \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_0, x_i|_{\tau^n(X_0)} = +\infty$$

Le même raisonnement peut être effectué pour tout point à distance 1 de la racine dans $\tau^k(X_0)$, k quelconque. Si y est un point de $\tau^k(X_0)$, on connaît un point du chemin entre x_0 et y dont la distance à x_0 tend vers l'infini avec les itérations de τ . Il en est donc de même pour y . \square

Définitions 4.2.6 Si un arbre X_0 et une substitution τ vérifient les hypothèses du lemme 4.2.5, on dira que le couple (X_0, τ) vérifie la **condition de croissance**.

Si pour tout élément X_0 de $\mathcal{S}_E(A)$, la condition

$$\forall y \in \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_{\tau^n(X_0)} \right), y \neq x_0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_0, y|_{\tau^n(X_0)} = +\infty$$

est vérifiée, on dira que τ vérifie la **condition de croissance**.

Nous avons des conditions simplement vérifiables sur la substitution τ permettant d'obtenir des arbres infinis (au sens du diamètre). Sous ces conditions, la proposition suivante nous permet de conclure sur la construction d'arbres infinis, points fixes de τ .

Proposition 4.2.7 Soit (X_0, τ) un couple qui vérifie la condition de croissance, avec $X_0 \in \mathcal{S}(A)$ un arbre de racine x_0 . Alors $X = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau^n(X_0)$ est un point fixe pour la substitution τ .

Preuve On va montrer par récurrence sur p , que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un rang k_p tel que, pour tout $k \geq k_p$, $B_p(\tau^k(X_0)) =_{\mathcal{S}(A)} B_p(\tau^{k_p}(X_0))$.

La propriété est vraie pour $p = 1$ par hypothèse (le couple (X_0, τ) vérifie la condition de croissance). On la suppose vraie au rang p .

Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on note I_q le sous-graphe minimal (pour l'inclusion) tel que $\tau^{k_p+q}(X_0) = \tau^{k_p}(X_0) \cup I_q$. Les sommets de I_q sont à distance au moins p de la racine (dans $\tau^{k_p+q}(X_0)$) par l'hypothèse de récurrence. Par la condition de croissance, il existe un entier m tel que les sommets de I_q sont à une distance $\geq p+1$ de la racine dans l'arbre $\tau^{k_p+m+q}(X_0)$. On en déduit que pour tout $q \in \mathbb{N}$, l'égalité

$$B_{p+1}(\tau^{k_p+m+q}(X_0)) =_{\mathcal{S}(A)} B_{p+1}(\tau^{k_p+m}(X_0))$$

est vérifiée, et on pose $k_{p+1} = k_p + m$.

Finalement, la suite $(\tau^n(X_0))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy et converge vers un arbre X de $\mathcal{S}(A)$. τ est une application continue sur $\mathcal{S}(A)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\tau^{n+1}(X_0)) =_{\mathcal{S}(A)} \lim_{n \rightarrow \infty} (\tau(\tau^n(X_0))) =_{\mathcal{S}(A)} \tau \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\tau^n(X_0)) \right)$$

ce qui donne $\tau(X) =_{\mathcal{S}(A)} X$. \square

On possède maintenant une méthode de construction de points fixes pour une substitution donnée. La question naturelle que l'on peut se poser, est de savoir si tous les points fixes d'une substitution peuvent être obtenus par cette méthode.

Proposition 4.2.8 Soit $X \in \mathcal{S}(A)$ un arbre de diamètre infini, point fixe d'une substitution τ , et tel que $(B_1(X), \tau)$ vérifie la condition de croissance. Alors $X =_{\mathcal{S}(A)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau^n(B_1(X))$.

Preuve On note $X_0 = B_1(X)$; x_0 est la racine de X et X_0 . (X_0, τ) vérifie la condition de croissance, ce qui assure l'existence d'un arbre $X_t =_{\mathcal{S}(A)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau^n(X_0)$.

Par la condition de croissance (et puisque X est fixe), pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un entier h_p tel que $B_p(\tau^{h_p}(X)) =_{\mathcal{S}(A)} B_p(\tau^{h_p}(X_t)) =_{\mathcal{S}(A)} B_p(\tau^{h_p}(X_0))$. X et X_t correspondent (au sens de $\mathcal{S}(A)$) donc sur toute boule de rayon p centrée en x_0 , et on en déduit que $X =_{\mathcal{S}(A)} X_t =_{\mathcal{S}(A)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau^n(X_0)$. \square

Substitutions bornées et simplement bornées

L'image d'un élément de $\mathcal{S}_E(A)$ par une substitution d'arbre τ a un nombre fini de sommets. La propriété :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \exists k_p \in \mathbb{N}; \forall k \geq k_p, B_p(\tau^k(X_0)) =_{\mathcal{S}(A)} B_p(\tau^{k_p}(X_0))$$

énoncée dans la preuve précédente assure donc en particulier que les sommets du point fixe X à distance finie de la racine seront de degré fini. Il est cependant très facile de construire un exemple pour lequel l'ensemble des degrés des sommets du point fixe est non borné (voir figure 4.2 et 4.3).

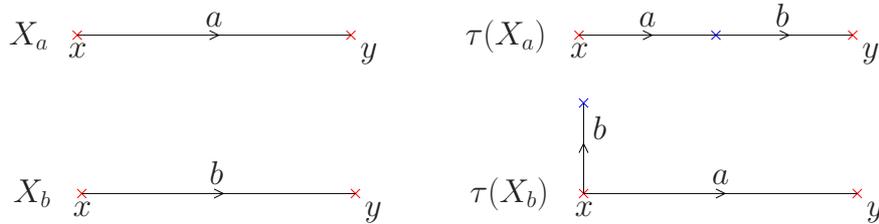


FIG. 4.2: Substitution sur $\mathcal{S}(\{a, b\})$.

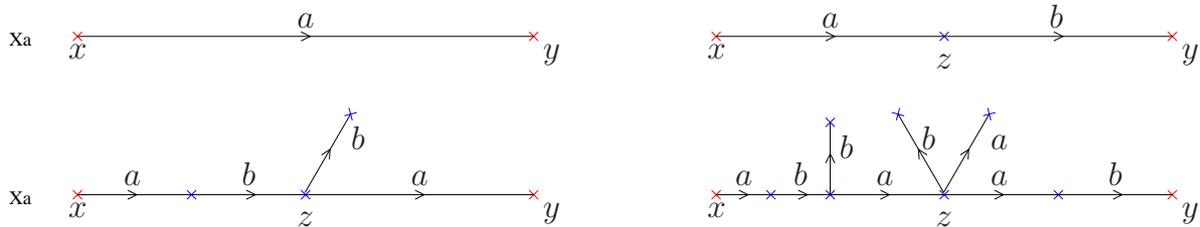


FIG. 4.3: Le début de la suite des $\tau^n(X_a)$. Le degré de z croît strictement avec n .

Proposition 4.2.9 Soit $X \in \mathcal{S}(A)$ un point fixe d'une substitution τ tel que $(B_1(X), \tau)$ vérifie la condition de croissance, et A l'ensemble des couleurs utilisées par X . Si $a \in A$, on note $X_a = (\{x, y\}, \{(x, y, a)\})$. Alors l'ensemble des degrés des sommets de X est borné si et seulement si les suites $(\deg_{\tau^n(X_a)}(x))_n$ et $(\deg_{\tau^n(X_a)}(y))_n$ sont ultimement constantes pour tout $a \in A$.

Preuve On supposera dans cette preuve que $X = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau^n(X_0)$. Les suites $(\deg_{\tau^n(X_a)}(x))_n$ et $(\deg_{\tau^n(X_a)}(y))_n$ ne peuvent pas être décroissantes, elles sont donc soit ultimement constantes, soit divergentes.

Si $(\deg_{\tau^n(X_a)}(x))_n$ (resp. $(\deg_{\tau^n(X_a)}(y))_n$) diverge pour un certain a de A , la suite $(\deg_{\tau^n(X_0)}(z))_n$, où z est n'importe quel sommet de $\tau^p(X_0)$ (p entier quelconque) ayant une arête sortante (resp. entrante) colorée a , va diverger.

Si les suites $(\deg_{\tau^n(X_a)}(x))_n$ et $(\deg_{\tau^n(X_a)}(y))_n$ sont ultimement constantes égales à d_{xa} et d_{ya} respectivement, on note $d_m = \max\{d_{za}; a \in A, z \in \{x, y\}\}$. Si c_a est le degré maximum des

sommets de $\tau(X_a)$, on note $c_m = \max\{c_a; a \in A\}$. L'ensemble des degrés des sommets de X sera alors borné par $\max\{c_m d_m, \deg_X(x_0)\}$. Le degré de x_0 est forcément fini puisque $X \in \mathcal{S}(A)$ et a peu d'importance; on pourra se reporter au paragraphe sur la décomposabilité pour plus de détails. \square

En fait, même si la substitution τ ne possède pas de point fixe, ou si l'arbre X_0 de départ ne permet pas d'arriver à un point fixe, on peut très bien énoncer une proposition similaire sur les degrés des sommets des éléments de la suite $(\tau^n(X_0))_{n \in \mathbb{N}}$. La preuve restera sensiblement la même.

Corollaire 4.2.10 Soit $X_0 \in \mathcal{S}(A)$ où A_n est l'ensemble des couleurs utilisées par $\tau^n(X_0)$ et $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Pour $a \in A$, on note $X_a = (\{x, y\}, \{(x, y, a)\})$. Il existe un entier k supérieur au degré de n importe quel sommet de $\tau^n(X_0)$ quel que soit n , si et seulement les suites $(\deg_{\tau^n(X_a)}(x))_n$ et $(\deg_{\tau^n(X_a)}(y))_n$ sont ultimement constantes pour tout $a \in A$.

On peut facilement donner une condition suffisante qui permettra de borner les degrés des sommets des images d'une substitution τ . Celle-ci a l'avantage d'être simple à vérifier, et permet de couvrir une bonne partie des cas intéressants.

Proposition 4.2.11 Soit $X_0 \in \mathcal{S}(A)$ où A_n est l'ensemble des couleurs utilisées par $\tau^n(X_0)$ et $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Pour $a \in A$, on note $X_a = (\{x, y\}, \{(x, y, a)\})$. Il existe un entier k supérieur au degré de n importe quel sommet de $\tau^n(X_0)$ quel que soit n , si :

$$\forall a \in A, \deg_{\tau(X_a)}(x) = \deg_{\tau(X_a)}(y) = 1$$

Définitions 4.2.12 Une substitution τ vérifiant les propriétés du corollaire 4.2.10 sera dite **bornée par k** . Si elle vérifie les propriétés de la proposition 4.2.11, on dira de τ qu'elle est **simplement bornée par k** .

Décomposabilité

On déduit du paragraphe précédent que si l'on trouve un point fixe pour une substitution, on peut en construire une infinité simplement en prenant autant de copies de l'arbre initial X_0 que l'on veut et en les enracinant au même sommet. De même, si on a deux points fixes issus de X_0 et X_1 , l'arbre X_{01} obtenu en faisant l'union (disjointe) de X_0 et X_1 , et en identifiant les racines donnera un nouveau point fixe. D'autre part, si le degré de la racine x_0 d'un point fixe est strictement supérieur à 1, on peut s'interroger sur les arbres enracinés en x_0 qui compose ce point fixe. On définit donc la propriété de décomposabilité.

Définition 4.2.13 On dit qu'un point fixe X de racine x_0 d'une substitution τ est **décomposable** s'il existe un ensemble $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ d'arbres tous enracinés en x_0 , tels que pour tout couple i, j d'entiers, $V_{X_i} \cap V_{X_j} = \{x_0\}$ et vérifiant :

$$V_X = \bigcup_{1 \leq i \leq n} V_{X_i} \quad E_X = \bigcup_{1 \leq i \leq n} E_{X_i}$$

Un point fixe sera dit **indécomposable minimal** si toute décomposition propre contient au moins un arbre qui n'est pas fixe. La décomposition sera dite **minimale** si tout arbre de la décomposition est fixe et indécomposable minimal.

Un point fixe sera dit **indécomposable maximal** si sa racine est de degré 1.

La décomposition sera dite **maximale** si le degré de x_0 dans chacun des arbres $X_i, 1 \leq i \leq n$ est égal à 1. Les décompositions minimales et maximales sont uniques (si elles existent).

Proposition 4.2.14 *Tout arbre X_i appartenant à une décomposition d'un point fixe X d'une substitution τ est un point périodique.*

Preuve *On remarque d'abord que l'étude d'une décomposition maximale permettra de déduire le résultat sur toutes les décompositions. On considère donc un arbre X de $\mathcal{S}(A)$, point fixe d'une substitution τ , et dont la décomposition maximale est constituée des arbres X_1, \dots, X_n . On déduit directement du fait que X est un point fixe que l'image d'un arbre X_i de la décomposition est égale (au sens de $\mathcal{S}(A)$) à un arbre X_j de cette même décomposition. Appliquer τ revient donc à effectuer une permutation sur n éléments. On déduit alors de l'étude des groupes symétriques qu'il existe un entier k tel que pour $1 \leq i \leq n$, $\tau^k(X_i) =_{\mathcal{S}(A)} X_i$. Chacun des éléments de la décomposition est donc périodique. \square*

En fait, ces derniers résultats peuvent également être appliqués pour des boules de taille arbitrairement grande, centrées à la racine et constantes (au sens de l'égalité sur $\mathcal{S}(A)$) sous l'action de la substitution. Plus précisément, si X , élément de $\mathcal{S}(A)$, vérifie $B_p(\tau(B_p(X))) =_{\mathcal{S}(A)} B_p(X)$, p étant un entier, alors on peut décomposer $B_p(X)$ en arbres X_1, \dots, X_n tels que pour $1 \leq i \leq n$, il existe un entier k pour lequel $B_p(\tau^k(X_i)) =_{\mathcal{S}(A)} X_i$.

4.2.2 Points fixes pertinents

On a vu qu'on peut créer très facilement une infinité de points fixes pour une substitution τ donnée. Pour la plupart des points fixes X de τ , il existe une unique fonction d'inclusion de $B_1(X)$ dans X . On définit ici les points fixes pertinents, afin d'éviter cette situation.

Définition 4.2.15 *On suppose que X est un point fixe d'une substitution τ de $\mathcal{S}(A)$. Pour tout $a \in A$, on note $X_a = (\{x, y\}, \{(x, y, a)\})$. On dit que X est un **point fixe pertinent** si $(B_1(X), \tau)$ vérifie la condition de croissance, et s'il existe un entier $p \geq 0$, une lettre $a \in A$ et un sommet c de $\tau^p(X_a)$, $c \neq x$ et $c \neq y$, tels que $B_1(X) =_{\mathcal{S}(A)} B_{c,1}(\tau^p(X_a))$.*

4.2.3 Abélianisation

Définition 4.2.16 τ étant une substitution d'arbre sur un alphabet $A = \{1, \dots, n\}$ de cardinal n , on appelle **matrice d'incidence** de τ , et on la note M_τ , la matrice $n \times n$ dont l'entrée (i, j) est le nombre d'arêtes étiquetées i dans l'arbre $\tau(X_j)$.

Primitivité

Définition 4.2.17 *Une substitution τ de $\mathcal{S}(A)$ est dite **primitive**, s'il existe un entier k tel que, pour tout a et b de A , une arête étiquetée a apparaît dans l'arbre $\tau^k(X_b)$. Cela revient à dire que la matrice d'incidence est primitive.*

La primitivité apporte des propriétés intéressantes lorsqu'on parle de substitutions sur les mots. Elle assure notamment que les points fixes de ces substitutions sont uniformément récurrents. On va essayer de trouver une propriété similaire pour les arbres ; on doit pour cela définir les recouvrements d'arbres.

Si Y est un arbre inclu dans X , on note Ω_Y l'ensemble des fonctions d'inclusion de V_Y dans V_X . D'autre part, X étant un élément de $\mathcal{S}(A)$, si V est un sous-ensemble connexe (au sens des chemins dans X) de V_X , on note $g(V)$ le sous-arbre de X tel que $V_{g(V)} = V$.

Recouvrement. Soient n arbres X_1, \dots, X_n deux à deux distincts inclus dans un arbre X et n ensembles non vides $\omega_{X_1} \subset \Omega_{X_1}, \dots, \omega_{X_n} \subset \Omega_{X_n}$ associés.

On dit que l'ensemble $\{(X_1, \omega_{X_1}), \dots, (X_n, \omega_{X_n})\}$ est un **recouvrement** d'un arbre X de $\mathcal{S}(A)$ si pour tout élément e de E_X , il existe un entier $i \in 1, \dots, n$ et une fonction f de ω_{X_i} tels que $e \in E_{g(f(X_i))}$. On dit alors que la famille (X_1, \dots, X_n) est une **famille couvrante**.

Le recouvrement sera dit **minimal** si pour e élément de E_X , le couple (f, i) est unique. Une famille (X_1, \dots, X_n) est **couvrante minimale** s'il existe un n -uplet $(\omega_{X_1}, \dots, \omega_{X_n})$, avec $\omega_{X_1} \subset \Omega_{X_1}, \dots, \omega_{X_n} \subset \Omega_{X_n}$, tel que $\{(X_1, \omega_{X_1}), \dots, (X_n, \omega_{X_n})\}$ est un recouvrement minimal.

On considère une substitution primitive τ . Les points périodiques de τ possèdent les propriétés suivantes.

Propriétés 4.2.18 X désigne un point périodique quelconque de période k . $A = \{1, \dots, n\}$ est l'alphabet associé à la substitution. Pour $1 \leq i \leq n$, X_i est un arbre composé d'une unique arête étiquetée i . p étant un entier naturel :

- La famille $(\tau^{p \times k}(X_1), \dots, \tau^{p \times k}(X_n))$ est couvrante minimale pour X .
- Si $\{(X_1, \omega_{X_1}), \dots, (X_n, \omega_{X_n})\}$ est un recouvrement minimal de X , alors il existe un recouvrement minimal $\{(\tau^{p \times k}(X_1), \omega_{\tau^{p \times k}(X_1)}), \dots, (\tau^{p \times k}(X_n), \omega_{\tau^{p \times k}(X_n)})\}$ de $\tau^{p \times k}(X)$ et n fonctions $\phi_i, 1 \leq i \leq n$ bijectives de ω_{X_i} dans $\omega_{\tau^{p \times k}(X_i)}$ vérifiant : pour tout $f : V_{X_i} = \{x_i, y_i\} \rightarrow V_X$, $\phi_i(f) : V_{\tau^{p \times k}(X_i)} \rightarrow V_{\tau^{p \times k}(X)}$ avec $\phi_i(f)(x_i) = f(x_i)$ et $\phi_i(f)(y_i) = f(y_i)$.

Proposition 4.2.19 Si X est un point fixe pertinent d'une substitution τ de $\mathcal{S}(A)$ primitive, alors X est uniformément récurrent.

Preuve Soit a un élément de l'alphabet $A = \{1, \dots, n\}$, support d'une substitution τ primitive, et X_a un élément de $\mathcal{S}_E(A)$ dont l'arête est colorée par a . Il existe un entier p tel que, pour n'importe quel élément b de A , $X_a \subset_{\mathcal{S}(A)} \tau^p(X_b)$. De plus, la famille $(\tau^p(X_1), \dots, \tau^p(X_n))$ est couvrante minimale. On en déduit que pour tout c de V_X , $X_a \subset_{\mathcal{S}(A)} B_{c,k}(X)$, où $k = \max_{1 \leq i \leq n} \{\text{diam}(\tau^p(X_i))\}$. Une propriété similaire peut être obtenue pour n'importe quel $\tau^k(X_a)$, k entier. Puisqu'on a pris le soin de prendre un point fixe pertinent, toute boule (de rayon fini) de X est incluse (au sens de $\mathcal{S}(A)$) dans $\tau^n(X_a)$ pour un certain n (le choix de a n'a pas d'importance par primitivité). On en déduit que X est uniformément récurrent. \square

4.2.4 Discernement

Définitions 4.2.20 Si pour tout couple (x_1, x_2) de sommets d'un arbre X de $\mathcal{S}(B)$, le mot $\gamma_X(x_1, x_2)$ de $(B \cup \overline{B})^*$ ne contient aucune paire \overline{bb} , $b \in B$, alors on dit de X que c'est un arbre **discerné**.

Une substitution χ de $\mathcal{S}(B)$ est dite **discernée** si pour tout $b \in B$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'arbre $\tau^n(X_b)$ (où $X_b = (\{x, y\}, \{(x, y, b)\})$) est discerné.

Substitutions équivalentes

Définition 4.2.21 Soient τ de $\mathcal{S}(A)$ et χ de $\mathcal{S}(B)$ deux substitutions et $\#(B) \geq \#(A)$. Pour toute application η de B dans A , on note ϕ_η une application de $\mathcal{S}(B)$ dans $\mathcal{S}(A)$ telle que si X est un arbre de $\mathcal{S}(B)$:

- $V_{\phi_\eta(X)} = V_X$
- $\forall (x, y, b) \in E_X, (x, y, \eta(b)) \in E_{\phi_\eta(X)}$.

Alors, τ et χ seront deux substitutions **équivalentes** s'il existe une application η surjective telle que, quel que soit $b \in B$, $\phi_\eta(\chi(X_b)) = \tau(X_{\eta(b)})$ (où pour tout $a \in A \cup B$, $X_a = (\{x, y\}, \{(x, y, a)\})$).

Proposition 4.2.22 *Soit τ une substitution simplement bornée par k sur $\mathcal{S}(A)$ (A fini). Alors il existe un alphabet B de cardinal $2k \times \#(A)$ et une substitution χ discernée de $\mathcal{S}(B)$ équivalente à τ .*

Plutôt que de donner une preuve générale de l'existence d'une telle substitution, nous donnons ici un moyen systématique de construction. Le résultat que nous obtiendrons sera loin d'être optimal, mais nous sommes plus intéressé par la simple existence. On suppose que $A = \{0, 1, \dots, (p-1)\}$ et on considère l'alphabet B ;

$$B = \{0_0, \dots, 0_{2k-1}, 1_0, \dots, 1_{2k-1}, \dots, (p-1)_0, \dots, (p-1)_{2k-1}\}.$$

η associe a à tout élément a_i de B . Pour a_i un élément de B , on note $X_{a_i} = (\{x, y\}, \{(x, y, a_i)\})$; l'arbre $X_a = (\{x, y\}, \{(x, y, a)\})$ est l'image dans $\mathcal{S}(A)$ de X_{a_i} par ϕ_η . Nous voulons définir les images par χ des X_{a_i} ; on commence par définir celles de X_{a_0} pour tout $0 \leq a \leq p-1$.

Si $a \in A$, on suppose que $(x_0, y_0, c^{(0)}), \dots, (x_m, y_m, c^{(m)})$, où $c^{(0)}, \dots, c^{(m)}$ sont des éléments de A , sont les arêtes de $\tau(X_a)$ qui constituent le chemin de x à y . Le chemin de x à y dans l'arbre $\chi(X_{a_0})$ est définie par les arêtes $(x_0, y_0, c_{\alpha(0)}^{(0)}), \dots, (x_m, y_m, c_{\alpha(m)}^{(m)})$, où $\alpha(j) = 0$ si $|x, x_j|_{\tau(X_a)} < |x, y_j|_{\tau(X_a)}$ et $\alpha(j) = k$ sinon.

Si v est un sommet de $\tau(X_a)$ sur le chemin de x à y et $(z_1, t_1, d^{(1)}), \dots, (z_n, t_n, d^{(n)})$ (avec $n \leq k-2$) sont les arêtes adjacentes à v et n'appartenant pas au chemin entre x et y , alors $(z_1, t_1, d_1^{(1)}), \dots, (z_d, t_d, d_n^{(n)})$ seront des arêtes adjacentes à v dans $\chi(X_{a_0})$.

Si v est un sommet de $\tau(X_a)$, v n'est pas sur le chemin de x à y , et $(z_0, t_0, d^{(0)}), \dots, (z_n, t_n, d^{(n)})$ (avec $n \leq k-1$), alors les arêtes adjacentes à v dans $\chi(X_{a_0})$ seront $(z_0, t_0, d_{\beta(0)}^{(0)}), \dots, (z_n, t_n, d_{\beta(n)}^{(n)})$ où les $\beta(i)$ sont deux à deux distincts et compris entre 0 et $k-1$.

$\chi(X_{a_i})$ aura les même sommets que $\chi(X_{a_0})$, et si (x_p, y_p, c_m) est une arête de $\chi(X_{a_0})$, alors (x_p, y_p, c_n) , avec $n = m + i[2k]$, sera une arête de $\chi(X_{a_i})$. Ainsi définie, la substitution χ vérifie la propriété au rang 1, c'est-à-dire que $\chi(X_{a_i})$ est discerné quel que soit a_i dans B .

Remarque 4.2.23 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $(x_0, y_0, c_{\alpha(0)}^{(0)}), \dots, (x_m, y_m, c_{\alpha(m)}^{(m)})$ définie le chemin de x à y dans $\chi^n(X_{a_i})$, alors $\alpha(j) = i$ si $|x, x_j|_{\tau(X_a)} < |x, y_j|_{\tau(X_a)}$ et $\alpha(j) = i + k[2k]$ sinon.*

Cela découle directement de la définition de $\chi(X_{a_i})$ sur le chemin de x à y .

On suppose la propriété vraie au rang n et on choisit un sommet v de $V_{\chi^n(X_{a_0})}$ et deux arêtes (x_0, y_0, c_i) et (x_1, y_1, d_j) adjacentes à v . Si les deux arêtes sur le chemin de x à y , la remarque 4.2.23 assure que la propriété est vérifié au rang suivant. Sinon, on a $i - j \neq 0[k]$, et cela sera conservé au rang suivant par 4.2.23. Finalement, χ est discernée.

Une propriété des substitutions discernées

Si X est un arbre discerné de racine x_0 dans $\mathcal{S}(B)$, et si u est un mot quelconque du monoïde $(B \cup \overline{B})^*$, alors il existe au maximum un sommet y tel que $\gamma_X(x, y) = u$. Cela nous permet de décrire complètement X par une partie de $(B \cup \overline{B})^*$. L'inverse peut également être vraie si la partie de $(B \cup \overline{B})^*$ choisie vérifie une certaine propriété dont le but est d'assurer la connexité de l'arbre.

Propriété 4.2.24 *Soit P une partie de $(B \cup \overline{B})^*$ telle que si $b_0 b_1 \dots b_n$ est un élément de $(B \cup \overline{B})^*$, alors $b_0 b_1 \dots b_n \in P \Rightarrow b_0 b_1 \dots b_{n-1} \in P$ et $\epsilon \in P$. Il existe un arbre X de $\mathcal{S}(B)$ de racine x_0 , tel que pour tout y , sommet de X , le codage du chemin de x_0 à y est dans P ; réciproquement, tout élément de P est le codage d'un (unique) chemin de X .*

On peut décrire une substitution discernée uniquement à l'aide de mots. B étant un alphabet on définit une application $\varphi : B \rightarrow \mathcal{P}((B \cup \overline{B})^*)$ et une application $\eta : B \rightarrow (B \cup \overline{B})^*$ telles que :

- pour tout b de B , $\varphi(b)$ vérifie la propriété vue en 4.2.24,
- pour tout b de B , $\eta(b) \in \varphi(b)$.

On commence par étendre les définitions de φ et η à \overline{B} . On définit le morphisme $\lambda : (B \cup \overline{B})^* \rightarrow (B \cup \overline{B})^*$ défini pour tout $b \in B$ par $\lambda(b) = \overline{b}$ et $\lambda(\overline{b}) = b$. Pour tout élément u de $\varphi(b)$, on choisit le plus long mot p_u tel que $u = p_u s_u$ et p_u est un préfixe de $\eta(b)$. On définit alors $\varphi(\overline{b}) = \{\lambda(p_u) s_u; u \in \varphi(b)\}$ et $\eta(\overline{b}) = \lambda(\eta(b))$.

Si $b_0 b_1 \dots b_n$ est un élément de $(B \cup \overline{B})^*$, et P une partie de $(B \cup \overline{B})^*$ on notera $b_0 b_1 \dots b_n \cdot P = \bigcup_{p \in P} \{b_0 b_1 \dots b_n p\}$. On étend l'ensemble de définition de φ à $(B \cup \overline{B})^*$;

$$\forall b_0 b_1 \dots b_n \in (B \cup \overline{B})^*, \varphi(b_0 b_1 \dots b_n) = \eta(b_0) \eta(b_1) \dots \eta(b_{n-1}) \cdot \varphi(b_n)$$

La fonction φ peut alors être vue comme une substitution d'arbre discernée.

Arbres discernés et graphe de Cayley

Si X est un arbre de $\mathcal{S}(A)$ de racine x_0 , alors pour tout couple y, z de V_X , on a associé au chemin de y à z un mot de $(A \cup \overline{A})^*$, $\gamma_X(y, z)$. On a pris soin de parler de monoïde libre, afin d'autoriser, par exemple, que $\gamma_X(y, z_0) = \gamma_X(y, z_1)$ avec $z_0 \neq z_1$, ou encore pour autoriser des chemins tels $a_0 \overline{a_0}$ (ce qui revient au même). Cependant, cela ne se produira jamais si un arbre est discerné. Un arbre discerné peut donc être plongé dans le graphe de Cayley du groupe libre $F(A)$ (groupe libre de base A) : ce graphe sera noté $G_{F(A)} = (V_G, E_G)$.

On note pr l'application de $A \cup \overline{A}$ dans $F(A)$ qui à un élément a de A associe $pr(a) = a$, et à un élément \overline{a} de \overline{A} associe $pr(\overline{a}) = a^{-1}$. Soit u un élément de V_G et ν une application de V_X dans V_G définie par

- $\nu(x_0) = u$,
- si $y \in V_X$ et $\gamma_X(x_0, y) = a_0 \dots a_p$, alors $\nu(y) = u pr(a_0) \dots pr(a_p)$ où les $pr(a_j)$ sont les vecteurs de translations de l'action à droite de $F(A)$ sur $G_{F(A)}$.

Le plongement de l'arbre X dans $G_{F(A)}$ est défini comme l'enveloppe convexe de $\nu(V_X)$.

Remarque 4.2.25 *Il est important de remarquer que si y et z sont deux sommets quelconques, le mot $\gamma_X(y, z)$ est donné par le chemin le plus court allant de y à z dans X , alors que le mot $pr \circ \gamma(y, z)$ peut être obtenu (après réduction) par n'importe quel chemin allant de y à z dans son plongement.*

Enfin, de la même manière que dans le paragraphe précédent, et en utilisant l'application pr que nous venons de définir, une substitution d'arbre discernée peut être définie par une application $\varphi : A \rightarrow \mathcal{P}(F(A))$ et une application $\eta : A \rightarrow F(A)$.

4.3 Dynamique

Soit A un alphabet fini. $(u_n)_n$ étant une suite d'entiers naturels on note $E_{(u_n)_n}^{(0)}$ l'ensemble des arbres de $\mathcal{S}(A)$;

$$X \in E_{(u_n)_n}^{(0)} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \max_{x \in B_n(X)} \deg_X(x) \leq u_n.$$

On note alors $E_{(u_n)_n}$ l'espace quotient $E_{(u_n)_n}^{(0)} / \equiv_{\mathcal{S}(A)}$. Si la suite $(u_n)_n$ est constante égale à p , $E_{(u_n)_n}$ sera simplement noté $E_{(p)}$.

On dit qu'un arbre est de **rayon** n si tous ses points sont à une distance $\leq n$ de sa racine, et s'il existe au moins un point à distance n .

Propriété 4.3.1 *L'alphabet A étant de cardinal fini, pour tout entier k , il y a un nombre fini d'arbres de rayon k dans $E_{(u_n)_n}$.*

Proposition 4.3.2 *Si $(u_n)_n$ est une suite d'entiers naturels non nuls croissantes, alors $E_{(u_n)_n}$ (muni de la distance d) est un compact non vide.*

Preuve *L'arbre $(\{x\}, \emptyset)$ de $\mathcal{S}(A)$ est dans $E_{(u_n)_n}$, assurant que celui-ci est non vide.*

Soit $(X_n)_n$ une suite d'éléments de $E_{(u_n)_n}$. Pour tout arbre Y de $E_{(u_n)_n}$, on notera $E_{(u_n)_n}(Y)$ l'ensemble des arbres Z de $E_{(u_n)_n}$ tels que $Y \subseteq_{\mathcal{S}(A)} Z$. Par la propriété 4.3.1, il existe D_1 de $E_{(u_n)_n}$ de rayon 1 pour lequel il existe une infinité d'éléments de $(X_n)_n$ dans $E_{(u_n)_n}(D_1)$. On note $(X_{\alpha_1(n)})_n$ ces éléments; ils sont à une distance $\leq 2^{-2}$ de D_1 . Par suite, il existe D_k de rayon k pour lequel il existe une infinité d'éléments de $(X_{\alpha_{k-1} \circ \dots \circ \alpha_1(n)})_n$ dans $E_{(u_n)_n}(D_k)$. Ces éléments sont à une distance $\leq 2^{-(k+1)}$ de D_k et D_k est tel que pour tout $i < k$, $B_i(D_k) =_{\mathcal{S}(A)} D_i$.

Soit $n \geq 0$ et $q > 0$; puisque $B_n(D_{n+q}) =_{\mathcal{S}(A)} D_n$, D_n est de rayon n , et D_{n+q} est de rayon $> n$, alors $d(D_n, D_{n+q}) = 2^{-(n+1)}$. La suite $(D_n)_n$ est donc une suite de Cauchy de $\mathcal{S}(A)$ (complet pour d) et converge donc vers un élément D de $\mathcal{S}(A)$. De plus, D est tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $B_i(D) =_{\mathcal{S}(A)} D_i$, faisant de D un élément de $E_{(u_n)_n}$. On a donc extrait de $(X_n)_n$ une suite convergente; $E_{(u_n)_n}$ est compact. \square

Un raisonnement similaire nous permet de montrer le corollaire suivant.

Corollaire 4.3.3 *$D_{(u_n)_n}$ est la partie de $E_{(u_n)_n}$ ne contenant que les arbres discernés; $D_{(u_n)_n}$ est également compact.*

Déplacement de racine

X étant un arbre de $E_{(u_n)_n}$ de racine x_0 , et x un élément de V_X , on notera $X(x)$ l'arbre de $E_{(u_n)_n}$ de racine x tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n(X(x)) = B_{x,n}(X)$.

Orbites sous l'action du déplacement de racine

Soit τ une substitution primitive de $\mathcal{S}(A)$ bornée par k et qui vérifie la condition de croissance. Soit $X \in E_{(k)}$ un point fixe pertinent de τ . Pour tout arbre Z de $E_{(k)}$, on note $\mathcal{L}(Z) = \{B_{z,n}(Z); z \in V_Z, n \in \mathbb{N}\}$ et on note $\Omega = \{Y \in E_{(k)}; \mathcal{L}(Y) \subset \mathcal{L}(X)\}$.

Théorème 4.3.4 *Toutes les orbites des points de Ω sous l'action du déplacement de racine sont denses (pour la topologie métrique) dans Ω .*

Preuve *Soit Y un arbre de Ω ; X étant uniformément récurrent, pour toute boule $B_{x,n}(X)$, il existe un entier m tel que $B_{x,n}(X) \subset_{\mathcal{S}(A)} B_{x',m}$ quel que soit $x' \in V_X$. On en déduit que $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{L}(X)$.*

Si Y et Z sont deux arbres de Ω , pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un sommet y_n de Y tel que $B_{y_n,n}(Y) =_{\mathcal{S}(A)} B_n(Z)$. La suite $(Y(y_n))_n$ converge alors vers Z . \square

Corollaire 4.3.5 *Ω est compact en tant que fermé du compact $E_{(k)}$.*

On vient de montrer que tous les arbres de Ω ont même langage; on le note donc $\mathcal{L}(\Omega)$. Pour tout $B \in \mathcal{L}(\Omega)$, on note C_B le sous-ensemble de Ω constitué des arbres Y tels qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $B_k(Y) =_{\mathcal{S}(A)} B$. Si X est un point fixe pertinent de τ de racine x , on note μ la mesure de probabilité définie sur tout ensemble C_B par

$$\mu(C_B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\#V_{B_n(X)}} \#\{z \in B_n(X); \exists k \in \mathbb{N}; B_{z,k}(X) =_{\mathcal{S}(A)} B\}$$

où $\#$ désigne le cardinal.

Conjecture 4.3.6 *Soit τ une substitution primitive de $\mathcal{S}(A)$ bornée par k et qui vérifie la condition de croissance, $X \in E_{(k)}$ un point fixe pertinent de τ , et Ω l'adhérence de l'ensemble $\{X(x), x \in V_X\}$. La mesure μ définie précédemment est l'unique mesure de probabilité sur Ω invariante sous l'action du déplacement de racine.*

Chapitre 5

Substitutions sur des arbres réels

Soit (X, d) un espace métrique. Si $E \subset X$, et si δ est un réel strictement positif, on note :

$$[E]_\delta = \{x \in X; \inf_{y \in E} d(x, y) \leq \delta\}$$

Définition 5.0.7 On définit la **métrique de Hausdorff** sur l'ensemble des parties de X :

$$\delta(E, F) = \inf\{\delta; E \subset [F]_\delta \text{ et } F \subset [E]_\delta\}$$

On note \mathcal{C} l'ensemble des compacts non vides de X .

Théorème 5.0.8 Si (X, d) est complet, alors (\mathcal{C}, δ) est complet.

5.1 Constructions graphe-dirigées

5.1.1 Dimension de Hausdorff

Soit (X, d) un espace métrique. Soit E une partie de X et $(U_n)_n$ une famille (possiblement infinie) de parties de X . On dira que $(U_n)_n$ est une δ -couverture de E si $E \subset \bigcup_n U_n$ et si pour tout n , le diamètre de U_n noté $|U_n|$ est inférieur ou égal à δ . Soit s un réel strictement positif; on définit $\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf\{\sum_n |U_n|^s\}$ où l'infimum est pris sur toutes les δ -couvertures (dénombrables) de E . La **mesure s-dimensionnelle de Hausdorff** est alors donnée par :

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(E).$$

Pour tout E , $\mathcal{H}^s(E)$ est décroissante lorsque s croît de 0 à $+\infty$. De plus, si $s < t$, $\mathcal{H}_\delta^s(E) \geq \delta^{s-t} \mathcal{H}_\delta^t(E)$, ce qui implique que si $\mathcal{H}^t(E)$ est positive, alors $\mathcal{H}^s(E)$ est infinie. Il existe donc une unique valeur $\dim(E)$ appelée **dimension de Hausdorff de E** , telle que :

$$\mathcal{H}^s(E) = \infty \text{ si } 0 \leq s < \dim(E) \text{ et } \mathcal{H}^s(E) = 0 \text{ si } \dim(E) < s < \infty.$$

$\mathcal{H}^{\dim(E)}$ peut prendre n'importe quelle valeur réelle positive et peut également être infinie.

Propriétés 5.1.1 Soit E une partie d'un espace métrique X . La dimension de Hausdorff de E est α . Alors, pour tout $F \subset X$ de dimension β , $E \subset F \Rightarrow \beta \geq \alpha$.

Soient A_1, A_2, \dots, A_p p parties de X de dimensions respectives $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, et $A = \bigcup_{1 \leq i \leq p} A_i$ de dimension α . Alors $\alpha = \max_{1 \leq i \leq p} \alpha_i$.

5.1.2 Constructions graphe-dirigées

Les constructions graphe-dirigées ont été introduites par R. Daniel Mauldin et S. C. Williams dans [17]. Cette section énonce les principaux théorèmes de cet article, auquel on pourra se référer afin de connaître leurs démonstrations. Les résultats exposés concernent des constructions dans \mathbb{R}^n mais peuvent être généralisés à l'espace qui nous intéresse (voir section 5.2). On pose $X = \mathbb{R}^n$ et d la distance euclidienne sur X .

Une construction graphe-dirigée de X est la donnée de :

- une séquence finie de compacts sans chevauchements de X : J_1, \dots, J_n , J_i étant d'intérieur non vide quel que soit $1 \leq i \leq n$,
- un graphe orienté G de sommets $1, 2, \dots, n$, avec pour chaque arête (i, j) une similitude $T_{i,j}$ de ratios $t_{i,j}$ et ayant les propriétés :
 - pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe j tel que (i, j) est une arête de G ,
 - pour tout i , $\{T_{i,j}(J_j); (i, j) \in G\}$ est une famille d'éléments sans chevauchements et

$$J_i \supset \bigcup_{(i,j) \in G} T_{i,j}(J_j),$$
- si $(i_1, \dots, i_q, i_{q+1} = i_1)$ est un circuit de G , alors

$$\prod_{k=1}^q t_{i_k, i_{k+1}} < 1.$$

On note $\mathcal{K}(J_i)$ l'ensemble des sous-ensembles compacts de J_i .

Théorème 5.1.2 *Pour chaque construction, il existe un unique vecteur d'ensembles compacts $(K_1, \dots, K_n) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{K}(J_i)$ tel que pour tout i ,*

$$K_i = \bigcup_{(i,j) \in G} T_{i,j}(K_j).$$

On construit alors $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$.

La matrice d'incidence pondérée ou **matrice de construction** $A = A_G$ associée à une construction graphe-dirigée est la matrice $n \times n$ définie par $A = [t_{i,j}]_{i,j \leq n}$ où on a, par convention, $t_{i,j} = 0$ si $(i, j) \notin G$. Pour tout $\beta \geq 0$, on note $A_\beta = A_{G,\beta}$ la matrice $n \times n$ telle que $a_{\beta,i,j} = t_{i,j}^\beta$, et $\Phi(\beta)$ le rayon spectral de A_β . On note enfin α le réel positif ou nul tel que $\Phi(\alpha) = 1$.

Théorème 5.1.3 $\Phi(0) \geq 1$, Φ est continue, strictement décroissante, et $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \Phi(\beta) = 0$. En fait, il existe un réel c , $0 < c < 1$, tel que pour tout $\beta \geq 0$, et $\epsilon > 0$, $\Phi(\beta + \epsilon) \leq c^\epsilon \Phi(\beta)$.

On rappelle qu'un graphe H est dit fortement connexe lorsque, il existe un chemin (orienté) entre toute paire de sommets de H . Une composante fortement connexe d'un graphe G est un sous-graphe H de G tel que H est fortement connexe. De manière évidente, les composantes connexes de G sont deux à deux disjointes. Le théorème suivant donne une condition suffisante pour que $\mathcal{H}^\alpha(K)$ soit fini.

Théorème 5.1.4 *Pour chaque construction graphe-dirigée telle que G est fortement connexe, la dimension de Hausdorff de K est le réel α tel que $\Phi(\alpha) = 1$. De plus, $0 < \mathcal{H}^\alpha(K) < +\infty$.*

On étudie maintenant ce qui arrive lorsque G n'est pas fortement connexe. On rappelle la définition de mesure σ -finie avant de poursuivre.

Définition 5.1.5 (E, \mathcal{T}, μ) est un espace mesuré. La mesure μ est dite **σ -finie** s'il existe une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{T} vérifiant $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, telle que, pour tout n , $\mu(A_n) < +\infty$.

Le dernier résultat va donner une condition nécessaire et suffisante pour que la mesure de Hausdorff associée au réel α soit finie. On note $SC(G)$ l'ensemble des composantes fortement connexes de G . On peut vérifier que tout H de $SC(G)$ définit une construction graphe-dirigée ; on peut donc lui associer une matrice de construction $A_H = [a_{H;i,j}]_{i,j \leq n}$, et une matrice $A_{H,\beta} = [a_{H;i,j}^\beta]_{i,j \leq n}$ de rayon spectral $\Phi_H(\beta)$. On note α_H le réel β pour lequel $\Phi_H(\beta) = 1$. Enfin, on ordonne partiellement $SC(G)$ en disant que $H_1 \preceq H_2$ s'il existe un chemin fini (orienté) $\{g_1, \dots, g_k\}$ dans G tel que $g_1 \in H_1$ et $g_k \in H_2$. Le théorème principal peut alors être énoncé.

Théorème 5.1.6 *Pour toute construction graphe-dirigée, la dimension de K est le réel $\alpha = \max\{\alpha_H; H \in SC(G)\}$ et la mesure \mathcal{H}^α sur K est positive et σ -finie. De plus $\mathcal{H}^\alpha(K) < +\infty$ si et seulement si les éléments de $\{H \in SC(G); \alpha_H = \alpha\}$ sont deux à deux incomparables.*

5.1.3 Multi-graphes

Dans un multi-graphe, plusieurs arêtes distinctes peuvent avoir même sommet initial et même sommet terminal. Les constructions graphe-dirigées ne sont pas définies pour ces graphes. Pourtant elles pourraient avoir un intérêt particulier lorsque certains des compacts (les sommets du graphes) sont isométriques, ou plus généralement homothétiques. On peut donner l'exemple de la poussière de Cantor, pouvant être obtenue par une construction graphe-dirigée dont le graphe est celui donné figure 5.1, et définie par :

$$- J_1 = [0; \frac{1}{3}], J_2 = [\frac{2}{3}; 1].$$

$$T_{1,1} : \begin{array}{ccc} [0; \frac{1}{3}] & \rightarrow & [0; \frac{1}{3}] \\ x & \mapsto & \frac{1}{3}x \end{array} \quad T_{2,1} : \begin{array}{ccc} [0; \frac{1}{3}] & \rightarrow & [\frac{2}{3}; 1] \\ x & \mapsto & \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \end{array}$$

$$T_{2,2} : \begin{array}{ccc} [\frac{2}{3}; 1] & \rightarrow & [\frac{2}{3}; 1] \\ x & \mapsto & \frac{1}{3}(x - \frac{2}{3}) + \frac{8}{9} \end{array} \quad T_{1,2} : \begin{array}{ccc} [\frac{2}{3}; 1] & \rightarrow & [0; \frac{1}{3}] \\ x & \mapsto & \frac{1}{3}(x - \frac{2}{3}) + \frac{2}{9} \end{array}$$

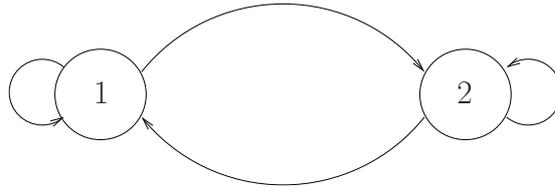


FIG. 5.1: Construction graphe-dirigée de la poussière de Cantor.

Une construction multi-graphe dirigée consiste en :

- une séquence finie de compacts sans chevauchement de $X : J_1, \dots, J_n$ où chaque J_i est d'intérieur non vide quel que soit $1 \leq i \leq n$,
- un multi-graphe orienté G de sommets $1, \dots, n$ où le nombre d'arêtes de i à j est noté p_{ij} . Si $p_{ij} > 0$, on définit p_{ij} similitudes $T_{(i,j),k}$ où $1 \leq k \leq p_{ij}$ de ratio $t_{(i,j),k}$. De plus,
 - pour tout i , $1 \leq i \leq n$, il existe j tel qu'il y a au moins une arête de sommet initial i et de sommet terminal j ,
 - pour tout i , $\{T_{(i,j),k}(J_j); p_{ij} > 0 \text{ et } k \text{ varie de } 1 \text{ à } p_{ij}\}$ est une famille sans chevauchements et

$$J_i \supset \bigcup_{i,j} \bigcup_k T_{(i,j),k}(J_j)$$

où l'union est faite sur l'ensemble des couples (i, j) tels que $p_{ij} > 0$ et k varie de 1 à p_{ij} ,

- si $(i_1, \dots, i_{q+1} = i_1)$ est un circuit de G où e_1, \dots, e_q sont les arêtes du circuit, et t_1, \dots, t_q sont les ratios des similitudes associées à ces arêtes, alors

$$\prod_{k=1}^q t_k < 1.$$

Nous voulons évidemment retrouver les mêmes théorèmes pour des constructions multi-graphe-dirigées. La remarque suivante va permettre de se ramener à un graphe classique.

On considère une construction multi-graphe-dirigée ; J_1, J_2, \dots, J_n sont les compacts sans chevauchements et d'intérieurs non vide, et G est le graphe de construction. On suppose que G est un multi-graphe dans lequel il existe un unique couple (i, j) de sommets tels que $p_{ij} > 1$ et $p_{ij} = 2$. Pour simplifier, on prendra $i = 1, j = 2$. On notera simplement $T_{(i,j)}$ la similitude associée à l'arête entre i et j pour $(i, j) \neq (1, 2)$, et $T_{(1,2),1}$ et $T_{(1,2),2}$ celles associées aux arêtes allant de 1 à 2.

Soit f une isométrie de X telle que pour tout $1 \leq i \leq n$ $J_{2i} = f(J_i)$ et J_i sont disjoints. On définit alors la construction graphe-dirigée suivante.

$J_1, J_2 = J_{2_1}, J_{2_2}, J_3, \dots, J_n$ est un ensemble de compacts sans chevauchements et d'intérieurs non vide. On note e et f les deux arêtes de 1 à 2 dans G : $T_{(1,2),1}$ et $T_{(1,2),2}$ leurs sont respectivement associées. Pour tout $1 \leq i \leq n$, I_i désigne l'ensemble des arêtes entrantes dans le sommet i de G . On note $I_2^1 = I_2 \setminus \{f\}$, $I_2^2 = \{f\}$ et $I_i^1 = I_i$ si $i \neq 2$: \mathcal{P} est la partition de E_G résultante. Le nouveau graphe de construction $G_{22} = G^{[\mathcal{P}]}$ est l'éclatement de G selon \mathcal{P} .

G_{22} a pour sommets $1, 2_1, 2_2, 3, \dots, n$; la similitude associée à une arête allant de i à j , où $i, j \neq 2_1$ et $i, j \neq 2_2$, dans G_{22} est $T_{(i,j)}$ (la même que celle de G).

Il n'y a qu'une seule arête de 1 à 2_1 et on lui associe la similitude $T_{(1,2_1)} = T_{(1,2),1}$. Les similitudes associées aux arêtes de i à 2_1 , avec $i \neq 1$ sont $T_{(i,2_1)} = T_{(i,2)}$. Une arête de 2_1 à j a $T_{(2_1,j)} = T_{(2,j)}$ pour similitude associée.

Le sommet 2_2 n'a qu'une seule arête entrante et elle vient de 1 ; la similitude associée est $T_{(1,2_2)} = T_{(1,2),2} \circ f^{-1}$. Une arête de 2_2 à j a $T_{(2_2,j)} = f \circ T_{(2,j)}$ pour similitude associée.

G_{22} n'est pas un multi-graphe. On peut donc appliquer les théorèmes principaux à cette construction. Notamment, il existe un unique vecteur de compacts $(K_1, K_{2_1}, K_{2_2}, K_3, \dots, K_n)$ de $J_1 \times J_{2_1} \times J_{2_2} \times \prod_{i=3}^n \mathcal{K}(J_i)$ vérifiant, pour tout i ,

$$K_i = \bigcup_{(i,j) \in G_{22}} T_{i,j}(K_j).$$

De plus, par construction, $K_{2_1} = K_2$ et $K_{2_2} = f(K_2)$. On note $K_0 = K_1 \cup K_{2_1} \cup K_{2_2} \cup \left(\bigcup_{i=3}^n K_i \right)$.

On revient à la construction utilisant le multi-graphe G . On peut maintenant affirmer que le vecteur de compact (K_1, K_2, \dots, K_n) de $\prod_{i=1}^n \mathcal{K}(J_i)$ vérifie, pour tout i ,

$$K_i = \bigcup_{(i,j) \in G} T_{i,j}(K_j).$$

L'unicité de ce vecteur est assuré par l'unicité du vecteur de la construction utilisant G_{22} . On note $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$.

En ce qui concerne la dimension, puisque $K_{2_2} = f(K_2)$ avec f une isométrie, alors $\dim(K_{2_2}) = \dim(K_2)$. Il nous suffit alors de se reporter à la propriété 5.1.1 pour conclure que $\dim(K) = \dim(K_0)$. On rejoint ainsi les résultats du paragraphe 1.2.3 (page 33).

Pour conclure sur la validité des constructions multi-graphe-dirigées, il nous reste à remarquer que tout multi-graphe peut être transformé, par une série d'éclatements élémentaires comme celui que nous venons de décrire, en un graphe (i.e non multi-graphe).

Matrice d'incidence et multi-graphe

Le paragraphe précédent nous permet de calculer la dimension de l'objet construit en passant par une construction graphe-dirigée plus "compliquée" (au sens du nombre d'état du graphe); cela signifie notamment qu'on étudiera le rayon spectral d'une matrice plus grande. Le but de ce paragraphe est de définir correctement une matrice d'incidence pondérée pour un multi-graphe, afin de pouvoir calculer son rayon spectral, et obtenir ainsi la dimension de l'invariant de construction.

Si G est le multi-graphe d'une construction graphe-dirigée. A chaque arête est associée une similitude $T_{(i,j),k}$ de ratio $t_{(i,j),k}$. On note M_G la matrice d'incidence de G et définie comme en 1.2.3 (page 33) :

$$M_G(i, j) = \sum_{e \in O_i \cap I_j} p(e)$$

où O_i est l'ensemble des arêtes sortantes de i , I_j est l'ensemble des arêtes entrantes dans j , et $p(e)$ est le ratio de la similitude associée à e .

La **matrice d'incidence pondérée** par α de G est notée $M_G(\alpha)$, où

$$M_G(\alpha)(i, j) = \sum_{e \in O_i \cap I_j} (p(e))^\alpha.$$

Il faut noter que généralement, $M_G(\alpha)(i, j) \neq (M_G(i, j))^\alpha$.

5.2 Un espace métrique adapté

5.2.1 Produit libre de copies de \mathbb{R}

$\mathbb{R} * \mathbb{R}$ désignant le produit libre de deux copies de \mathbb{R} , on note, pour k un entier naturel, \mathcal{R}^k le produit libre $\mathbb{R} * \dots * \mathbb{R}$ de k copies de \mathbb{R} .

Propriétés 5.2.1 \mathcal{R}^k est un groupe dans lequel tout élément t (différent de l'origine) a une unique écriture réduite (finie) $x_0^{t_0} x_1^{t_1} \dots x_q^{t_q}$, avec

- pour $0 \leq i \leq q$, $0 \leq x_i \leq k - 1$ et t_i est un réel non nul,
- pour $0 \leq i \leq q - 1$, $x_i \neq x_{i+1}$,
- l'origine est notée O .

Dans la suite, on se permettra souvent de confondre un point de \mathcal{R}^k avec une de ces écritures (pas forcément réduites).

On définit alors \mathcal{R}^∞ l'ensemble constitué des mots $x_0^{t_0} x_1^{t_1} \dots x_q^{t_q}$ ($q > 0$) vérifiant les propriétés ci-dessus, où les x_i peuvent prendre n'importe quelle valeur de \mathbb{N} , et de l'origine. Cette notation distingue implicitement les copies de \mathbb{R} , bien qu'elles jouent le même rôle; la copie j sera noté \mathbb{R}_j . Désormais, lorsqu'on fait référence à \mathcal{R}^k sans plus de précisions, k peut prendre toutes les valeurs de \mathbb{N}^* ou ∞ .

On définit la distance d invariante par multiplication à gauche sur \mathcal{R}^k telle que tout point $x_0^{t_0} x_1^{t_1} \dots x_q^{t_q}$ (en écriture réduite) est à distance $|t_0| + |t_1| + \dots + |t_q|$ de l'origine. L'élément inverse de $t = x_0^{t_0} x_1^{t_1} \dots x_n^{t_n}$ est l'élément $t^{-1} = x_n^{-t_n} \dots x_1^{-t_1} x_0^{-t_0}$. Si s et t sont deux éléments de \mathcal{R}^k , on obtient de l'invariance par multiplication à gauche que $d(s, t) = d(O, s^{-1}t)$; l'écriture réduite de $s^{-1}t$ permet alors d'obtenir la distance de s à t . \mathcal{R}^k muni de cette distance est un arbre réel. En particulier, il n'existe qu'un unique arc reliant deux points quelconques de \mathcal{R}^k . On appellera souvent l'arc entre deux points s et t un intervalle ou segment de \mathcal{R}^k et on le notera $[s, t]$.

Définitions 5.2.2 On note Λ_k l'ensemble des intervalles fermés "orientés" de \mathcal{R}^k d'une des formes suivantes :

- $[x_0^{t_0} \dots x_{n-1}^{t_{n-1}} x_n^{s_n}, x_0^{t_0} \dots x_{n-1}^{t_{n-1}} x_n^{t_n}]$, $s_n \neq t_n$
- $[x_0^{t_0} \dots x_n^{t_n}, x_0^{t_0} \dots x_n^{t_n} x_{n+1}^{t_{n+1}}]$
- $[x_0^{t_0} \dots x_n^{t_n} x_{n+1}^{t_{n+1}}, x_0^{t_0} \dots x_n^{t_n}]$

On dira de ces intervalles qu'ils sont **inclus dans une copie de \mathbb{R}** ; le premier est inclu dans \mathbb{R}_{x_n} , les deux autres sont inclus dans $\mathbb{R}_{x_{n+1}}$.

Le terme "orienté" signifie qu'on distingue l'intervalle $[t, s]$ de l'intervalle $[s, t]$ dans Λ_k . Λ_k est l'ensemble des intervalles "orientés" inclus dans une copie de \mathbb{R} .

Définition 5.2.3 Soit ζ_α une application de Λ_k dans Λ_k telle que

$$\zeta_\alpha([O, 0^1]) = [x_0^{t_0} \dots x_{n-1}^{t_{n-1}} x_n^{s_n}, x_0^{t_0} \dots x_{n-1}^{t_{n-1}} x_n^{t_n}].$$

Dans le cadre de cette définition, on autorise les cas où $s_n = 0$ ou (exclusif) $t_n = 0$. On dit que ζ_α est une **similitude de Λ_k** si elle vérifie, pour tout $[s, t] \in \Lambda_k$ où $s^{-1}t = j^p$ ($p \in \mathbb{R}^*$ et $0 \leq j \leq k-1$ si k fini et $j \in \mathbb{N}$ sinon),

$$\zeta_\alpha([s, t]) = [s', t'] = [sy_0^{pt_0} \dots y_{n-1}^{pt_{n-1}} y_n^{ps_n}, sy_0^{pt_0} \dots y_{n-1}^{pt_{n-1}} y_n^{pt_n}]$$

avec, pour tout $0 \leq i \leq n$, $y_i - x_i = j[k]$ (ces écritures ne sont pas forcément réduites).

Le rapport $\frac{d(s', t')}{d(s, t)}$ est indépendant de l'intervalle $[s, t]$; c'est le **ratio** de la similitude.

Propriété 5.2.4 Donner l'image de $[O, 0^1]$ suffit à définir une similitude de Λ_k de manière unique.

5.2.2 Complété métrique de \mathcal{R}^k

On notera $\overline{\mathcal{R}^k}$ le complété métrique de \mathcal{R}^k . En plus de \mathcal{R}^k , $\overline{\mathcal{R}^k}$ contient tous les mots $t = x_0^{t_0} x_1^{t_1} \dots x_n^{t_n} \dots$ infinis à droite où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_0^{t_0} \dots x_n^{t_n} \in \mathcal{R}^k$, et tels que $\sum_{n \geq 0} |t_n|$ existe

et est finie. $\overline{\mathcal{R}^k}$ est un arbre réel.

Si s est un point de \mathcal{R}^k , alors $\overline{\mathcal{R}^k} \setminus \{s\}$ est composée de $2k$ composantes connexes si k est fini, et une infinité sinon ; on notera $Cn_s(t)$ celle qui contient le point t . Si s est un point de $\overline{\mathcal{R}^k} \setminus \mathcal{R}^k$ alors $\overline{\mathcal{R}^k} \setminus \{s\}$ est connexe.

Définition 5.2.5 Si s et t sont deux points de $\overline{\mathcal{R}^k}$, on note

$$Cn(s, t) = (Cn_s(t) \cap Cn_t(s)) \cup \{s, t\}.$$

Distance de Hausdorff. On munit l'ensemble des parties de $\overline{\mathcal{R}^k}$ de la distance de Hausdorff associée à d (cf. définition 5.0.7). Cette distance est notée δ . $(\overline{\mathcal{R}^k}, d)$ étant complet, l'ensemble des compacts non vide de $\overline{\mathcal{R}^k}$ est complet pour δ .

5.2.3 Ensemble des arbres réels compacts

Définition 5.2.6 On notera enfin \mathcal{F}^k l'ensemble des compacts connexes non vides de $\overline{\mathcal{R}^k}$.

Les éléments de \mathcal{F}^k sont des arbres réels.

Proposition 5.2.7 (\mathcal{F}^k, δ) est complet quel que soit $k \in \mathbb{N}^*$, ou $k = \infty$.

Preuve Soit $(T_n)_n$ une suite de Cauchy d'éléments de \mathcal{T}^k . Tout élément de \mathcal{T}^k étant un compact de $\overline{\mathcal{R}^k}$, et l'ensemble des compacts de $\overline{\mathcal{R}^k}$ étant complet pour la métrique de Hausdorff, il existe un compact T limite de la suite $(T_n)_n$.

Il s'agit maintenant de vérifier que T est connexe. On suppose qu'il ne l'est pas ; il existe P_1, P_2 deux compacts de $\overline{\mathcal{R}^k}$ et $\epsilon > 0$ tels que $T = P_1 \cup P_2$ et $\delta([P_1]_\epsilon, [P_2]_\epsilon) > 0$. Il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\delta(T_n, T) < \epsilon$. On déduit de la connexité des T_n que pour tout $n \geq n_0$, $T_n \in [P_1]_\epsilon$ ou (exclusif) $T_n \in [P_2]_\epsilon$, ce qui est impossible. \square

5.3 Substitutions sur des arbres réels

5.3.1 Substitutions

Soit A un alphabet. Pour tout élément a de A , soit j_a un élément de \mathbb{N}^* , et soit $\Theta = \{(aj); a \in A, 1 \leq j \leq j_a\}$ un nouvel alphabet. On définit un ensemble $\{\zeta_{aj}; a \in A, 1 \leq j \leq j_a\}$ de similitudes de Λ_k de ratios r_{aj} vérifiant, pour tout $a \in A$:

- $0 < r_{aj}$ pour tout $1 \leq j \leq j_a$,
- $\bigcup_{1 \leq j \leq j_a} \zeta_{aj}([O, 0^1])$ est un élément de \mathcal{T}^k qui contient les points O et 0^1 ,
- il existe $1 \leq i, j \leq j_a$ tels que
 - $\zeta_{ai}([O, 0^1]) = [s_{ai}, t_{ai}]$ et $O = s_{ai}$ ou $O = t_{ai}$,
 - $\zeta_{aj}([O, 0^1]) = [s_{aj}, t_{aj}]$ et $0^1 = s_{aj}$ ou $0^1 = t_{aj}$,
- pour tout $1 \leq i < j \leq j_a$, $\zeta_{ai}([O, 0^1])$ et l'intérieur de $\zeta_{aj}([O, 0^1])$ sont disjoints et inversement.

On note maintenant ζ_a la fonction de Λ_k dans \mathcal{T}^k définie par

$$\zeta_a([O, 0^1]) = \bigcup_{1 \leq j \leq j_a} \zeta_{aj}([O, 0^1]).$$

Remarque 5.3.1 Si $[s, t]$ est un élément de Λ_k , on peut également le voir comme une partie de $\overline{\mathcal{R}^k}$. On confondra les notations en gardant à l'esprit que $[s, t]$ et $[t, s]$ sont différents en tant qu'éléments de Λ_k , mais égaux en tant que parties de $\overline{\mathcal{R}^k}$.

Remarque 5.3.2 L'intervalle J est inclu dans $\zeta_a(J)$ quel que soit $J \in \Lambda_k$.

Sous-shift de type fini associé à la substitution. On considère un sous-shift de type fini Σ_ζ sur l'alphabet Θ vérifiant :

$$\forall (aj) \in \Theta, \exists! b \in A ; \forall 1 \leq i \leq j_b, (aj)(bi) \in \Sigma_\zeta.$$

Pour toute lettre (aj) de Θ , on note C_{aj} le cylindre constitué des mots de Σ_ζ commençant par la lettre (aj) et $C_a = \bigcup_{1 \leq j \leq j_a} C_{aj}$.

Enfin, on suppose l'existence d'un entier $h \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout mot $x_1 x_2 \dots x_h$ de Σ_ζ , si $\zeta_{x_h} \circ \dots \circ \zeta_{x_1}([O, 0^1]) = [s, t]$, alors $d(s, t) < 1$. La propriété importante est la stricte inégalité.

Définition 5.3.3 La donnée du sous-shift de type fini et des applications $\zeta_{a_1}, \dots, \zeta_{a_{j_a}}$ pour tout élément de l'alphabet A constitue la **substitution d'arbre réel** notée ζ .

5.3.2 Sous-shift de type fini d'une substitution

ζ est une substitution sur un alphabet $\Theta = \{(aj); a \in A, 1 \leq j \leq j_a\}$ où A est également un alphabet. Σ_ζ est le sous-shift de type fini associé à la substitution. Pour fixer les idées, on "ordonne" Θ en écrivant : $\Theta = \{s_1, s_2, \dots, s_q\}$ où $q = \sum_{a \in A} j_a$.

On définit alors la matrice $M_\zeta = [m_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq q}$ où $m_{i,j}$ vaut 1 si $s_i s_j$ est un mot de Σ_ζ et 0 sinon. La matrice dépend évidemment de l'ordre donné à Θ ; nous ne nous intéressons cependant qu'au spectre de cette matrice, qui n'en dépend pas.

Propriété 5.3.4 M_ζ est de rang au plus $\#(A)$.

Cette propriété découle directement de la définition du sous-shift de type fini ;

$$\forall (aj) \in \Theta, \exists ! b \in A ; \forall 1 \leq i \leq j_b, (aj)(bi) \in \Sigma_\zeta.$$

On note L_a le vecteur ligne de longueur q dont la k -ième coordonnée est 1 s'il existe $h, 1 \leq h \leq j_a$ tel que $s_k = ah$ et 0 sinon. Les éléments L_a sont linéairement indépendants et chaque vecteur ligne $[m_{p,1}, m_{p,2}, \dots, m_{p,q}]$ de M_ζ est égal à un des L_a .

5.3.3 Substitutions bornées et simplement bornées

Soient $A = \{a\}$, $\Theta = \{(a1), (a2), (a3)\}$ et ζ la substitution de \mathcal{R}^2 définie par

- $\zeta_{a1}([O, 0^1]) = [O, 0^{\frac{3}{4}}]$,
- $\zeta_{a2}([O, 0^1]) = [0^{\frac{3}{4}}, 0^1]$,
- $\zeta_{a3}([O, 0^1]) = [O, 1^{\frac{1}{2}}]$,
- Σ_ζ est le full shift sur Θ .

Par définition des similitudes,

$$\zeta_{a3} \circ \zeta_{a3}([O, 0^1]) = [O, 0^{\frac{1}{4}}] \subset \zeta_{a1} \circ \zeta_{a1}([O, 0^1]) = [O, 0^{\frac{9}{16}}].$$

On essaiera par la suite d'éviter ce genre de chevauchements. On se reporte à la définition des similitudes (5.2.3). On constate que cette définition dépend de l'espace \mathcal{R}^k choisi. Ainsi, si on définit la substitution ζ ci-dessus dans \mathcal{R}^3 , on aura notamment $\zeta_{a3} \circ \zeta_{a3}([O, 0^1]) = [O, 2^{\frac{1}{4}}]$. Evidemment, dans ce cas, le problème va se reproduire ; il va même se reproduire quel que soit le \mathcal{R}^k choisi si k est fini.

On remarque que si une substitution est définie dans \mathcal{R}^k (k fini), alors on peut la définir dans \mathcal{R}^h pour tout $h \geq k$ et dans \mathcal{R}^∞ ; on définit donc les substitutions bornées.

Définition 5.3.5 Soit ζ une substitution sur \mathcal{R}^k . On dit que ζ est une substitution **bornée par k** si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout couple $(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n)$ de mots distincts de Σ_ζ , $\zeta_{x_n} \circ \dots \circ \zeta_{x_1}([O, 0^1])$ et $\zeta_{y_n} \circ \dots \circ \zeta_{y_1}([O, 0^1])$ sont d'intérieurs disjoints. ζ est **simplement bornée par k** , si $\zeta_a([O, 0^1]) \subset Cn(O, 0^1)$ quel que soit $a \in A$.

Par la suite, si ζ est bornée par k , on préférera définir ζ dans l'espace \mathcal{R}^h , où h est le plus petit entier pour lequel ζ est encore bornée par h . Si ζ n'est bornée par aucun entier, on définira ζ dans \mathcal{R}^∞ . On note cependant que les résultats qui suivent restent valides même si on ne choisit pas correctement l'espace de définition.

5.3.4 Propriétés des substitutions

ζ est une substitution d'arbre réel définie dans \mathcal{R}^k , où k est soit un entier ≥ 1 , soit ∞ . On utilise les mêmes notations que précédemment pour le sous-shift de type fini et les similitudes qui constituent ζ .

Proposition 5.3.6 *Soit a une lettre de A , J_0 un élément de Λ_k , et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_{an} = \bigcup_{x_1 \dots x_n \in C_a} \zeta_{x_n} \circ \dots \circ \zeta_{x_1}(J_0)$. Alors $(J_{an})_n$ est une suite de Cauchy de \mathcal{F}^k .*

Remarque 5.3.7 *La remarque 5.3.2 étant vraie pour tout a , on en déduit que $J_{an} \subset J_{a(n+1)}$. De plus, J_{an} est connexe par définition.*

Preuve *On suppose J_0 de diamètre l . r_{aj} est le ratio de la similitude ζ_{aj} . d est la distance sur \mathcal{R}^k et δ est la distance de Hausdorff associée.*

On note $r = \max_{(aj) \in \Theta} (r_{aj})$. Par définition des substitutions, il existe un entier h vérifiant :

$$\forall x_1 x_2 \dots x_h \in \Sigma_\zeta, \zeta_{x_h} \circ \dots \circ \zeta_{x_1}([O, 0^1]) = [s, t] \text{ avec } d(s, t) < 1;$$

on se permettra donc de supposer que $r < 1$.

Soit $x_1 \dots x_n \in \Sigma_\zeta$; quel que soit le mot $x_1 \dots x_n x_{n+1}$ de Σ_ζ , $\zeta_{x_{n+1}} \circ \dots \circ \zeta_{x_1}(J_0)$ est de diamètre inférieur à lr^{n+1} . Si α est l'élément de A tel que pour tout $1 \leq j \leq j_\alpha$, $x_1 \dots x_n(\alpha j)$ est un élément de Σ_ζ alors en notant $j_{\max} = \max_{a \in A} j_a$, l'inégalité

$$\delta(\zeta_{x_n} \circ \dots \circ \zeta_{x_1}(J_0), \zeta_\alpha \circ \zeta_{x_n} \circ \dots \circ \zeta_{x_1}(J_0)) \leq j_{\max} lr^{n+1}.$$

est vérifiée (5.3.2), ce qui donne l'inclusion

$$J_{a(n+1)} \subset [J_{an}]_{j_{\max} lr^{n+1}}$$

On déduit finalement de la remarque 5.3.7 que

$$\delta(J_{an}, J_{a(n+1)}) \leq j_{\max} lr^{n+1}.$$

La suite $(J_{an})_n$ est donc une suite de Cauchy d'éléments de \mathcal{F}^k . \square

Théorème 5.3.8 *Soit ζ une substitution de \mathcal{R}^k (k entier ≥ 1 ou ∞). Pour tout $a \in A$, et pour tout J de Λ_k , on note $J_{an} = \bigcup_{x_1 x_2 \dots x_n \in C_a} \zeta_{x_n} \circ \dots \circ \zeta_{x_2} \circ \zeta_{x_1}(J)$. Alors il existe un arbre réel non vide compact de \mathcal{F}^k ; $J_a = \lim_{n \rightarrow +\infty} J_{an}$.*

Preuve *La proposition 5.3.6 assure que $(J_{an})_n$ est une suite de Cauchy de \mathcal{F}^k ; par la proposition 5.2.7, (\mathcal{F}^k, δ) est complet et $J_a \in \mathcal{F}^k$. \square*

Si ζ est une substitution simplement bornée, alors pour tout $a \in A$ et $[s, t] \in \Lambda_k$, $\zeta_a([s, t]) \subset Cn(s, t)$. De plus, $Cn(s, t)$ est fermé.

Propriété 5.3.9 *Soit ζ une substitution simplement bornée et $[s, t]$ un élément de Λ_k . Alors :*

$$\forall a \in A, \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{x_1 \dots x_n \in C_a} \zeta_{x_n} \circ \dots \circ \zeta_{x_1}([s, t]) \subset Cn(s, t)$$

5.4 Etude des compacts limites

Le but de cette section est de montrer que le vecteur de compacts associé à une substitutions d'arbre réel est l'invariant d'une construction graphe dirigée dont nous donnons la définition.

Dans cette section, ζ sera une substitution d'arbre réel de \mathcal{R}^k sur un alphabet A , Θ est l'alphabet $\{(aj); a \in A, 1 \leq j \leq j_a\}$, Σ_ζ est le sous-shift de type fini de Θ associé à ζ , M_ζ sa matrice d'incidence, et $C_a = \bigcup_{1 \leq j \leq j_a} C_{aj}$. On supposera que l'espace \mathcal{R}^k est correctement choisi (cf. paragraphe 5.3.3).

Définition 5.4.1 On définit le **graphe pondéré** H_ζ associé au shift Σ_ζ :

- les éléments de Θ sont les sommets de H_ζ .
- il y a une arête de (ai) à (bj) si $(ai)(bj) \in \Sigma_\zeta$.
- si e est l'arête de (ai) à (bj) , alors e est pondérée par $p(e) = \zeta_{bj}$.

On note G_ζ l'amalgamation (entrante pondérée) de H_ζ selon la partition maximale. La matrice d'incidence de G_ζ est $M_{G,\zeta}$.

Propriété 5.4.2 Le nombre de sommets de G_ζ est inférieur ou égal au cardinal de A .

Le nombre d'arêtes de G_ζ est inférieur ou égal au cardinal de Θ .

Soit \mathcal{P} la partition maximale de H_ζ , et $P \in \mathcal{P}$. Pour un certain $a \in A$, tout élément de P a exactement j_a arêtes sortantes, et ces arêtes sont colorées $\zeta_{a1}, \dots, \zeta_{aj_a}$. On appelle alors a le sommet de G_ζ obtenu après amalgamation des sommets de P .

On suppose que $\{1, \dots, p\} \subset A$ est l'ensemble des sommets de G_ζ et on choisit p éléments $[s_1, t_1], \dots, [s_p, t_p]$ de Λ_k , vérifiant pour tout $1 \leq i \leq j \leq p$, $d(s_i, t_i) = d(s_j, t_j) > 0$. On construit les p compacts K_1, K_2, \dots, K_p de \mathcal{R}^k définis, pour $1 \leq i \leq p$, par

$$K_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\bigcup_{x_1 x_2 \dots x_n \in C_i} \zeta_{x_n} \circ \dots \circ \zeta_{x_2} \circ \zeta_{x_1}([s_i, t_i]) \right).$$

On supposera que les intervalles $[s_i, t_i]$ sont assez éloignés pour que les K_i soient deux à deux disjoints.

Définition 5.4.3 Pour toute arête e de G_ζ , si $i(e) = a$, $t(e) = b$, $p(e) = \zeta_{aj}$, on définit la fonction T_{aj}^b comme l'unique homothétie de \mathcal{R}^k vérifiant

$$T_{aj}^b(K_b) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\bigcup_{x_1 x_2 \dots x_n \in C_b} \zeta_{x_n} \circ \dots \circ \zeta_{x_2} \circ \zeta_{x_1}(\zeta_{aj}([s_a, t_a])) \right).$$

On remplace les colorations des arêtes de G_ζ ; si une arête de a vers b était colorée ζ_{aj} , elle est maintenant colorée T_{aj}^b . On remarque que le ratio de T_{aj}^b est r_{aj} (celui de ζ_{aj}).

Proposition 5.4.4 $\{K_1, \dots, K_p\}$ est l'unique vecteur de compacts de $\prod_{a=1}^p \mathcal{K}(K_a)$ tel que pour tout a ,

$$K_a = \bigcup_{1 \leq j \leq j_a} T_{aj}^{b_j}(K_{b_j}) \text{ où pour tout } 1 \leq j \leq j_a, (a, b_j) \text{ est une arête colorée } T_{aj}^{b_j}.$$

Preuve L'égalité $K_a = \bigcup_{1 \leq j \leq j_a} T_{aj}^{b_j}(K_{b_j})$ est vérifiée pour tout a par définition des $T_{aj}^{b_j}$. On a donc défini une construction (multi-)graphe-dirigée et on peut conclure. \square

On notera $K = \bigcup_{i=1}^p K_i$.

Soit $G_\zeta(\alpha)$ le graphe pondéré défini par :

- l'ensemble des sommets de $G_\zeta(\alpha)$ est celui des sommets de G_ζ ,
- pour toute arête e de G_ζ , $i(e) = a$, $t(e) = b$, $p(e) = T_{aj}^b$, l'arête e_α , $i(e_\alpha) = a$, $t(e_\alpha) = b$, $p(e) = r_{aj}^\alpha$ (où r_{aj} est le ratio de T_{aj}^b) est une arête de $G_\zeta(\alpha)$.

$G_\zeta(\alpha)$ est alors un graphe à pondération réelle, et on note $M_{G,\zeta}(\alpha)$ sa matrice d'incidence (pondérée), comme définie en 1.2.3 (page 32). Pour tout sous-graphe F de G_ζ fortement connexe, on définit $F(\alpha)$ de la même manière : $M_F(\alpha)$ est sa matrice associée. On note alors α_F l'unique réel tel que le rayon spectral de $M_F(\alpha_F)$ soit 1.

Alors la dimension de Hausdorff de K est $\alpha = \max\{\alpha_F; F \in SC(G_\zeta)\}$ où $SC(G_\zeta)$ est l'ensemble des sous-graphes fortement connexes de G_ζ .

On déduit la propriété suivante de la propriété 5.1.1.

Propriété 5.4.5 *Si la matrice d'incidence $M_{G,\zeta}$ de G_ζ est primitive, alors les dimensions des compacts K_i et celle de K sont égales.*

On pourra se reporter à la propriété 1.2.10 (page 30) et à la proposition 1.2.11 (page 30) pour une condition sur la matrice d'incidence de Σ_ζ .

5.4.1 Exemple

Soit $A = \{a, b\}$ un alphabet, et ζ une substitution d'arbre réel sur \mathcal{R}^2 . On a représenté sur la figure 5.2 les images par ζ_a et ζ_b d'un élément X de Λ_2 . Les fonctions ζ_a et ζ_b sont définies par $\zeta_a(X) = \bigcup_{1 \leq i \leq 5} \zeta_{ai}(X)$ et $\zeta_b(X) = \bigcup_{1 \leq j \leq 3} \zeta_{bj}(X)$, où les ζ_{ai} et ζ_{bj} sont des similitudes de Λ_2 de ratios r_{ai} et r_{bj} telles que

$$\begin{aligned} \zeta_{a1}([O, 0^1]) &= [O, 0^{\frac{1}{3}}] \\ \zeta_{a2}([O, 0^1]) &= [0^{\frac{1}{3}}, 0^{\frac{2}{3}}] \\ \zeta_{a3}([O, 0^1]) &= [0^1, 0^{\frac{2}{3}}] \\ \zeta_{a4}([O, 0^1]) &= [0^{\frac{1}{3}} 1^{\frac{1}{3}}, 0^{\frac{1}{3}}] \\ \zeta_{a5}([O, 0^1]) &= [0^{\frac{2}{3}}, 0^{\frac{2}{3}} 1^{-\frac{1}{3}}] \\ \zeta_{b1}([O, 0^1]) &= [0^{\frac{1}{2}}, O] \\ \zeta_{b2}([O, 0^1]) &= [0^{\frac{1}{2}}, 0^1] \\ \zeta_{b3}([O, 0^1]) &= [0^{\frac{1}{2}}, 0^{\frac{1}{2}} 1^{-\frac{1}{4}}] \end{aligned}$$

Suivant la figure 5.2, on a

$$\begin{aligned} \zeta_{a1}(X) &= [x, z_1] & \zeta_{a2}(X) &= [z_1, z_3] & \zeta_{a3}(X) &= [y, z_3] \\ \zeta_{a4}(X) &= [z_2, z_1] & \zeta_{a5}(X) &= [z_3, z_4] & & \\ \zeta_{b1}(X) &= [z_5, x] & \zeta_{b2}(X) &= [z_5, y] & \zeta_{b3}(X) &= [z_5, z_6] \end{aligned}$$

De plus, $r_{a1} = r_{a2} = r_{a3} = r_{a4} = r_{a5} = \frac{1}{3}$, $r_{b1} = r_{b2} = \frac{1}{2}$, et $r_{b3} = \frac{1}{4}$.

La matrice du shift de type fini est donnée ci-dessous.

$$M_\zeta = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & a1 & a2 & a3 & a4 & a5 & b1 & b2 & b3 \end{array} \\ \begin{array}{l} a1 \\ a2 \\ a3 \\ a4 \\ a5 \\ b1 \\ b2 \\ b3 \end{array} \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

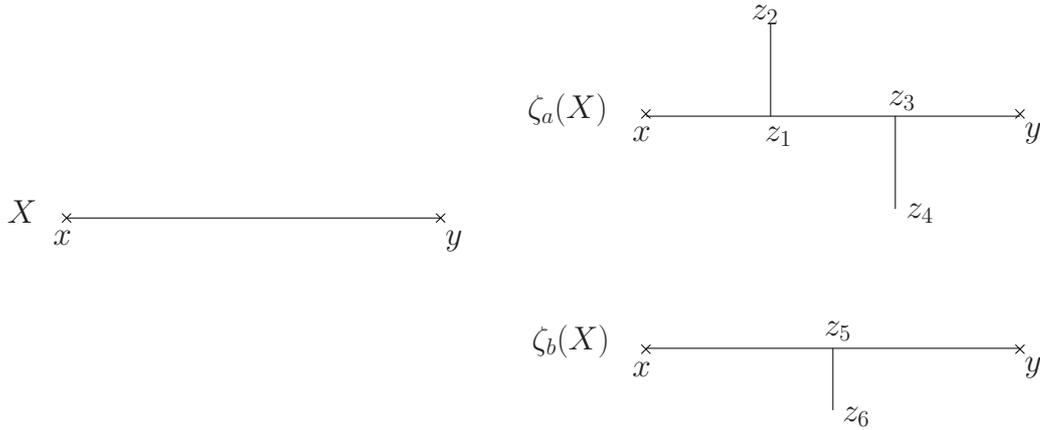
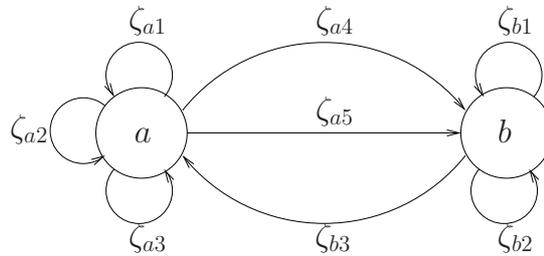


FIG. 5.2: Exemple de substitution d'arbre réel.

ζ est maintenant complètement définie. On note alors K_a , K_b , et K les compacts

- $K_a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\bigcup_{x_1 x_2 \dots x_n \in C_a} \zeta_{x_n} \circ \dots \circ \zeta_{x_2} \circ \zeta_{x_1}([0, 0^1]) \right)$,
- $K_b = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\bigcup_{x_1 x_2 \dots x_n \in C_b} \zeta_{x_n} \circ \dots \circ \zeta_{x_2} \circ \zeta_{x_1}([0^2, 0^3]) \right)$,
- $K = K_a \cup K_b$.

Le graphe H_ζ associé au sous-shift est un graphe à 8 sommets et 32 arêtes, c'est-à-dire un peu lourd à représenter. Par ailleurs, puisque c'est un graphe et non un multi-graphe, sa matrice d'incidence, M_ζ suffit à le décrire; le poids d'une arête entre (ai) et (bj) sera ζ_{bj} . On représente donc directement le graphe G_ζ , amalgamation de H_ζ selon la partition maximale $\mathcal{P}_m = \{\{a1, a2, a3, b3\}, \{a4, a5, b1, b2\}\}$.

FIG. 5.3: Amalgamation maximale de H_ζ .

Le graphe $G_\zeta(\alpha)$ est le même que G_ζ à pondération près; si une arête est pondérée par ζ_{ai} dans G_ζ , elle sera pondérée par r_{ai}^α dans $G_\zeta(\alpha)$. On en déduit la matrice d'incidence de $G_\zeta(\alpha)$.

$$M_{G,\zeta}(\alpha) = \begin{bmatrix} r_{a1}^\alpha + r_{a2}^\alpha + r_{a3}^\alpha & r_{a4}^\alpha + r_{a5}^\alpha \\ r_{b3}^\alpha & r_{b1}^\alpha + r_{b2}^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\left(\frac{1}{3}\right)^\alpha & 2\left(\frac{1}{3}\right)^\alpha \\ \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha & 2\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha \end{bmatrix}$$

G_ζ est fortement connexe et le polynôme caractéristique de $M_{G,\zeta}(\alpha)$ est

$$X^2 - \left(3\left(\frac{1}{3}\right)^\alpha + 2\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha\right)X + 6\left(\frac{1}{6}\right)^\alpha - 2\left(\frac{1}{12}\right)^\alpha.$$

Si $\Phi(\alpha)$ est le rayon spectral de $M_{G,\zeta}(\alpha)$, le théorème 5.1.3 (page 74) assure l'existence d'un unique β tel que $\Phi(\beta) = 1$. β est la dimension de K . β est l'unique réel vérifiant

$$\frac{1}{2} \left(\left(3\left(\frac{1}{3}\right)^\beta + 2\left(\frac{1}{2}\right)^\beta\right) + \sqrt{\left(3\left(\frac{1}{3}\right)^\beta + 2\left(\frac{1}{2}\right)^\beta\right)^2 - 4\left(6\left(\frac{1}{6}\right)^\beta - 2\left(\frac{1}{12}\right)^\beta\right)} \right) = 1$$

Enfin, K_a et K_b sont également de dimension β .

5.5 Substitutions d'arbre simplicial et réalisations

5.5.1 Réalisations

Il sera parfois utile de définir une substitution d'arbre réel à partir d'une substitution d'arbre simplicial. On se donne un arbre simplicial $X = (V_X, E_X)$ fini de $\mathcal{S}(A)$, et on suppose que k est le degré maximal des sommets de X .

Définitions 5.5.1 Un arbre T de \mathcal{T}^k est une **réalisation** de X s'il existe une fonction injective $\nu : V_X \rightarrow \mathcal{R}^k$ telle que

- si $(x_1, x_2, a) \in E_X$, alors $[\nu(x_1), \nu(x_2)]$ est un élément de Λ_k ,
- si (x_1, x_2, a) et (y_1, y_2, b) sont deux arêtes distinctes de X , alors $[\nu(x_1), \nu(x_2)] \cap [\nu(y_1), \nu(y_2)] = \emptyset$,
- T est l'enveloppe convexe de $\nu(V_X)$.

ν est la **fonction de réalisation**.

Une substitution d'arbre réel ζ est une **réalisation** d'une substitution τ de $\mathcal{S}(A)$ si pour toute lettre $a \in A$,

- $\zeta_a([O, 0^1])$ est une réalisation de $\tau(X_a)$ (avec $X_a = (\{x_1, x_2\}, \{(x_1, x_2, a)\})$), avec $\nu_a(x_1) = O$ et $\nu_a(x_2) = 0^1$ (où ν_a est la fonction de réalisation de $\tau(X_a)$),
- j_a (le nombre de similitudes de Λ_k qui constituent ζ_a) est égale au cardinal de $E_{\sigma(X_a)}$,
- quel que soit $1 \leq j \leq j_a$, si $\zeta_{aj}([O, 0^1]) = [s, t]$ et que $(\nu_a^{-1}(s), \nu_a^{-1}(t), b) \in E_X$, alors pour tout $1 \leq i \leq j_b$, le mot $(aj)(bi)$ est un élément de Σ_ζ (et réciproquement).

Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $a \in A$, l'arbre $\bigcup_{x_1 x_2 \dots x_n \in C_a} \zeta_{x_n} \circ \dots \circ \zeta_{x_2} \circ \zeta_{x_1}([O, 0^1])$ est une réalisation de $\tau^n(X_a)$.

Si on reprend l'exemple du paragraphe précédent, ζ est une réalisation de la substitution τ définie sur $\mathcal{S}(\{a, b\})$ représentée sur la figure 5.4.

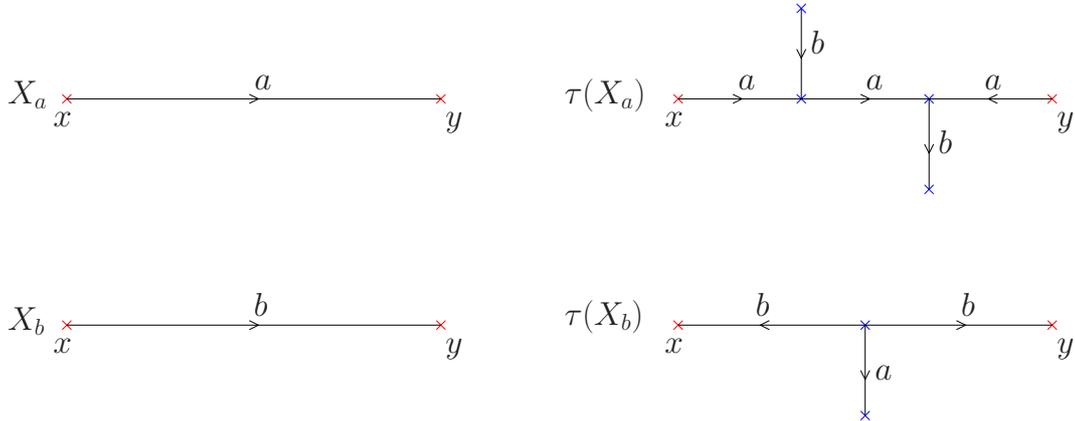


FIG. 5.4: Substitution d'arbre simplicial associée à ζ .

5.5.2 Choisir la bonne métrique

Lors de la réalisation d'une substitution, il faut notamment choisir les ratios des similitudes qui constituent la substitution d'arbre réel. On s'intéresse ici à une réalisation particulière (qui n'existera pas toujours). On se donne une substitution d'arbre simplicial τ de $\mathcal{S}(A)$ et une réalisation ζ . Par définition, $L_n = \bigcup_{x_1 x_2 \dots x_n \in C_a} \zeta_{x_n} \circ \dots \circ \zeta_{x_2} \circ \zeta_{x_1}([O, 0^1])$ est une réalisation de $\tau^n(X_a)$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$; on note ν_n la fonction de réalisation.

Définition 5.5.2 Une réalisation ζ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in A, \exists l_a; (y, z, a) \in E_{\tau^n(X_a)} \Rightarrow d(\nu(y), \nu(z)) = l_a$$

est dite **idéale**.

Soient $\zeta^{(1)}$ et $\zeta^{(2)}$ deux réalisations de τ , où pour tout $a \in A$, $\nu_a^{(1)}$ (resp. $\nu_a^{(2)}$) est la fonction de réalisation telle que $\zeta_a^{(1)}([0, 0^1])$ (resp. $\zeta_a^{(2)}([0, 0^1])$) est l'enveloppe convexe de $\nu_a^{(1)}(V_{\tau(X_a)})$ (resp. $\nu_a^{(2)}(V_{\tau(X_a)})$) (avec $X_a = (\{x_1, x_2\}, \{(x_1, x_2, a)\})$). On dit que deux réalisations $\zeta^{(1)}$ et $\zeta^{(2)}$ sont **isométriques** si pour tout $a \in A$, et pour toute arête (x, y, b) de $\tau(X_a)$, $d(\nu_a^{(1)}(x), \nu_a^{(1)}(y)) = d(\nu_a^{(2)}(x), \nu_a^{(2)}(y))$. On va donner une condition nécessaire et suffisante sur une substitution τ primitive, pour qu'il existe une unique (à isométrie près) réalisation idéale; on donnera également les ratios des similitudes de ζ .

Soit τ une substitution d'arbre simplicial de $\mathcal{S}(A)$. Pour tout $a \in A$, on note $X_a = (\{y, z\}, \{(y, z, a)\})$, et on définit l'application

$$\begin{aligned} \kappa & : A \cup \overline{A} \rightarrow A \\ & \quad a \mapsto a \quad \text{si } a \in A \\ & \quad \bar{a} \mapsto a \quad \text{si } \bar{a} \in \overline{A} \end{aligned}$$

On rappelle que pour tout arbre X de $\mathcal{S}(A)$, $\gamma_X : V_X \times V_X \rightarrow (A \cup \overline{A})^*$ est la fonction chemin de X (cf. paragraphe 4.1.1 page 60).

Définition 5.5.3 La **substitution tronc** de τ est la substitution (morphisme de monoïde) σ_τ définie pour tout $a \in A$ par

$$\sigma_\tau(a) = \kappa(\gamma_{\tau(X_a)}(y, z))$$

La **matrice tronc** de τ est la matrice d'incidence de σ_τ .

On rappelle qu'une substitution σ (morphisme de monoïde) est primitive sur un alphabet A si pour tout $a, b \in A$, il existe un entier k tel que b est une lettre du mot $\sigma^k(a)$.

Définition 5.5.4 Une substitution $\sigma : A \rightarrow A^*$ est dite **sous-primitive** s'il existe un unique ensemble $\alpha \subset A$ tel que

- la restriction $\sigma : \alpha \rightarrow \alpha^*$ est primitive,
- pour tout élément $a \in A \setminus \alpha$, il existe un entier k tel que $\sigma^k(a)$ est un mot de α^* .

La suite de ce paragraphe est consacré à démontrer le théorème suivant.

Théorème 5.5.5 Soit τ une substitution d'arbre simplicial primitive de $\mathcal{S}(A)$, et σ_τ sa substitution tronc. Il existe une unique (à isométrie près) réalisation idéale de τ si et seulement si σ_τ est sous-primitive.

Une extension du théorème de Perron-Frobenius

Soit $\sigma : A \rightarrow A^*$ une substitution sous-primitive sur un alphabet A et soit α l'ensemble maximal (pour l'inclusion) sur lequel σ est primitive. On note M_σ la matrice d'incidence de σ et $M_\sigma^{(\alpha)}$ la matrice d'incidence de la restriction de σ à α . Le théorème de Perron-Frobenius s'applique sur $M_\sigma^{(\alpha)}$ et on note λ la valeur propre dominante.

Propriété 5.5.6 λ est la valeur propre dominante de M_σ . λ est une valeur propre simple et admet un unique (à homothétie près) vecteur propre à gauche strictement positif.

Le vecteur ratios

τ est une substitution de $\mathcal{S}(A)$ et pour tout $a \in A$, on note j_a le nombre d'arêtes de $\tau(X_a)$, avec $X_a = (\{y, z\}, \{(y, z, a)\})$. Si ζ est une réalisation de τ , alors ζ est constituée des similitudes ζ_{aj} , $a \in A$ et $1 \leq j \leq j_a$ et on note r_{aj} leurs ratios.

On suppose que la substitution tronç σ_τ est sous-primitive et que λ est la valeur propre dominante de sa matrice d'incidence M_t . On suppose que $A = \{1, 2, \dots, d\}$; pour tout $1 \leq i \leq d$, on note $M_t(i)$ le vecteur obtenu en prenant la i -ème colonne de M_t et on définit le vecteur ratios V_i associé à i tel que

- V_i est un vecteur propre à gauche pour λ de la matrice tronç de τ ,
- $V_i M_t(i) = 1$.

Théorème 5.5.7 *Si τ est une substitution de $\mathcal{S}(A)$ primitive et que la substitution tronç σ_τ associée à τ est sous-primitive, alors ζ est une réalisation idéale si et seulement si pour tout $i \in A$, et pour tout $1 \leq j \leq j_i$, on a $r_{ij} = V_i(k)$, où k est l'unique lettre de A telle que $(ij)(k1) \in \Sigma_\zeta$.*

Par la suite, on note V la matrice dont la i -ème ligne est exactement V_i . L'élément de V à la ligne i colonne j sera noté λ_{ij} .

Preuve des théorèmes 5.5.5 et 5.5.7

On va montrer les théorèmes 5.5.5 et 5.5.7 en même temps. τ est toujours une substitution de $\mathcal{S}(A)$ primitive et ζ est une réalisation de τ . On suppose que σ_τ est sous-primitive. M_t est la matrice tronç, et V est la matrice définie précédemment. On commence par montrer que si $r_{ij} = \lambda_{ij}$ pour tout $i \in A$ et $1 \leq j \leq j_i$, alors ζ est idéale.

Pour cela, on va montrer la propriété (suffisante) suivante : si j_1, \dots, j_k sont des éléments de A , alors $\prod_{1 \leq h \leq k-1} \lambda_{j_h j_{h+1}} = \lambda^{-(k-2)} \lambda_{j_1 j_k}$. Il suffit de montrer que pour tout $j_1, j_2, j_3 \in A$, $\lambda_{j_1 j_2} \lambda_{j_2 j_3} = \lambda^{-1} \lambda_{j_1 j_3}$ et une éventuelle récurrence nous permettra de conclure. On commence par remarquer que pour tout $i \in A$, $V_i M_t(i) = 1 = \lambda \lambda_{ii}$ (puisque V_i est un vecteur propre à gauche pour λ). De plus, pour tout $i, j \in A$, $V_i = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{jj}} V_j$. On obtient ainsi, pour $j_1, j_2, j_3 \in A$,

- $V_{j_1} = \lambda \lambda_{j_1 j_3} V_{j_3}$,
- $V_{j_1} = \lambda \lambda_{j_1 j_2} V_{j_2} = \lambda \lambda_{j_1 j_2} \lambda \lambda_{j_2 j_3} V_{j_3}$,
- et finalement $\lambda_{j_1 j_2} \lambda_{j_2 j_3} = \lambda^{-1} \lambda_{j_1 j_3}$.

Il faut maintenant montrer que ζ est la seule (isométrie près) réalisation de τ . On a supposé la substitution τ primitive; quitte à travailler sur une puissance, on va en plus supposer que pour tout $i, j \in A$, il existe une arête colorée j dans $\tau(X_i)$ ($X_i = (\{y, z\}, \{(y, z, i)\})$). Une première remarque que l'on peut faire, est que si deux similitudes ζ_{ij_1} et ζ_{ij_2} sont telles qu'il existe un unique élément $k \in A$ pour lequel $(ij_1)(k1)$ et $(ij_2)(k1)$ sont des éléments de Σ_ζ , alors $r_{ij_1} = r_{ij_2}$; on note désormais η_{ik} ce coefficient. De plus, si ζ est idéale, alors pour tout $i, j \in A$, il existe un réel l_{ij} tel que pour tout $j_1, j_2, \dots, j_k \in A$, le produit $\eta_{ij_1} \eta_{j_1 j_2} \dots \eta_{j_{k-1} j_k}$ est égal à l_{ij} .

Notamment, $l_{ij} = \eta_{ij} \eta_{jj}^k = \eta_{ii}^k \eta_{ij}$; on en déduit donc que pour tout $i, j \in A$, $\eta_{ii} = \eta_{jj}$. On remarque de plus que $\eta_{ij} \eta_{ji} = \eta_{ii}^2 = \eta_{jj}^2$.

On note $W_i = [\eta_{i1} \ \eta_{i2} \ \dots \ \eta_{id}]$ pour tout $i \in A$. Quels que soit $i, j, k, h \in A$, les égalités suivantes sont vérifiées.

$$\eta_{kj} \eta_{jh} = \eta_{ki} \eta_{ih} \Leftrightarrow \frac{\eta_{jh}}{\eta_{ki}} = \frac{\eta_{ih}}{\eta_{kj}} \Leftrightarrow \frac{\eta_{ii}^2}{\eta_{ki}} \eta_{jh} = \frac{\eta_{jj}^2}{\eta_{kj}} \eta_{ih} \Leftrightarrow \eta_{ik} \eta_{jh} = \eta_{jk} \eta_{ih} \Leftrightarrow \frac{\eta_{ik}}{\eta_{jk}} = \frac{\eta_{ih}}{\eta_{jh}}$$

et on en déduit que W_i et W_j sont colinéaires.

Par définition de la substitution d'arbre et de la matrice tronç, l'équation $W_i M_t(i) = 1$ est vérifiée pour tout $i \in A$ et par colinéarité, $\frac{\eta_{ii}}{\eta_{ji}} = \frac{\eta_{ij}}{\eta_{jj}}$ pour tout $i, j \in A$. On obtient finalement

$W_i M_t(j) = \frac{\eta_{ij}}{\eta_{jj}}$; W_i est donc un vecteur propre à gauche strictement positif associée à la valeur propre η_{11}^{-1} . M_t étant primitive, λ (sa valeur propre dominante) est la seule qui admet un vecteur propre strictement positif, et on a donc $\eta_{11}^{-1} = \lambda$.

On suppose maintenant que la substitution tronc n'est pas sous-primitive. On suppose l'existence d'une réalisation idéale, et on reprend le raisonnement et les notations utilisé pour la démonstration de l'unicité dans le cas sous-primitif. On a obtenu pour tout $i \in A$ un vecteur propre à gauche strictement positif W_i de la matrice M_t ; W_i est associé à la valeur propre η_{11}^{-1} et les W_i sont colinéaires. Si σ_τ n'est pas sous-primitive, alors il existe une partition $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ de A telle que pour tout $1 \leq i \leq p$, la restriction de σ_τ à α_i est sous-primitive. On peut associer à chaque α_i la matrice d'incidence de σ_τ sur α_i . Deux cas peuvent alors se produire. Si 2 de ces sous-matrices ont des valeurs propres dominantes différentes, alors il n'existe aucun vecteur propre à gauche de M_t strictement positif, et on contredit l'existence de la réalisation idéale. Si toutes les sous-matrices ont même valeur propre dominante, le sous espace propre est de dimension > 1 . Il existe alors une infinité de réalisation idéale.

Chapitre 6

Constructions de cœurs compacts par substitutions d'arbre

Soit A un alphabet et A^* le monoïde libre engendré par A et $A^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des mots infinis unilatéraux indicés par \mathbb{N} et $A^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des mots bi-infinis pointés indicés sur \mathbb{Z} . L'application shift est notée S , aussi bien $A^{\mathbb{N}}$ que sur $A^{\mathbb{Z}}$. Si σ est une substitution primitive, alors σ engendre les deux systèmes dynamiques (Ω^+, S) et (Ω, S) , avec $\Omega^+ \subset A^{\mathbb{N}}$ et $\Omega \subset A^{\mathbb{Z}}$. Si σ est une substitution inversible, alors elle s'étend naturellement en un automorphisme du groupe libre muni de la base $F(A)$.

Etant donné un représentant topologique train-track sur un graphe G de σ^{-1} , on a donné dans le chapitre 2 (section 2.3) une méthode pour construire un arbre réel T pour lequel

- $F(A)$ agit sur T de manière non-triviale, minimale, les stabilisateurs d'arcs sont triviaux,
- il existe $\eta > 0$ et une homothétie $H : T \rightarrow T$ de facteur η telle que

$$\sigma^{-1}(w)H = Hw$$

pour tout élément w de $F(A)$,

- l'action est à orbites denses si $\eta > 1$.

On se placera dans le cas $\eta > 1$, afin de pouvoir construire l'application $Q : \partial F(A) \rightarrow \overline{T} \cup \partial T$ définie au chapitre 2 (section 2.3.1). L'ensemble $Q(\Omega^+)$ a un intérêt particulier. C'est un ensemble auto-similaire sur lequel on peut définir un échange de domaines. Il est également à rapprocher de l'ensemble limite défini dans [8]. L'objectif de ce chapitre est de construire $Q(\Omega^+)$ par substitutions d'arbre sur deux classes d'exemples. La construction par substitutions d'arbre fera clairement apparaître sur $Q(\Omega^+)$ la dynamique symbolique engendrée par σ , et permettra de donner une nouvelle (et plus explicite) définition de l'application $Q : \Omega^+ \rightarrow \overline{T}$.

6.1 Premier exemple

Enoncés des résultats de la section 6.1

Soit $d \geq 3$; on définit sur $A = \{1, 2, \dots, d\}$ la substitution primitive σ :

$$\begin{aligned} \sigma & : 1 \mapsto 12 \\ & \quad k \mapsto (k+1) \quad \text{pour } 2 \leq k \leq d-1 \\ & \quad d \mapsto 1 \end{aligned}$$

σ engendre le système dynamique symbolique (Ω^+, S) . σ est inversible, et on note encore σ l'automorphisme du groupe libre de base A (désormais noté F_d) engendré par la substitution, et σ^{-1} son inverse. La classe extérieure de σ^{-1} est notée Φ_1 (cf. section 2.2 page 44).

On rappelle que la rose à d pétales, notée R_d , est le graphe topologique constitué d'un unique sommet $*$ et de d arêtes (de $*$ à $*$) (voir sous-section 2.2.1 page 45). Φ_1 admet un représentant

topologique train-track h_0 sur R_d . Un chemin $\alpha : [0, 1] \rightarrow R_d$ où $\alpha(0) = \alpha(1) = *$ détermine un élément $\langle \alpha \rangle$ du groupe fondamental $\pi_1(R_d, *)$ de R_d . On identifie $\pi_1(R_d, *)$ avec le groupe libre F_d ; si e est un arc de R_d , $\langle e \rangle$ est un élément de $A_d \cup A_d^{-1}$. h_0 est l'équivalence d'homotopie de R_d dans R_d vérifiant, pour tout arc e de R_d , $\langle h_0(e) \rangle = \sigma_d^{-1}(\langle e \rangle)$. On note η la valeur propre dominante de la matrice d'incidence de h_0 . Le vecteur $v = [1 \ \eta^{d-1} \ \eta^{d-2} \ \dots \ \eta^2 \ \eta]$ est un vecteur propre à gauche associé à η . On munit R_d de la métrique telle que si e_1, e_2, \dots, e_d sont les arcs de R_d , alors e_i est de longueur $v(i)$, et on construit l'arbre T associé à σ^{-1} (cf. section 2.3 page 47). L'action de F_d sur T est à orbites denses et on définit $Q : \partial F_d \rightarrow \overline{T} \cup \partial T$.

On va décrire $Q(\Omega^+)$ grâce aux propriétés du système dynamique engendré par σ . Les chapitres 4 et 5 définissent les substitutions d'arbre. L'objectif est de montrer comment on peut construire $Q(\Omega^+)$ grâce à ces substitutions d'arbre. On donnera deux manières équivalentes; les deux se basent sur une substitution d'arbre simplicial. La première méthode consiste à donner une suite d'arbres simpliciaux et à lui associer par réalisation une suite d'arbres réels; on pourra se reporter au théorème 5.5.5 (page 86). L'autre approche consiste à définir directement une substitution sur des arbres réels (qui sera une réalisation de la substitution d'arbre simplicial). Dans les deux cas, la suite d'arbres réels obtenue est une suite de Cauchy (au sens de la métrique de Hausdorff) de \mathcal{T}^d et converge vers un arbre isomorphiquement isométrique à $Q(\Omega^+)$. On note que la seconde méthode permettra notamment d'explicitement une construction graphe-dirigée dont $Q(\Omega^+)$ sera l'invariant; on obtiendra ainsi sa dimension de Hausdorff.

On va maintenant construire une substitution d'arbre associée à σ . Soit $A_\tau = \{1, \dots, d, (d+1), \dots, (2d-2)\}$; A_τ contient A , ainsi que $d-2$ lettres supplémentaires, dont le sens sera explicité par la suite. Si X_i est un élément de $\mathcal{S}_E(A_\tau)$, $X_i = (\{x, y\}, \{(x, y, i)\})$, où $i \in A_\tau$, τ est définie par :

- $\tau(X_1) = X_d$,
- l'image de X_2 est représentée sur la figure 6.1,
- $\tau(X_i) = X_{i-1}$ si $3 \leq i \leq d$,
- $\tau(X_{d+1}) = X_1$,
- $\tau(X_i) = X_{i-1}$ si $d+2 \leq i \leq 2d-2$.

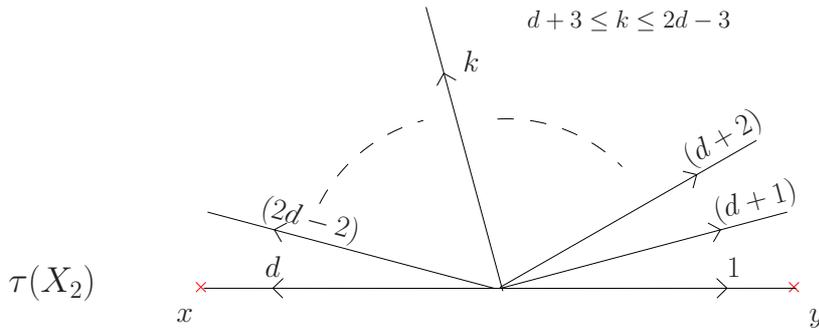
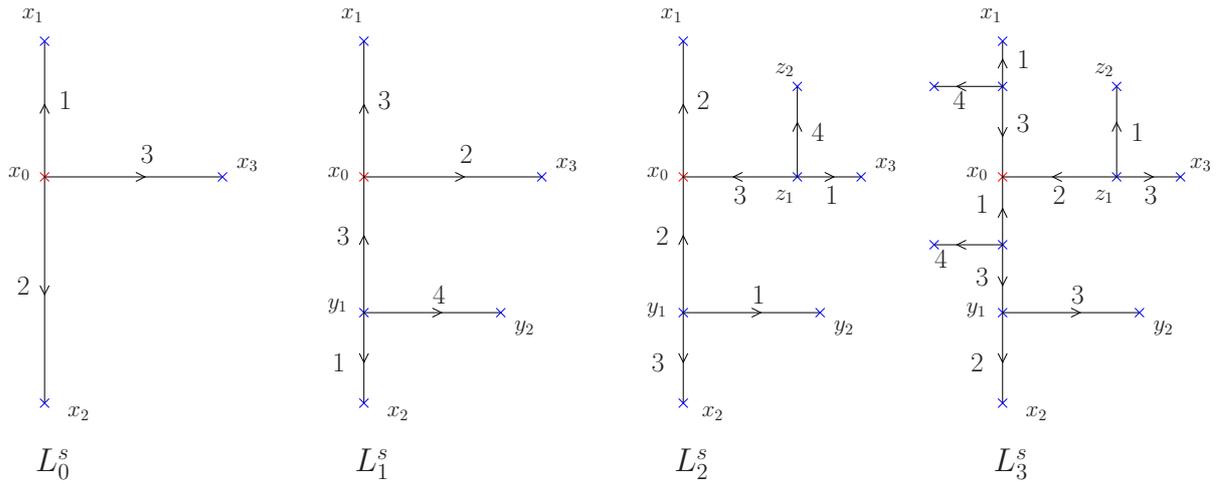


FIG. 6.1: Substitution d'arbre associée à σ .

On appelle L_0^s l'arbre constitué d'une racine x_0 et de d arêtes colorées $1, 2, \dots, d$ sortant de cette racine et $L_n^s = \tau^n(L_0^s)$. x_0 est la racine de L_n^s quel que soit $n \in \mathbb{N}$. BT_n^s est l'ensemble des sommets de L_n^s ; par définition de la substitution d'arbre, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $BT_n^s \subset BT_{n+1}^s$. La figure 6.2 illustre l'action de τ sur L_0^s (dans le cas $d = 3$).

On notera γ_n la fonction chemin de L_n^s . On définit le morphisme $pr : (A_\tau \cup \overline{A_\tau})^* \rightarrow F_d$ (où $\overline{A_\tau} = \{\overline{1}, \dots, \overline{d}, \overline{(d+1)}, \dots, \overline{(2d-2)}\}$) tel que

- $pr(k) = k$ pour $k \in \{1, \dots, d\}$,
- $pr((d+k)) = \sigma^k(1)$ pour $k \in \{1, \dots, d-2\}$,
- $pr(\overline{k}) = k^{-1}$ pour $k \in \{1, \dots, d\}$,
- $pr(\overline{(d+k)}) = \sigma^k(1^{-1})$ pour $k \in \{1, \dots, d-2\}$.

FIG. 6.2: Représentation de $L_0^s, L_1^s, L_2^s, L_3^s$ dans le cas $d = 3$.

Cette application explicite les $d - 2$ lettres de $A_\tau \setminus A$; on va pouvoir associer des mots de F_d aux chemins de L_n^s . Soit $\omega = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma^n(1)$; on note Ω_0^+ l'ensemble des points v de Ω^+ tels que $S^k(v) = \omega$ (dans ce cas, $v = u\omega$ avec u mot positif de F_d) ou $S^k(\omega) = v$ (dans ce cas, $v = u\omega$ avec u mot négatif de F_d et u^{-1} est préfixe de ω) pour un certain k .

Proposition 6.1.1 *Pour tout point $v = u\omega$ de Ω_0^+ , il existe un unique sommet $x = f_Q(v)$ de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n^s$ et un unique entier p_0 minimal tel que pour tout $p \geq p_0$, $u = \sigma^p(\text{pr}(\gamma_p(x_0, x)))$.*

On remarque que $L_0^s = \tau^{d-1}(X_2)$, où X_2 est un élément de $\mathcal{S}_E(A_\tau)$ dont l'arête est colorée 2; les sommets de $\tau^n(X_2)$ sont de degré au plus d quel que soit $n \in \mathbb{N}$. On déduit du théorème 5.5.5 (page 86), que choisir une réalisation de X_2 définit de manière unique (à isométrie près) les réalisations des arbres L_n^s dans \mathcal{R}^d si on impose

- deux arêtes de L_n^s de même couleur ont deux réalisations isométriques,
- si ν_n est la fonction de réalisation de L_n^s , et si x est un sommet commun à L_k^s et L_{k+1}^s , alors $\nu_{k+1}(x) = \nu_k(x)$.

En choisissant une réalisation de X_2 de longueur de η^{2d-2} (on rappelle que η est la valeur propre dominante de la matrice d'incidence de h_0 , représentant topologique train-track sur la rose de σ^{-1}), la longueur de la réalisation de l'arête de L_0^s colorée k est donnée par la k -ième coordonnée du vecteur $[1 \ \eta^{d-1} \ \eta^{d-2} \ \dots \ \eta^2 \ \eta]$.

On note L_n l'enveloppe convexe de $\nu_n(BT_n^s) = BT_n$; la suite $(L_n)_n$ converge vers un arbre réel L de \mathcal{S}^d . Par densité de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$ dans L et par la proposition 6.1.1, on définit la fonction f_Q

surjective de Ω^+ dans L . Pour tout $x \in L$, l'ensemble $Q(f_Q^{-1}(\{x\})) \subset \overline{T}$ est réduit à un unique élément. On peut donc définir la fonction $\xi : L \rightarrow Q(\Omega^+)$, qui à tout $f_Q(v)$ ($v \in \Omega^+$) associe $Q(v)$.

On peut maintenant énoncer un premier résultat. σ engendre le système dynamique (Ω^+, S) , T est un arbre invariant de l'automorphisme σ^{-1} et Q est l'application équivariante surjective de ∂F_d dans $\overline{T} \cup \partial T$ associée. τ est la substitution d'arbre associée à σ et on peut décrire, grâce aux arbres $L_n^s = \tau^n(L_0^s)$, une suite d'arbres réels convergente vers un arbre réel L . Les chemins des arbres L_n^s nous permettent de construire une fonction f_Q surjective de Ω^+ dans L .

Théorème 6.1.2 *L'application ξ définie pour tout v de Ω^+ par*

$$\begin{aligned} \xi & : L & \rightarrow & Q(\Omega^+) \\ f_Q(v) & \mapsto & Q(v) \end{aligned}$$

est une bijection isométrique.

Pour tout mot u positif de $\mathfrak{L}(\Omega^+)$, on note P_u l'ensemble des mots v de Ω^+ tels que uv appartient encore à Ω^+ . On note μ l'unique mesure de probabilité du système (Ω^+, S) (cf. sous-section 1.4.3 page 37). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des P_u , $|u| = n$ forme une partition (modulo un ensemble de mesure nulle) notée \mathcal{P}_n de Ω^+ . Si P_u et P_v sont deux éléments de \mathcal{P}_n , alors on note $P_u \sim P_v$ si $\mu(P_u) = \mu(P_v)$.

Soient s et t deux points de \mathcal{R}^d . $\overline{\mathcal{R}^d} \setminus \{s\}$ est composé de $2d$ composantes connexes ; on note $Cn_s(t)$ celle qui contient t et

$$Cn(s, t) = (Cn_s(t) \cap Cn_t(s)) \cup \{s, t\}.$$

On rappelle que BT_n est l'ensemble des points de branchement et des points terminaux de L_n . Soient s et t deux points de BT_n ; on dit que $[s, t]$ est un arc simple si $]s, t[$ ne contient aucun point de BT_n .

Lemme 6.1.3 *Pour tout arc simple $[s, t]$ de L_n , il existe $u \in \mathfrak{L}(\Omega^+)$ pour lequel*

$$f_Q(P_u) = Cn(s, t) \cap L.$$

Un travail sur les facteurs spéciaux du langage permet alors d'obtenir le théorème suivant.

Théorème 6.1.4 *Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe un entier m tel que pour tout $P_v \in \mathcal{P}_m$ (où \mathcal{P}_m est la partition (modulo un ensemble de mesure nulle) de Ω^+ constituée des P_u , $|u| = m$), il existe un unique arc simple $[s, t]$ de L_n pour lequel $f_Q(P_v) = Cn(s, t) \cap L$; réciproquement, pour tout arc simple $[s, t]$ de L_n , il existe un unique élément P_v de \mathcal{P}_m tel que $f_Q(P_v) = Cn(s, t) \cap L$. De plus, si $n = 0$, alors $m = 1$, et si $n > 0$, alors $\#(\mathcal{P}_m / \sim) = 2d - 2$ ou (de manière équivalente), $\mathfrak{L}(\Omega^+)$ possède un mot bispecial (prolongeable à droite et à gauche d'au moins 2 manières) de longueur $(m - 1)$. Réciproquement, si $\#(\mathcal{P}_m / \sim) = 2d - 2$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ pour lequel L_n vérifie les propriétés énoncées.*

6.1.1 Abélianisé et points périodiques

Soit d un entier supérieur ou égal à 3 et $A = \{1, 2, \dots, d\}$ un alphabet. On note σ la substitution de l'alphabet A définie par

$$\begin{array}{rcl} \sigma & : & 1 \mapsto 12 \\ & & k \mapsto (k+1) \quad \text{pour } 2 \leq k \leq d-1 \\ & & d \mapsto 1 \end{array}$$

La matrice d'incidence M_σ de σ est définie par

- $M_\sigma(1, 1) = M_\sigma(1, d) = 1$,
- pour tout $2 \leq i \leq d$, $M_\sigma(i+1, i) = 1$,
- M_σ est nulle partout ailleurs.

Le développement du déterminant de $M_\sigma - xId$ par rapport à la première ligne donne $(1-x)(-x)^{d-1} + (-1)^{d-1}$. Cette matrice est primitive et admet donc une valeur propre réelle dominante $\lambda (> 1)$; λ vérifie $\lambda^d = \lambda^{d-1} + 1$.

σ est primitive quel que soit d ; on note (Ω, S) le système dynamique symbolique associé à σ et $\mathfrak{L}(\Omega)$ son langage. On remarque que le mot $k1$ est dans le langage quel que soit $1 \leq k \leq d$ et on note

$$\omega_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma^{dn}(k.1).$$

$\omega_1, \dots, \omega_d$ sont les seuls points périodiques de σ ; on note $\Omega_{per} = \{\omega_1, \dots, \omega_d\}$.

Par la suite, nous parlerons également de shift unilatéral, et on notera

$$\omega = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma^n(1).$$

Définition 6.1.5 Si u est un mot de Ω , le mot $(u_{-i})_{i \in \mathbb{N}^*}$ (infini à gauche) sera appelé **passé** de u et le mot $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ (infini à droite) sera appelé **futur** de u .

6.1.2 Points fixes de la classe extérieure

Si $F(\{1, \dots, d\})$ est le groupe libre à d éléments muni de la base $\{1, \dots, d\}$, on notera encore σ l'automorphisme de $F(\{1, \dots, d\})$ induit par la substitution et Φ sa classe extérieure. $F(\{1, \dots, d\})$ sera désormais simplement noté F_d . Pour tout mot w de F_d , on note i_w l'automorphisme qui à tout mot u de F_d associe $i_w(u) = w^{-1}uw$. On pourra se reporter au chapitre 3 pour les notations et pour une méthode de recherche de points fixes (voir théorème 3.3.5 (page 56) et la discussion qui s'ensuit).

On considère les $d-1$ automorphismes définis, pour tout $1 \leq k \leq d-1$, par $\Psi_k = i_{\sigma^{d+(k-1)}(1)} \circ \sigma^{2d-2}$. Ψ_1 fixe $(\omega_{1,1}, \omega_{1,2})$ avec

$$\omega_{1,1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Psi_1^n(1.1), \quad \omega_{1,2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Psi_1^n(1.2).$$

Pour $2 \leq k \leq d-1$, Ψ_k fixe $(\omega_{k,1}, \omega_{k,2})$ avec

$$\omega_{k,1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Psi_k^n(1 \dots k.1), \quad \omega_{k,2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Psi_k^n(1 \dots k.(k+1)).$$

En ajoutant à ces points le point fixe donné par les mots de Ω_{per} , on note que la borne donnée par [10] (théorème 1') est atteinte.

6.1.3 Automate des préfixes-suffixes

L'automate des préfixes-suffixes de σ est décrit en figure 6.3. On se reporte à la section 1.5

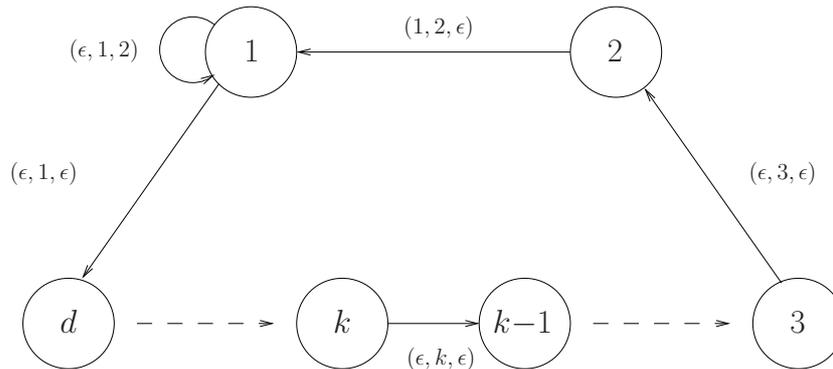


FIG. 6.3: Automate des préfixes-suffixes de σ .

(page 37) et au théorème 1.5.7 concernant l'automate des préfixes-suffixes pour les notations.

Développements des points fixes de Φ en préfixes-suffixes

Ces développements nous serviront principalement à exprimer de manière simple les facteurs spéciaux du langage; on verra même par la suite qu'on obtient tous les facteurs spéciaux grâce aux points fixes. On utilise le symbole $*$ pour signifier qu'un développement est ultimement constant; le dernier terme entre crochets ou parenthèses est répété à l'infini. Les éléments de Ω_{per} ont tous pour développement $(\epsilon, 1, 2)*$; par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
\Gamma(S^{-1}(\omega_1)) &= [(\epsilon, 1, \epsilon)(\epsilon, d, \epsilon)(\epsilon, (d-1), \epsilon) \dots (\epsilon, 4, \epsilon)(\epsilon, 3, \epsilon)(1, 2, \epsilon)]^*, \\
\Gamma(S^{-1}(\omega_2)) &= [(1, 2, \epsilon)(\epsilon, 1, \epsilon)(\epsilon, d, \epsilon)(\epsilon, (d-1), \epsilon) \dots (\epsilon, 4, \epsilon)(\epsilon, 3, \epsilon)]^*, \\
\Gamma(S^{-1}(\omega_3)) &= [(\epsilon, 3, \epsilon)(1, 2, \epsilon)(\epsilon, 1, \epsilon)(\epsilon, d, \epsilon) \dots (\epsilon, 4, \epsilon)]^*, \\
\Gamma(S^{-1}(\omega_k)) &= [(\epsilon, k, \epsilon) \dots (\epsilon, 3, \epsilon)(1, 2, \epsilon)(\epsilon, 1, \epsilon)(\epsilon, d, \epsilon) \dots (\epsilon, (k+1), \epsilon)]^* \text{ si } k \geq 4.
\end{aligned}$$

Pour ce qui concerne les autres, on va donner à la fois leurs développements par rapport à σ et leurs développements par rapport à σ^{2d-2} . On notera Γ_{2d-2} l'application qui à un mot de Ω associe son développement dans l'automate de σ^{2d-2} .

Si $k = 1$ et $d \neq 3$ (si $d = 3$, on utilisera la formule donnée pour $k = d - 2$) :

$$\begin{aligned}
\Gamma(\omega_{1,1}) &= [(\epsilon, 1, 2)(\epsilon, 1, \epsilon)(\epsilon, d, \epsilon) \dots (\epsilon, 3, \epsilon)(1, 2, \epsilon)(\epsilon, 1, 2)^{d-3}]^* \\
\Gamma(S(\omega_{1,2})) &= [(\epsilon, 3, \epsilon)(1, 2, \epsilon)(\epsilon, 1, 2)^{d-2}(\epsilon, 1, \epsilon)(\epsilon, d, \epsilon) \dots (\epsilon, 4, \epsilon)]^* \\
\Gamma_{2d-2}(\omega_{1,1}) &= (\sigma^d(1), 1, 2\sigma^{d+1}(2) \dots \sigma^{2d-3}(2))^* \\
\Gamma_{2d-2}(S(\omega_{1,2})) &= (\sigma(1), 3, \sigma^2(2) \dots \sigma^{d-1}(2))^*
\end{aligned}$$

si $k = 2$ et $d \geq 5$ (si $d = 3$, on utilisera la formule donnée pour $k = d - 1$, et si $d = 4$, on prendra la formule donnée pour $k = d - 2$) :

$$\begin{aligned}
\Gamma(\omega_{2,1}) &= [(\epsilon, 1, 2)^2(\epsilon, 1, \epsilon)(\epsilon, d, \epsilon) \dots (\epsilon, 3, \epsilon)(1, 2, \epsilon)(\epsilon, 1, 2)^{d-4}]^* \\
\Gamma(S(\omega_{2,2})) &= [(\epsilon, 4, \epsilon)(\epsilon, 3, \epsilon)(1, 2, \epsilon)(\epsilon, 1, 2)^{d-2}(\epsilon, 1, \epsilon)(\epsilon, d, \epsilon) \dots (\epsilon, 5, \epsilon)]^* \\
\Gamma_{2d-2}(\omega_{2,1}) &= (\sigma^{d+1}(1), 1, 2\sigma(2)\sigma^{d+2}(2) \dots \sigma^{2d-3}(2))^* \\
\Gamma_{2d-2}(S(\omega_{2,2})) &= (\sigma^2(1), 4, \sigma^3(2) \dots \sigma^d(2))^*
\end{aligned}$$

si $3 \leq k \leq d - 3$ (pour $d \geq 6$) :

$$\begin{aligned}
\Gamma(\omega_{k,1}) &= [(\epsilon, 1, 2)^k(\epsilon, 1, \epsilon)(\epsilon, d, \epsilon) \dots (\epsilon, 3, \epsilon)(1, 2, \epsilon)(\epsilon, 1, 2)^{d-k-2}]^* \\
\Gamma(S(\omega_{k,2})) &= [(\epsilon, (k+2), \epsilon) \dots (\epsilon, 3, \epsilon)(1, 2, \epsilon)(\epsilon, 1, 2)^{d-2}(\epsilon, 1, \epsilon)(\epsilon, d, \epsilon) \dots (\epsilon, (k+3), \epsilon)]^* \\
\Gamma_{2d-2}(\omega_{k,1}) &= (\sigma^{d+k-1}(1), 1, 2\sigma(2) \dots \sigma^{k-1}(2)\sigma^{d+k}(2) \dots \sigma^{2d-3}(2))^* \\
\Gamma_{2d-2}(S(\omega_{k,2})) &= (\sigma^k(1), (k+2), \sigma^{k+1}(2) \dots \sigma^{d+k-2}(2))^*
\end{aligned}$$

si $k = d - 2$:

$$\begin{aligned}
\Gamma(\omega_{d-2,1}) &= [(\epsilon, 1, 2)^{d-2}(\epsilon, 1, \epsilon)(\epsilon, d, \epsilon) \dots (\epsilon, 3, \epsilon)(1, 2, \epsilon)]^* \\
\Gamma(S(\omega_{d-2,2})) &= [(\epsilon, d, \epsilon) \dots (\epsilon, 3, \epsilon)(1, 2, \epsilon)(\epsilon, 1, 2)^{d-2}(\epsilon, 1, \epsilon)]^* \\
\Gamma_{2d-2}(\omega_{d-2,1}) &= (\sigma^{2d-3}(1), 1, 2\sigma(2) \dots \sigma^{d-3}(2))^* \\
\Gamma_{2d-2}(S(\omega_{d-2,2})) &= (\sigma^{d-2}(1), d, \sigma^{d-1}(2) \dots \sigma^{2d-4}(2))^*
\end{aligned}$$

si $k = d - 1$:

$$\begin{aligned}
\Gamma(S(\omega_{d-1,1})) &= [(1, 2, \epsilon)(\epsilon, 1, 2)^{d-2}(\epsilon, 1, \epsilon)(\epsilon, d, \epsilon) \dots (\epsilon, 3, \epsilon)]^* \\
\Gamma(S(\omega_{d-1,2})) &= [(\epsilon, 1, \epsilon)(\epsilon, d, \epsilon) \dots (\epsilon, 3, \epsilon)(1, 2, \epsilon)(\epsilon, 1, 2)^{d-2}]^* \\
\Gamma_{2d-2}(S(\omega_{d-1,1})) &= (1, 2, \sigma(2) \dots \sigma^{d-2}(2))^* \\
\Gamma_{2d-2}(S(\omega_{d-1,2})) &= (\sigma^{d-1}(1), 1, \sigma^d(2) \dots \sigma^{2d-3}(2))^*
\end{aligned}$$

On remarque que $\sigma^0(1) = 1$, $\sigma(1) = 12$, $\sigma^2(1) = 123$ et pour tout $3 \leq k \leq d - 1$, $\sigma^k = 12 \dots k(k+1)$. De plus, on déduit de l'égalité $\sigma^d(1) = \sigma^{d-1}(1)1$ que pour tout $0 \leq k \leq d - 2$,

$$\sigma^{d+k}(1) = \sigma^{2d-2}((k+2))\sigma^k(1)$$

On se reporte alors au théorème 3.3.5 (page 56) pour conclure qu'on est bien en présence de points fixes. On déduit du théorème 1.5.6 (page 39) que pour tout $1 \leq k \leq d-1$, $\omega_{k,1}$ et $\omega_{k,2}$ sont des points de $\Omega \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S^n(\Omega_{per})$. De plus, le corollaire 3.3.2 (page 55) nous permet de déduire que deux points fixes (deux n -uplets) distincts sont dans deux orbites différentes. On en conclut (puisque la borne de [10] est atteinte) que la propriété suivante est vérifiée.

Propriété 6.1.6

- Si deux points de $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S^n(\Omega_{per})$ ont même passé, alors ils sont égaux,
- si deux points de $\Omega \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S^n(\Omega_{per})$ ont même futur, alors ils sont égaux.

Conséquence 6.1.7 $\omega = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma^n(1)$ est l'unique mot infini à droite qui soit spécial à gauche.

6.1.4 Facteurs spéciaux

On commence par mettre en évidence les facteurs spéciaux à gauche. On dit qu'un mot u de $\mathfrak{L}(\Omega)$ peut être désubstitué s'il existe un unique mot $u_{des} \in \mathfrak{L}(\Omega)$ de longueur minimale tel que u est préfixe $\sigma(u_{des})$. On pourra vérifier que les mots de longueur 2 du langage sont

- $k1$, $1 \leq k \leq d$,
- $k(k+1)$, $1 \leq k \leq d-1$,

et puisque d n'est pas spécial à gauche, on en déduit que le mot 11 ne l'est pas non plus. 1 étant le seul mot de longueur 1 spécial à gauche, il vient que 12 est le seul mot de longueur 2 spécial à gauche.

Lemme 6.1.8 Si u est spécial à gauche, $|u| \geq 2$ et si u peut être désubstitué, alors son désubstitué est encore spécial à gauche.

Preuve Soit u un mot spécial à gauche et $|u| \geq 2$. On remarque d'abord que 2 n'est pas spécial à gauche : 12 est le seul mot de longueur 2 de suffixe 2 . On suppose hu et ku dans $\mathfrak{L}(\Omega)$ avec $h, k \in \{1, 12, 3, \dots, d\}$. Tout mot de longueur ≥ 2 spécial à gauche a pour préfixe 12 ; le mot $1u$ est donc désubstituable en du_{des} . Si $h = 1$ (resp. $k = 1$), on note $h_{des} = d$ (resp. $k_{des} = d$). Si $h, k \neq 1$, h et k sont désubstituables et on note h_{des} et k_{des} leurs désubstitués; si $h \neq k$, alors $h_{des} \neq k_{des}$. De plus, si u est désubstituable et u_{des} est son désubstitué, alors hu et ku le sont également et les mots $h_{des}u_{des}$ et $k_{des}u_{des}$ sont des éléments de $\mathfrak{L}(\Omega)$. u_{des} est donc spécial à gauche. \square

Proposition 6.1.9 Tout mot spécial à gauche est préfixe de ω .

Preuve On a déjà vérifié la propriété pour les longueurs 1 et 2. Tout mot de longueur ≥ 2 spécial à gauche a pour préfixe 12 ; si celui-ci peut être désubstitué, alors son désubstitué est de longueur strictement inférieure. On suppose que pour tout $k \leq n$, l'unique mot de longueur k spécial à gauche est le préfixe (de longueur k) de ω . Soit $u = u_0 \dots u_{n-1} u_n$ un mot spécial à gauche. Si $u_n \neq 1$, on peut immédiatement désubstituer u en u_{des} avec $|u_{des}| < |u|$; u_{des} est alors un préfixe de ω , et u l'est également.

Si $u_n = 1$ et $u_{n-1} \neq d$, on peut encore désubstituer u puisque les paires $kd, k \neq d-1$ ne sont pas dans le langage, et on conclut de la même manière.

Si $u_n = 1$ et $u_{n-1} = d$ et u est spécial à gauche, le mot $u' = u_0 \dots u_{n-1}$ est encore spécial à gauche. L'hypothèse de récurrence s'applique et u' est préfixe de ω ; u' n'est pas spécial à droite puisque d ne l'est pas, et on conclut que u est préfixe de ω . \square

On rappelle que ω peut être étendu à gauche par d lettres.

Conséquence 6.1.10

- La fonction de complexité p de $\mathfrak{L}(\Omega)$ vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p(n) = (d-1)n + 1$.
- Les mots spéciaux à droite sont exactement les suffixes des passés des $\omega_{i,1}$, $1 \leq i \leq d-1$.

On étudie maintenant les mots bispéciaux : leur intérêt apparaîtra par la suite. Soit $u = \sigma^{u_n}(1)\sigma^{u_{n-1}}(1)\dots\sigma^{u_1}(1)\sigma^{u_0}(1)$, correspondant au début du développement en préfixes de $\omega_{k,m}$ (quels que soient $1 \leq k \leq d-1$ et $1 \leq m \leq 2$). u est spécial à droite par définition et u est préfixe de $\sigma^{u_{n+1}}(1)$ (et donc de ω) par 1.5.5 (page 38), ce qui le rend bispécial. On va montrer que ce sont les seuls mots bispéciaux.

Remarque 6.1.11 *Tout préfixe de ω est atteint par un développement du type*

$$\sigma^{v_n}(1)\sigma^{v_{n-1}}(1)\dots\sigma^{v_1}(1)\sigma^{v_0}(1)$$

où pour tout $0 \leq i \leq n-1$, $v_{i+1} - v_i \geq d$.

Il suffit d'écrire le développement des shiftés de ω_1 dans l'automate des préfixes-suffixes pour s'en convaincre.

Lemme 6.1.12 *Pour $n = d-1$ et pour tout $n > 2d-2$, $\sigma^n(1)$ n'est pas spécial à droite.*

Preuve *Pour tout n tel que $n = d-1[d]$, la dernière lettre de $\sigma^n(1)$ est d ; le mot d n'étant pas spécial à droite, $\sigma^n(1)$ ne l'est pas non plus.*

On suppose $n > 2d-2$ et $n = h[d]$ avec $h \neq d-1$. D'après 6.1.10, $\sigma^n(1)$ n'est spécial à droite que s'il est suffixe du passé d'un des points fixes $\omega_{i,2}$. Par ailleurs, la dernière lettre de $\sigma^n(1)$ est $(h+1)$. Il suffit donc de vérifier que $\sigma^n(1)$ n'est pas suffixe du passé de $\omega_{(h+1),2}$.

Sachant que $\sigma^d(1) = \sigma^{d-1}(1)1$ et que $n > 2d-1$ (car $2d-1 = d-1[d]$), on déduit que le mot $\sigma^{h+2d-1}(1)\sigma^{h+d-1}(1)\sigma^h(1)$ est suffixe de $\sigma^n(1)$. On sait par ailleurs que $\sigma^{h+2d-1}(1)\sigma^h(1) = \sigma^{h+2d-2}(1)\sigma^{h+d-1}(1)\sigma^h(1)$ est suffixe du passé de $\omega_{(h+1),2}$. Puisque $h+2d-2$ et $h+2d-1$ diffèrent modulo d , alors les dernières lettres de $\sigma^{h+2d-2}(1)$ et de $\sigma^{h+2d-1}(1)$ diffèrent. Finalement, $\sigma^n(1)$ n'est pas suffixe du passé de $\omega_{(h+1),2}$ et n'est donc pas spécial à droite. \square

Proposition 6.1.13 *Tous les bispéciaux sont de la forme $u = \sigma^{u_n}(1)\sigma^{u_{n-1}}(1)\dots\sigma^{u_1}(1)\sigma^{u_0}(1)$, où u est le début du développement en préfixes de $\omega_{i,1}$ ou $\omega_{i,2}$ pour un certain i .*

Preuve *Dans cette preuve, on dira d'un mot issu du développement en préfixes d'un des $\omega_{k,m}$ qu'il est admis.*

Le lemme précédent nous permet d'initialiser une récurrence : on suppose donc que si $u = \sigma^{u_{n-1}}(1)\dots\sigma^{u_0}(1)$ est spécial à droite, alors il est admis. Soit $u = \sigma^{u_n}(1)\dots\sigma^{u_0}(1)$ un mot spécial à droite ; le suffixe $\sigma^{u_{n-1}}(1)\dots\sigma^{u_0}(1)$ est également spécial à droite, et il est donc admis par hypothèse de récurrence. On rappelle qu'un mot sera spécial à droite s'il est suffixe du passé de $\omega_{i,1}$ (ou $\omega_{i,2}$) pour un certain i , et spécial à gauche s'il est préfixe de ω .

Si $n-1 \neq 0$ ou ($n-1 = 0$ et $u_0 \geq d$), $\sigma^{u_n}(1)$ doit être suffixe du mot (infini à gauche)

$$\dots\sigma^{u_{n-1}+4d-4}(1)\sigma^{u_{n-1}+2d-2}(1).$$

Par la remarque 6.1.11, on peut supposer que $u_n \geq d$. De plus, u_n et $u_{n-1} + 2d-2$ doivent être égaux modulo d pour que leurs dernières lettres soient égales. Si $u_n = u_{n-1} + kd-2$ avec $k > 2$, alors par $\sigma^d(1) = \sigma^{d-1}(1)1$, $\sigma^{u_{n-1}+3d-3}(1)\sigma^{u_{n-1}+2d-2}(1)$ est suffixe de $\sigma^{u_n}(1)$ et doit être suffixe de $\sigma^{u_{n-1}+4d-4}(1)\sigma^{u_{n-1}+2d-2}(1)$, ce qui est impossible puisque $u_{n-1} + 3d-3$ et $u_{n-1} + 4d-4$ diffèrent modulo d . On en déduit que $u_n = u_{n-1} + 2d-2$ et que u est admis.

Si $n-1 = 0$ et $u_0 \leq d-2$, $\sigma^{u_n}(1)$ doit être suffixe du mot (infini à gauche)

$$\dots\sigma^{u_{n-1}+4d-3}(1)\sigma^{u_{n-1}+2d-1}(1),$$

avec u_n égal à $u_{n-1} + 2d - 1$ modulo d . On pourra à nouveau supposer que $u_n \geq d$. Si $u_n = u_{n-1} + kd - 1$ avec $k > 2$, $\sigma^{u_{n-1}+3d-2}(1)\sigma^{u_{n-1}+2d-1}(1)$ est suffixe de $\sigma^{u_n}(1)$ et doit être suffixe du mot $\sigma^{u_{n-1}+4d-3}(1)\sigma^{u_{n-1}+2d-1}(1)$, ce qui est impossible puisque $u_{n-1} + 3d - 2$ et $u_{n-1} + 4d - 3$ différent modulo d . On en déduit que $u_n = u_{n-1} + 2d - 1$ et que u est admis. \square

6.1.5 Une caractérisation du shift unilatéral

On considère maintenant le shift infini à droite, noté Ω^+ ; on rappelle que $\omega = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma^n(1)$. Soient $\Omega_d^+ = \{v \in \Omega^+; S^k(\omega) = v, k \in \mathbb{N}\}$, $\Omega_g^+ = \{v \in \Omega^+; S^k(v) = \omega, k \in \mathbb{N}^*\}$, $\Omega_0^+ = \Omega_d^+ \cup \Omega_g^+$ et $\mathfrak{L}_0 = \{v; v \in \mathfrak{L}(\Omega) \text{ ou } v^{-1} \in \mathfrak{L}(\Omega)\}$; on définit

$$\begin{aligned} \delta : \Omega_0^+ &\rightarrow \mathfrak{L}_0 \\ u &\mapsto \begin{cases} u_{[0,k-1]} & (\text{préfixe de longueur } k \text{ de } u) \text{ si } S^k(u) = \omega \\ (\omega_{[0,k-1]})^{-1} & (\text{inverse du préfixe de longueur } k \text{ de } \omega) \text{ si } S^k(\omega) = u. \end{cases} \end{aligned}$$

Les deux automates des figures 6.4 et 6.5, appelés **automate négatif** et **automate positif** vont nous aider à caractériser Ω_g^+ et Ω_d^+ .

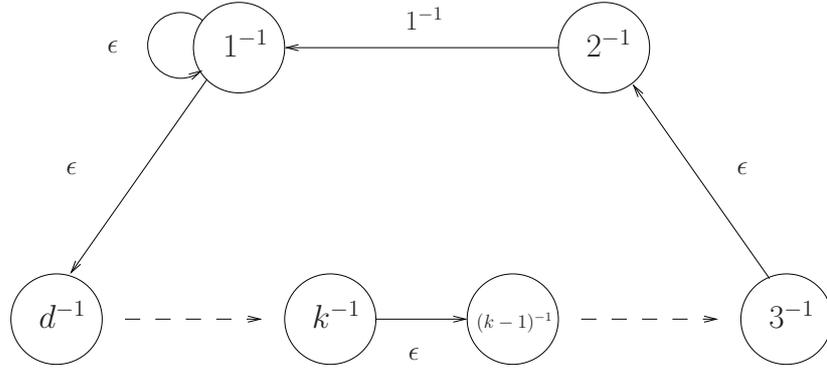


FIG. 6.4: Automate négatif.

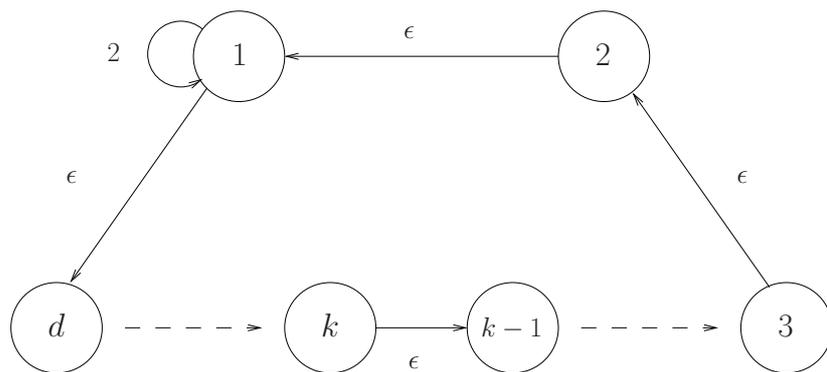


FIG. 6.5: Automate positif.

On note Σ_{aut}^+ l'ensemble des suites finies de couleurs $\alpha_0 \dots \alpha_m$ (où pour tout $0 \leq i \leq m$, $\alpha_i \in \{\epsilon, 2\}$) vérifiant $m > 0$, $\alpha_m = 2$, et issues des chemins de l'automate positif. Σ_{aut}^- est constitué de la suite vide et des suites finies de couleurs $\alpha_0 \dots \alpha_m$ (où pour tout $0 \leq i \leq m$, $\alpha_i \in \{\epsilon, 1^{-1}\}$) vérifiant $m > 0$, $\alpha_m = 1^{-1}$, et issues des chemins de l'automate négatif.

Si $\alpha = \alpha_0 \dots \alpha_m \in \Sigma_{aut}^+$, on associe à α le mot $\sigma^0(\alpha_0) \dots \sigma^m(\alpha_m) = \sigma^{u_0}(2) \dots \sigma^{u_n}(2)$, où $\{u_0, \dots, u_n\}$ est l'ensemble des j , $0 \leq j \leq m$ pour lesquels $\alpha_j = 2$ et pour tout $0 < i \leq n$,

$u_{i-1} < u_i$. On note que dans ce cas, pour tout $0 < i \leq n$, $u_i - u_{i-1} = dk + 1$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Si $\alpha = \alpha_0 \dots \alpha_m \in \Sigma_{aut}^-$, on associe à α le mot $\sigma^0(\alpha_0) \dots \sigma^m(\alpha_m) = \sigma^{u_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{u_n}(1^{-1})$, où $\{u_0, \dots, u_n\}$ est l'ensemble des j , $0 \leq j \leq m$ pour lesquels $\alpha_j = 1^{-1}$ et pour tout $0 < i \leq n$, $u_{i-1} < u_i$. Ici, pour tout $0 < i \leq n$, $u_i - u_{i-1} \geq d$. Le mot vide ϵ est associé au chemin de longueur 0.

Définitions 6.1.14 *On dira que $\sigma^{u_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{u_n}(1^{-1})$ est un **développement automatique** si pour tout $0 < i \leq n$, $u_i - u_{i-1} \geq d$.*

*On dira que $\sigma^{u_0}(2) \dots \sigma^{u_n}(2)$ est un **développement automatique** si pour tout $0 < i \leq n$, $u_i - u_{i-1} = dk + 1$ pour un certain k de \mathbb{N} .*

A chaque mot de Σ_{aut}^+ ou Σ_{aut}^- correspond un unique développement automatique, et à tout développement automatique correspond un unique chemin de Σ_{aut}^+ ou Σ_{aut}^- .

Propriété 6.1.15 *D'après la propriété 1.5.5 (page 38), si $\sigma^{u_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{u_n}(1^{-1})$ est un développement automatique, alors c'est un suffixe propre de $\sigma^{u_n+1}(1^{-1})$; si $\sigma^{u_0}(2) \dots \sigma^{u_n}(2)$ est un développement automatique, alors c'est un suffixe propre de $\sigma^{u_n+1}(1)$.*

Proposition 6.1.16 *L'ensemble Σ_{aut}^- (resp. Σ_{aut}^+) est en bijection avec l'ensemble $\delta(\Omega_d^+)$ (resp. $\delta(\Omega_g^+)$).*

Preuve *On commence par Σ_{aut}^- et $\delta(\Omega_d^+)$. Si u^{-1} est un mot de $\delta(\Omega_d^+)$ de longueur k , alors $\Gamma(S^k(\omega_j)) = (p_i, \alpha_i, s_i)_{i \leq h}(\epsilon, 1, 2)^*$ (avec $\omega_j \in \Omega_{per}$) et $u = \sigma^h(p_h) \dots p_0 = \sigma^{u_n}(1) \dots \sigma^{u_0}(1)$. Le mot $\sigma^{u_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{u_n}(1^{-1})$ est alors un développement automatique de u^{-1} , ce qui assure la surjection.*

L'automate des préfixes-suffixes nous permet de déduire que tout développement automatique de l'automate négatif sera effectivement un mot de $\delta(\Omega_d^+)$. On suppose que $\sigma^{u_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{u_n}(1^{-1}) = \sigma^{v_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{v_m}(1^{-1})$, les deux écritures étant des développements automatiques. Si $u_n > v_m$, alors $\sigma^{v_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{v_m}(1^{-1})$ est un suffixe propre de $\sigma^{v_m+1}(1^{-1})$ (propriété 6.1.15) et donc de $\sigma^{u_n}(1^{-1})$; on obtient

$$|\sigma^{u_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{u_n}(1^{-1})| > |\sigma^{v_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{v_m}(1^{-1})|$$

ce qui est impossible. On conclut que $u_n = v_m$. Une éventuelle récurrence donnera $m = n$ et $u_i = v_i$ pour tout $0 \leq i \leq n$, ce qui montre l'injection.

On passe à Σ_{aut}^+ et $\delta(\Omega_g^+)$. Si u est un mot de $\delta(\Omega_g^+)$ de longueur k , alors il existe $\omega_j \in \Omega_{per}$ tel que $\Gamma(S^{-(k+1)}(\omega_j)) = (p_i, \alpha_i, s_i)_{i \leq h}[(\epsilon, 1, \epsilon), (\epsilon, d, \epsilon), \dots, (\epsilon, 3, \epsilon)(1, 2, \epsilon)]^$ et $u = s_0 \dots \sigma^h(s_h) = \sigma^{u_0}(2) \dots \sigma^{u_n}(2)$; le mot $\sigma^{u_0}(2) \dots \sigma^{u_n}(2)$ est une écriture automatique.*

L'automate des préfixes-suffixes nous permet de déduire que tout développement automatique de l'automate positif sera effectivement un mot de $\delta(\Omega_g^+)$. Si $\sigma^{u_0}(2) \dots \sigma^{u_n}(2) = \sigma^{v_0}(2) \dots \sigma^{v_m}(2)$ et $v_0 > u_0$, alors $2 \dots \sigma^{u_n-u_0}(2) = \sigma^{v_0-u_0}(2) \dots \sigma^{v_m-u_0}(2)$, impliquant que $u_0 = v_0$ (la première lettre de $\sigma^k(2)$ est différente de 2 si $k > 0$). Par suite, $n = m$ et $u_i = v_i$ pour tout $0 \leq i \leq n$. \square

6.1.6 Arbre invariant de σ^{-1}

L'application inverse à σ est définie par

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} &: 1 \mapsto d \\ &2 \mapsto d^{-1}1 \\ &k \mapsto (k-1) \text{ pour } 3 \leq k \leq d. \end{aligned}$$

Sa matrice d'incidence $M_{\sigma^{-1}}$ ($\neq M_{\sigma}^{-1}$) est définie par

- $M_{\sigma^{-1}}(d, 1) = M_{\sigma^{-1}}(d, 2) = 1$,
- pour tout $2 \leq i \leq d$, $M_{\sigma^{-1}}(i-1, i) = 1$,
- $M_{\sigma^{-1}}$ est nulle partout ailleurs.

Le développement du déterminant de $M_{\sigma^{-1}} - xId$ par rapport à la première colonne donne $(-x)((-x)^{d-1} + (-1)^d) + (-1)^{d-1}$. Cette matrice est primitive et admet donc une valeur propre réelle dominante η (> 1); η vérifie $\eta^d = \eta + 1$. Le vecteur $[1 \ \eta^{d-1} \ \eta^{d-2} \ \dots \ \eta^2 \ \eta]$ est un vecteur propre à gauche associé à η .

On construit maintenant un arbre invariant (voir 2.3.1 page 47) associé à σ^{-1} . On note Φ_1 la classe extérieure de σ^{-1} .

Un chemin $\alpha : [0, 1] \rightarrow R_d$ où $\alpha(0) = \alpha(1) = *$ détermine un élément $\langle \alpha \rangle$ du groupe fondamental $\pi_1(R_d, *)$ de R_d . On identifie $\pi_1(R_d, *)$ avec le groupe libre F_d ; si e est un arc de R_d , $\langle e \rangle$ est un élément de $A \cup A^{-1}$. Le vecteur $v = [1 \ \eta^{d-1} \ \eta^{d-2} \ \dots \ \eta^2 \ \eta]$ est un vecteur propre à gauche de $M_{\sigma^{-1}}$ associé à η . On munit R_d de la métrique telle que si e_1, e_2, \dots, e_d sont les arcs de R_d , alors e_i est de longueur $v(i)$.

On note h_0 l'équivalence d'homotopie de R_d dans R_d vérifiant, pour tout arc e de R_d , $\langle h_0(e) \rangle = \sigma^{-1}(\langle e \rangle)$. h_0 multiplie la longueur de tout chemin légal par η et on pourra vérifier que c'est un représentant topologique train-track de Φ_1 .

On note $p : \widetilde{R}_d \rightarrow R_d$ une projection du revêtement universel \widetilde{R}_d de R_d . La métrique sur R_d induit une distance d_0 sur \widetilde{R}_d et F_d agit sur \widetilde{R}_d par isométries. On définit une application (continue) $h : \widetilde{R}_d \rightarrow \widetilde{R}_d$ qui vérifie, pour tout arc e de R_d et pour tout relevé \tilde{e} de e , $p \circ h(\tilde{e}) = h_0(e)$ et telle que

$$\sigma^{-1}(w)h = hw$$

pour tout élément w de F_d .

On définit pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la pseudo-distance

$$d_k(x, y) = \eta^{-k} d_0(h^k(x), h^k(y))$$

sur \widetilde{R}_d et on note $d_\infty = \lim_{k \rightarrow +\infty} d_k$. d_∞ est une pseudo-distance sur \widetilde{R}_d et une distance sur $T = \widetilde{R}_d / \sim$ où $x \sim y$ si et seulement si $d_\infty(x, y) = 0$. F_d agit encore sur T par isométries et h induit l'application H sur T . H est une homothétie de rapport η qui vérifie

$$\sigma^{-1}(w)H = Hw$$

pour tout élément w de F_d . Finalement, T est un arbre invariant de σ^{-1} .

On remarque que pour tout $a \in A$, $X_a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma^{-nd}(a^{-1})$ est fixe par σ^{-d} ; l'indice (défini page 47) de σ^{-d} est donc > 0 quel que soit le rang de son sous-groupe fixe. L'homothétie H admet donc un point fixe dans T (unique puisque $\eta > 1$) et on le note P .

L'application Q

T est un arbre réel et F_d agit sur T de manière non-triviale, minimale, avec stabilisateurs d'arcs triviaux. L'action est de plus à orbites denses ($\eta > 1$). On définit l'application Q de ∂F_d dans $\overline{T} \cup \partial T$ comme dans la section 2.3.1 (page 48).

6.1.7 Substitution d'arbre

On définit une substitution d'arbre τ et un arbre initial L_0^s . On va associer à chaque arbre $L_n^s = \tau^n(L_0^s)$, un arbre réel L_n de \mathcal{R}^d . La suite $(L_n)_n$ obtenue sera convergente vers un arbre réel compact L de \mathcal{T}^d , et on montrera par la suite que L et $Q(\Omega^+)$ sont isomorphiquement isométriques.

Substitution d'arbre simplicial

Soit $A_\tau = \{1, \dots, d, d+1, \dots, 2d-2\}$ un alphabet. Si X_i est un élément de $\mathcal{S}_E(A_\tau)$, $X_i = (\{x, y\}, \{(x, y, i)\})$, où $i \in A_\tau$, τ est la substitution d'arbre définie par :

- $\tau(X_1) = X_d$,
- l'image de X_2 est représentée figure 6.6,
- $\tau(X_i) = X_{i-1}$ si $3 \leq i \leq d$,
- $\tau(X_{d+1}) = X_1$,
- $\tau(X_i) = X_{i-1}$ si $d+2 \leq i \leq 2d-2$.

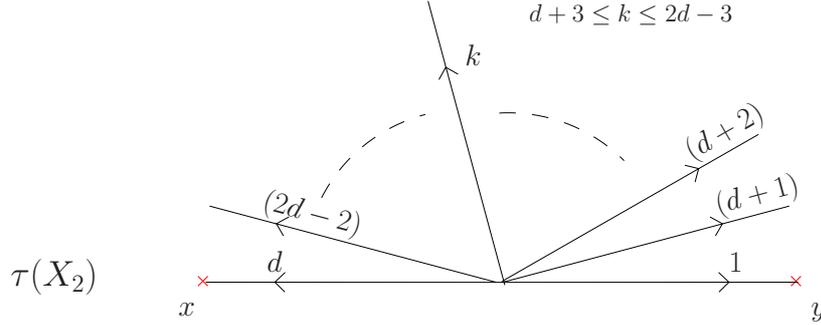


FIG. 6.6: Substitution d'arbre associée à σ .

Remarque 6.1.17 On peut définir la matrice d'incidence M_τ associée à τ ; M_τ est une matrice $(2d-2) \times (2d-2)$ et $M_\tau(i, j)$ est le nombre d'arêtes colorées par i dans $\tau(X_j)$. Le spectre de M_τ est constitué du spectre de M_σ et de $d-2$ valeurs propres de module 1.

Avant de poursuivre, on définit la **matrice tronc** M_{tronc} . Si X_i est un arbre de $\mathcal{S}_E(A_\tau)$ de couleur i et de sommets x et y , le **tronc** de $\tau(X_i)$ est le sous-arbre uniquement constitué des arêtes du plus court chemin entre x à y ; x et y sont alors les seuls sommets de degré 1, les autres sont de degré 2. M_{tronc} est donc définie par

- $M_{tronc}(d, 1) = 1$,
- $M_{tronc}(1, 2) = M_{tronc}(d, 2) = 1$,
- $M_{tronc}(1, d+1) = 1$,
- pour tout $3 \leq i \leq 2d-2$ où $i \neq d+1$, $M_{tronc}(i-1, i) = 1$,
- M_{tronc} est nulle partout ailleurs.

Le spectre de cette matrice contient le spectre de $M_{\sigma^{-1}}$ et 0 (d'ordre $d-2$). η est donc sa valeur propre dominante. On pourra vérifier que le vecteur

$$[1 \quad \eta^{d-1} \quad \eta^{d-2} \quad \dots \quad \eta^2 \quad \eta \quad \eta^{-1} \quad \eta^{-2} \quad \dots \quad \eta^{-(d-3)} \quad \eta^{-(d-2)}]$$

est un vecteur propre à gauche associé à η .

On choisit un élément X_2 de $\mathcal{S}_E(A_\tau)$ d'arête colorée par 2 et on définit $L_0^s = \tau^{d-1}(X_2)$.

Propriété 6.1.18 L_0^s est constitué d'une racine et de d arêtes colorées $1, 2, \dots, d$ sortant de cette racine.

On définit également $L_n^s = \tau^n(L_0^s)$.

Proposition 6.1.19 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n^s est un arbre discerné.

Il faut vérifier qu'aucun chemin de la forme \overline{kk} , $1 \leq k \leq 2d - 2$ n'apparaît dans les chemins de L_n^s . Une paire \overline{kk} sera dite **illégal**.

Pour tout $1 \leq i \leq 2d - 2$, $X_i = (\{x, y\}, \{(x, y, i)\})$ est un élément de $\mathcal{S}_E(A_\tau)$; on note x_i l'unique sommet de $\tau(X_i)$ à distance 1 de x et y_i l'unique sommet de $\tau(X_i)$ à distance 1 de y . On rappelle que $\gamma_{\tau(X_i)}$ associe un mot de $(A_\tau \cup \overline{A_\tau})^*$ (où $\overline{A_\tau} = \{\overline{1}, \dots, \overline{d}, \overline{(d+1)}, \dots, \overline{(2d-2)}\}$) à tout couple de sommets de $\tau(X_i)$ (cf. paragraphe 4.1.1 page 60).

On définit l'application suivante pour tout k, h de A_τ ,

$$\begin{array}{rcl} \varphi & : & (A_\tau \cup \overline{A_\tau})^2 \rightarrow (A_\tau \cup \overline{A_\tau})^2 \\ & & \overline{kh} \mapsto \gamma_{\tau(X_k)}(y_k, y) \gamma_{\tau(X_h)}(x, x_h) \\ & & \overline{k\overline{h}} \mapsto \gamma_{\tau(X_k)}(x_k, x) \gamma_{\tau(X_h)}(x, x_h) \\ & & \overline{k\overline{h}} \mapsto \gamma_{\tau(X_k)}(y_k, y) \gamma_{\tau(X_h)}(y, y_h) \\ & & \overline{\overline{kh}} \mapsto \gamma_{\tau(X_k)}(x_k, x) \gamma_{\tau(X_h)}(y, y_h) \end{array}$$

Par la propriété 6.1.18, il suffit en fait de montrer que pour tout $1 \leq h, k \leq d$, \overline{kh} ne produit aucune paire illégale par applications successives de φ .

Lemme 6.1.20 *Si $1 \leq k, h \leq d$ et $k \neq h$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{-n}(\overline{kh})$ n'est pas une paire illégale.*

Preuve *Il suffit de remarquer que si $k - h = m[d]$, alors $\varphi(\overline{kh}) = k_1 \overline{h_1}$ avec $k_1 - h_1 = m[d]$. \square*

Proposition 6.1.21 *Si $1 \leq k, h \leq d$ et $k \neq h$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{-n}(\overline{kh})$ n'est pas une paire illégale.*

Preuve *On suppose d'abord que $k < h$; on a alors :*

$$\begin{array}{rcl} \varphi^{k-2}(\overline{kh}) & = & \overline{2}(h - (k - 2)), \\ \varphi^{k-1}(\overline{kh}) & = & d(h - (k - 1)), \\ \varphi^{(k-1)+(h-(k-1)-2)}(\overline{kh}) & = & (d - (h - (k - 1) - 2))2, \\ \varphi^{(k-1)+(h-(k-1)-1)}(\overline{kh}) & = & (d - (h - (k - 1) - 1))\overline{d}. \end{array}$$

Si $k < h$, alors $(d - (h - (k - 1) - 1)) \neq d$ et on conclut grâce au lemme précédent. Le même raisonnement peut être utilisé si $h < k$. \square

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n^s est un arbre discerné.

La figure 6.7 représente les boules de rayon 1 des arbres L_n^s . On remarque de plus que pour tout $k \geq d$, $B_1(L_k^s) = B_1(L_d^s)$.

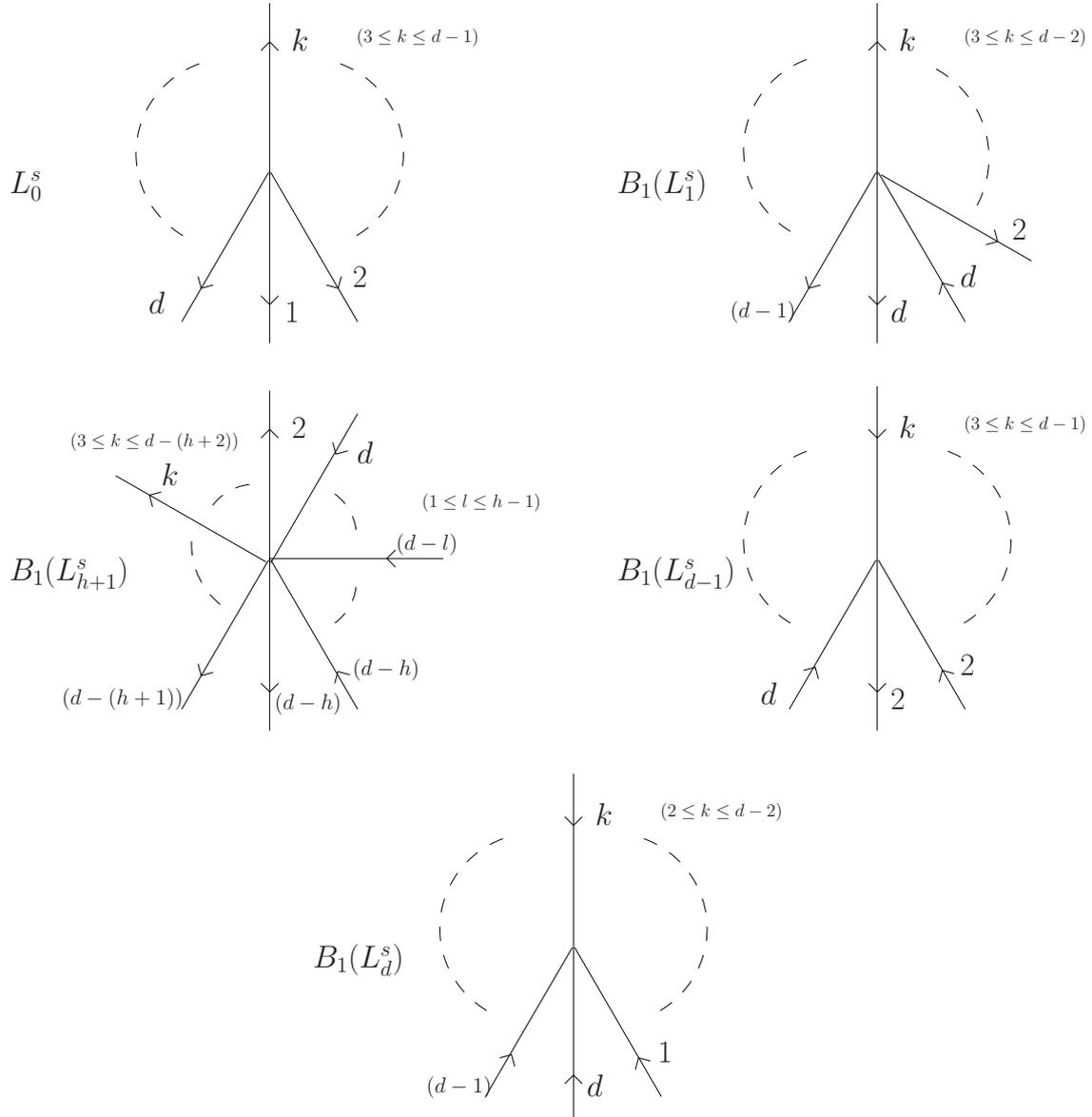
Il nous est nécessaire pour la suite de définir le morphisme $pr : (A_\tau \cup \overline{A_\tau})^* \rightarrow F_d$ tel que

- $pr(k) = k$ pour $k \in \{1, \dots, d\}$,
- $pr((d+k)) = \sigma^k(1)$ pour $k \in \{1, \dots, d-2\}$,
- $pr(\overline{k}) = k^{-1}$ pour $k \in \{1, \dots, d\}$,
- $pr(\overline{(d+k)}) = \sigma^k(1^{-1})$ pour $k \in \{1, \dots, d-2\}$.

Définitions 6.1.22 *Pour tout entier n , on appelle BT_n^s l'ensemble des sommets de L_n^s , BP_n^s l'ensemble des points de branchement de L_n^s (c'est-à-dire les sommets de degré d) et TP_n^s l'ensemble des feuilles de L_n^s (c'est-à-dire les sommets de degré 1).*

Si x_0 est la racine de L_n^s , pour tout élément x de BT_n^s , il existe un chemin minimal de x_0 à x et un mot $\gamma_n(x_0, x)$ de $(A_\tau \cup \overline{A_\tau})^*$ associé (on pourra se reporter au paragraphe 4.1.1 page 59).

Proposition 6.1.23 *Si x et y sont deux sommets distincts de L_n^s , alors on a $pr(\gamma_n(x_0, x)) \neq pr(\gamma_n(x_0, y))$.*

FIG. 6.7: Application de τ sur une boule de rayon 1.

Preuve L'arbre L_n^s est discerné, et on a directement $\gamma_n(x_0, x) \neq \gamma_n(x_0, y)$. Le résultat est immédiat si aucun des deux mots ne contient de lettres de $\{d+1, \dots, 2d-2\}$ (en se rappelant que puisque L_n^s est discerné, il n'y aura pas d'annulations). Si $\gamma_n(x_0, x)$ contient la lettre $(d+k) \in \{d+1, \dots, 2d-2\}$ et que $\text{pr}(\gamma_n(x_0, x)) = \text{pr}(\gamma_n(x_0, y))$, alors $\gamma_n(x_0, y)$ contient soit la paire 12 (dans ce cas L_{n+1}^s n'est pas discerné), soit une paire $(d+h)(h+2)$ pour un certain $h < k$ (dans ce cas L_{n+h+1}^s n'est pas discerné); les deux cas contredisent la proposition 6.1.19. \square

Réalisation

On se permettra de confondre un point de \mathcal{R}^d avec ses écritures (réduites ou non). Soit x_0 la racine de L_0^s ; pour tout $1 \leq j \leq d$, il existe un sommet x_j tel que (x_0, x_j, j) est une arête de L_0^s . On note ν_0 l'application définie par

$$\begin{aligned}
\nu_0 & : BT_0^s \rightarrow \mathcal{R}^d \\
& \quad x_0 \mapsto O \\
& \quad x_1 \mapsto 0^1 \\
& \quad x_j \mapsto (j-1)\eta^{d-j+1} \quad (2 \leq j \leq d).
\end{aligned}$$

On rappelle que le vecteur

$$vp = [1 \quad \eta^{d-1} \quad \eta^{d-2} \quad \dots \quad \eta^2 \quad \eta \quad \eta^{-1} \quad \eta^{-2} \quad \dots \quad \eta^{-(d-3)} \quad \eta^{-(d-2)}]$$

est un vecteur propre à gauche (associé à η) de la matrice tronc de la substitution d'arbre. On va construire par récurrence une suite $(\nu_n)_n$ de fonctions avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\nu_n : BT_n^s \rightarrow \mathcal{R}^d$. On suppose ν_{n-1} construite et telle que si (y_1, y_2, k) est une arête de L_{n-1}^s , alors $\nu_{n-1}(y_1)^{-1}\nu_{n-1}(y_2) = j^p$ pour un certain $0 \leq j \leq d-1$ et $|p| = \eta^{-(n-1)}vp(k)$. Pour tout sommet x de L_{n-1}^s , x est également un sommet de L_n^s par définition de la substitution d'arbre. Pour ces points, on définit

$$\nu_n(x) = \nu_{n-1}(x).$$

Si y est un point de branchement de $BT_n^s \setminus BT_{n-1}^s$, alors il existe deux sommets y_1 et y_2 de BT_{n-1}^s tels que $(y, y_1, 1)$ et (y, y_2, d) sont des arêtes de L_n^s et $\nu_{n-1}(y_1)^{-1}\nu_{n-1}(y_2) = j^p$ pour un certain $0 \leq j \leq d-1$ et $|p| = \eta^{-(n-1)+(d-1)}$. Pour $\alpha = \frac{p}{|p|}$, on définit alors

$$\nu_n(y) = \nu_{n-1}(y_1)j^{\alpha\eta^{-n}}.$$

Pour ce même y , il existe $d-2$ sommets z_1, \dots, z_{d-2} de $BT_n^s \setminus BT_{n-1}^s$ tels que pour tout $1 \leq h \leq d-2$, $(y, z_h, (d+h))$ est une arête de L_n^s . On définit alors

$$\nu_n(z_h) = \nu_{n-1}(y_1)j^{\alpha\eta^{-n}}k^{\eta^{-n-h}}$$

où $k = j + h[d]$.

Propriété 6.1.24 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si (x_i, x_j, k) est une arête de L_n^s , alors la longueur du segment $[\nu_n(x_i), \nu_n(x_j)]$ est $vp(k)\eta^{-n}$.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'arbre L_n de \mathcal{F}^d comme l'enveloppe convexe des points de $\nu_n(BT_n^s)$. De manière évidente, $L_{n-1} \subset L_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$. De plus, tout point de L_n est à une distance inférieure ou égale à η^{-1-n} de L_{n-1} , ce qui fait de la suite $(L_n)_n$ une suite de Cauchy de \mathcal{F}^d qui est complet. On note finalement

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n.$$

Un point de branchement d'un arbre réel est un point duquel partent au moins 3 germes ; un point terminal est un point tel qu'un unique germe part de ce point.

Définitions 6.1.25 *On notera $BT_n = \nu_n(BT_n^s)$ l'union des points de branchement et des points terminaux de L_n , BP_n est l'ensemble de ses points de branchement, et TP_n est l'ensemble de ses points terminaux.*

On note que pour tout $n \in \mathbb{N}$, ν_n est une bijection BT_n^s dans BT_n .

Substitution d'arbre réel

A titre indicatif, on donne la définition de la substitution d'arbre réel associée. Toute l'information dont nous avons besoin pour continuer est présente dans les définitions du paragraphe précédent, et le seul vrai intérêt apporté par cette substitution d'arbre réel est la dimension de Hausdorff de l'arbre limite.

On se place dans \mathcal{R}^d ; pour tout élément de $\Theta = \{1, 21, 22, \dots, 2(d-1), 2d, 3, 4, \dots, 2d-2\}$, on définit une similitude de Λ_d .

- $\zeta_k = Id$ ($k = 1$ ou $3 \leq k \leq 2d-2$),
- $\zeta_{2d} : [O, 0^1] \mapsto [0\eta^{-(d-1)}, O]$,
- $\zeta_{2(d-1)} : [O, 0^1] \mapsto [0\eta^{-(d-1)}, 0^1]$,
- $\zeta_{2h} : [O, 0^1] \mapsto [0\eta^{-(d-1)}, 0\eta^{-(d-1)}h\eta^{-(d+h)}]$, ($1 \leq h \leq d-2$).

On définit également le sous-shift Σ_ζ de type fini associé à ζ par l'ensemble des mots de longueur 2 possibles.

- $1d$,
- $(2d)d, (2(d-1))1$,
- pour tout $1 \leq h \leq d-2$, $(2h)(d+h)$,
- pour tout $1 \leq h \leq d$, $3(2h)$,
- $(d+1)1$,
- pour tout $4 \leq k \leq 2d-2$ où $k \neq d+1$, $k(k-1)$.

Les cylindres de Σ_ζ sont notés $C_1, C_{21}, \dots, C_{2d}, C_k$ ($3 \leq k \leq 2d-2$) et on définit $C_2 = \bigcup_{1 \leq h \leq d} C_{2h}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'arbre L_n défini au paragraphe précédent est isomorphiquement isométrique à l'arbre

$$L'_n = \bigcup_{x_1 \dots x_m \in C_2} \zeta_{x_m} \circ \dots \circ \zeta_{x_1}([O, 0\eta^{2d-2}])$$

où $m = n + d - 1$. La suite $(L'_n)_n$ converge vers un arbre réel compact L' isomorphiquement isométrique à L .

La substitution d'arbre étant particulièrement simple, il n'est pas difficile de se rendre compte que L' est l'invariant d'une construction graphe-dirigée dont le graphe est constitué d'un unique sommet et de d arêtes dont les similitudes associées sont de ratios $\eta^{-(d-1)}, \dots, \eta^{-(2d-2)}$. Si le rayon spectral d'une matrice (1×1) pondérée par α est égal à 1, alors l'équation

$$\eta^{\alpha(2d-2)} = \sum_{0 \leq k \leq d-1} \eta^{\alpha k}$$

est vérifiée. En remarquant que λ (valeur propre dominante de la matrice d'incidence associée à σ) vérifie l'équation $\lambda^{(2d-2)} = \sum_{0 \leq k \leq d-1} \lambda^k$, on déduit que le réel $\alpha = \frac{\ln(\lambda)}{\ln(\eta)}$ est solution de

l'équation. C'est la dimension de Hausdorff de L . Cette dimension est approximativement égale à 1.359 pour la substitution sur 3 lettres ($d = 3$).

Remarque 6.1.26 *On note la cohérence de ce résultat avec la remarque 6.1.17 (la valeur propre principale de la matrice d'incidence de τ est λ) et la propriété 6.1.24 (les longueurs des arêtes sont divisées par η à chaque application de la substitution d'arbre); λ joue le rôle de facteur d'expansion, et η celui de facteur de renormalisation.*

6.1.8 De $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$ à Ω_0^+

On va se servir des automates positif et négatif des figures 6.5 et 6.4, ainsi que de la substitution d'arbre décrite en figure 6.6 afin de définir une bijection de Ω_0^+ dans $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$.

De $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n^s$ à $\delta(\Omega_0^+)$

Soit f_0 l'application définie par

$$\begin{aligned} f_0 & : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n^s & \rightarrow & F_d \\ & x & \mapsto & \sigma^p(pr(\gamma_p(x_0, x))) \end{aligned}$$

où p est n'importe quel entier tel que L_p^s contient x . En effet, la substitution d'arbre τ est définie de manière à ce que $\sigma(pr(\gamma_{p+1}(x_0, x))) = pr(\gamma_p(x_0, x))$. On pourra vérifier cela sur les chemins de longueur 1. Il vient que $f_0(x)$ ne dépend pas du choix de p .

Proposition 6.1.27 f_0 est injective.

Preuve Cela est direct grâce à la proposition 6.1.23 et puisque σ est un automorphisme. \square

Proposition 6.1.28 f_0 est une bijection de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n^s$ dans $\delta(\Omega_0^+)$.

On va montrer cela par étapes. On utilisera abondamment la décomposition des mots donnée par les automates positif et négatif.

Définition 6.1.29 On dira qu'un mot $f_0(x)$ **apparaît** à une étape k si $x \in BT_k^s$ et $x \notin BT_{k-1}^s$.

On va d'abord vérifier que tous les mots décrits par l'automate négatif sont atteints.

Les mots de l'automate négatif

On dira par convention que le mot ϵ est apparu à l'étape $-(d-2)$ et qu'aucun autre mot $u = f_0(x)$, où x est un point de branchement, n'est apparu durant les étapes ≤ 0 . On se reporte à la figure 6.7 et on rappelle qu'on a défini $L_0^s = \tau^{d-1}(X_2)$. Si un mot $u = f_0(x)$, où x est un point de branchement, apparaît à une étape n , alors pour tout $d-1 \leq k \leq 2d-2$, le mot $u\sigma^{n+k}(d^{-1})$ apparaît à l'étape $n+k$. De plus, pour tout $k \geq 2d-2$, le mot $u\sigma^{n+k}(1^{-1})$ apparaît en $n+k$. On remarque cependant que si $u\sigma^{n+k}(1^{-1})$ apparaît à l'étape $n+k$, alors le mot $f_0(y) = u\sigma^{n+k}(1^{-1})\sigma^{n+k}(d)$ est un mot apparu à une étape $< n+k$ et y est un point de branchement. On en déduit la propriété suivante.

Propriété 6.1.30 Tous les mots $u = f_0(x)$, où x est un point de branchement, apparus à une étape n , vérifient $u = f_0(y)\sigma^n(d^{-1})$, où y est un point de branchement, et $f_0(y)$ est apparu à une étape m , $n - (2d-2) \leq m \leq n - (d-1)$.

Proposition 6.1.31

- (1) Pour tout $1 \leq m \leq d-1$, le mot $\sigma^{m-1}(1^{-1})$ est le seul mot à apparaître à l'étape m .
- (2) Pour tout $m \geq d$, le plus long développement automatique apparaissant en m est $\sigma^{u_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{u_n}(1^{-1})$ ($n \geq 0$) avec,
 - si $m = n(2d-2) + k$, $d \leq k \leq 2d-2$, alors pour tout $0 \leq i \leq n$, $u_i = i(2d-2) + k$,
 - si $m = n(2d-2) + k$, $1 \leq k \leq d-1$, alors $u_0 = k-1$, et pour tout $1 \leq i \leq n$, $u_i = i(2d-2) + k$.
- (3) Tous les suffixes de ce mot sont apparus à une étape $\leq m$.
- (4) L'image par f_0 de tout point de branchement peut s'écrire sous la forme d'un développement automatique de l'automate négatif.

Preuve La partie (1) peut se lire directement sur la figure 6.7. On va démontrer les parties (2), (3) et (4) par récurrence forte. On suppose les 3 propriétés vraies aux rangs $< m$ et on suppose $m \geq d$.

(2) On déduit de la propriété 6.1.30 que le développement le plus long apparaissant en m (que l'on notera l_m jusqu'à la fin de cette preuve) est $u\sigma^m(d^{-1})$ où u est le plus long développement apparaissant en $m - (d - 1)$.

Si $m = n(2d - 2) + k$, $d \leq k \leq 2d - 2$, on note $h = k - (d - 1)$ et $m - (d - 1) = n(2d - 2) + h$; par l'hypothèse de récurrence,

$$l_m = \sigma^{v_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{v_n}(1^{-1})\sigma^m(d^{-1}) \text{ où } v_0 = h - 1 \text{ et pour tout } 1 \leq i \leq n, v_i = i(2d - 2) + h.$$

On rappelle que $\sigma^d(1^{-1}) = 1^{-1}\sigma^{d-1}(1^{-1})$ et que $\sigma(d^{-1}) = 1^{-1}$. On a alors

$$l_m = \sigma^{v'_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{v'_{2n}}(1^{-1})\sigma^{m-1}(1^{-1}) \text{ où } v'_0 = v_0 \text{ et pour tout } 1 \leq j \leq 2n, v'_j = j(d - 1) + h - 1.$$

Pour tout j pair, $\sigma^{v'_j}(1^{-1})\sigma^{v'_{j+1}}(1^{-1}) = \sigma^{v'_{j+1}+1}(1^{-1})$, et $\sigma^{v'_{2n}}(1^{-1})\sigma^{m-1}(1^{-1}) = \sigma^m(1^{-1})$. On obtient finalement

$$l_m = \sigma^{u_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{u_n}(1^{-1}) \text{ où pour tout } 0 \leq i \leq n, u_i = i(2d - 2) + k.$$

Si $m = n(2d - 2) + k$, $1 \leq k \leq d - 1$ ($n \geq 1$ puisque $m \geq d$), on note $h = (2d - 2) + k - (d - 1)$ et $m - (d - 1) = (n - 1)(2d - 2) + h$; par l'hypothèse de récurrence,

$$l_m = \sigma^{v_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{v_{n-1}}(1^{-1})\sigma^m(d^{-1}) \text{ où pour tout } 0 \leq i \leq n, v_i = i(2d - 2) + h.$$

Toujours par $\sigma^d(1^{-1}) = 1^{-1}\sigma^{d-1}(1^{-1})$ et $\sigma(d^{-1}) = 1^{-1}$, on a alors

$$l_m = \sigma^{v'_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{v'_{2n-1}}(1^{-1})\sigma^{m-1}(1^{-1}) \text{ où pour tout } 0 \leq j \leq 2n - 1, v'_j = j(d - 1) + k - 1.$$

Pour tout j impair, $\sigma^{v'_j}(1^{-1})\sigma^{v'_{j+1}}(1^{-1}) = \sigma^{v'_{j+1}+1}(1^{-1})$, et $\sigma^{v'_{2n-1}}(1^{-1})\sigma^{m-1}(1^{-1}) = \sigma^m(1^{-1})$. On obtient finalement

$$l_m = \sigma^{u_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{u_n}(1^{-1}) \text{ où } u_0 = k - 1 \text{ et pour tout } 1 \leq i \leq n, u_i = i(2d - 2) + k.$$

(3) On va étudier le développement le plus court apparaissant à l'étape m (on le notera c_m), et on va montrer qu'il vérifie $|c_m| = |l_{m-1}| + 1$, où l_{m-1} est le plus grand développement de l'étape $m - 1$.

Si $m = d$, $c_m = \sigma^d(d^{-1}) = \sigma^{d-1}(1^{-1})$ et $l_{m-1} = \sigma^{d-2}(1^{-1})$ d'après (1). Si $d + 1 \leq m \leq 2d - 1$, $c_m = 1^{-1}\sigma^m(d^{-1}) = 1^{-1}\sigma^{m-1}(1^{-1})$ et $l_{m-1} = \sigma^{m-1}(1^{-1})$. $|c_m| = |l_{m-1}| + 1$ dans les deux cas.

Si $m > 2d - 1$, on remarque que si $l_{m-1} = \sigma^{v_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{v_n}(1^{-1})$ (on note que dans ce cas $v_n = m - 1$), alors $l_{m-(2d-1)} = \sigma^{v_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{v_{n-1}}(1^{-1})$. Si $v_0 < d$, par hypothèse de récurrence, $c_{m-(2d-2)} = \sigma^{v_0+1}(1^{-1}) \dots \sigma^{v_{n-1}}(1^{-1})$, et par 6.1.30, il produit

$$c_m = \sigma^{v_0+1}(1^{-1}) \dots \sigma^{v_{n-1}}(1^{-1})\sigma^{m-1}(1^{-1})$$

à l'étape m .

Si $v_0 \geq d$, l'hypothèse de récurrence donne $c_{m-(2d-2)} = 1^{-1}\sigma^{v_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{v_{n-1}}(1^{-1})$, et par 6.1.30, il produit

$$c_m = 1^{-1}\sigma^{v_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{v_{n-1}}(1^{-1})\sigma^{m-1}(1^{-1})$$

à l'étape m . Dans les deux cas, $|c_m| = |l_{m-1}| + 1$.

Finalement, par hypothèse de récurrence, tous les suffixes de $l_{m-(d-1)}$ dont $c_{m-(2d-2)}$ (si $m > 2d - 2$) ou ϵ (si $m \leq 2d - 2$) est suffixe sont apparus entre les étapes $m - (2d - 2)$ et $m - (d - 1)$ et d'après 6.1.30, on en déduit que tout suffixe de l_m dont c_m est suffixe apparaît à

l'étape m .

(4) est une conséquence de (3). D'après 6.1.30, tout mot u apparaissant à l'étape m peut s'écrire $u = f_0(x)\sigma^m(d^{-1})$, où $f_0(x)$ est apparu entre les étapes p et $m - (d - 1)$, avec $p = \max(0, m - (2d - 2))$. u est alors un suffixe de l_m . Ce dernier pouvant s'écrire sous forme automatique, tous ses suffixes le peuvent également. \square

On rappelle que d'après la proposition 6.1.16, tout mot de $\delta(\Omega_d^+)$ peut s'obtenir par un développement automatique de l'automate négatif, et tout développement automatique donne un mot de $\delta(\Omega_d^+)$. Si $BP_n^s \subset BT_n^s$ est l'ensemble des points de branchement de L_n^s , on peut maintenant énoncer le résultat suivant.

Proposition 6.1.32 *L'application f_0 est une bijection de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BP_n^s$ dans $\delta(\Omega_d^+)$.*

Preuve On a établi que f_0 est injective. D'après 6.1.31 (3), tout mot de $\delta(\Omega_d^+)$ est l'image par f_0 d'un point de branchement d'un certain L_n^s et par 6.1.31 (4), l'image par f_0 de tout point de branchement est un mot de $\delta(\Omega_d^+)$. \square

On déduit d'après 6.1.31 (1) et (2) que si v^{-1} est le plus long développement automatique apparaissant à une étape donnée, alors v est un mot bispécial (cf. proposition 6.1.13 page 96). On peut vérifier facilement que la réciproque est vraie. On suppose que $v = \sigma^{u_n}(1) \dots \sigma^{u_0}(1)$ est un mot bispécial. Si $n > 0$ ou $n = 0$ et $u_n \geq d$, alors v^{-1} est le plus grand développement apparaissant à l'étape u_n . Si $n = 0$ et $u_n \leq d - 2$, v^{-1} est le plus grand développement apparaissant à l'étape $u_n + 1$.

Propriété 6.1.33 *Si v est un mot bispécial, alors v^{-1} est le plus long développement automatique apparaissant à une certaine étape. Si v^{-1} est le plus long développement apparaissant à une certaine étape, alors v est bispécial.*

Les mots de l'automate positif

On s'intéresse maintenant aux points terminaux des arbres L_n^s ; l'ensemble de ces points sera noté TP_n^s . Si x est un point terminal qui apparaît à une étape n , alors x n'a qu'un unique voisin y dans BT_n^s , et y est un point de BP_n^s ; notamment, $f_0(y) \in \delta(\Omega_d^+)$. De plus, si x_0 est la racine de L_n^s , alors la dernière lettre de $\gamma_n(x_0, x)$ est $(d + k)$, avec $d + 1 \leq d + k \leq 2d - 2$. On rappelle que pour $1 \leq k \leq d - 2$, $pr(d + k) = \sigma^k(1)$.

Proposition 6.1.34 *Pour tout point x de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} TP_n^s$, $f_0(x)$ est un mot de $\delta(\Omega_d^+)$.*

Preuve Soit $v = \sigma^{u_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{u_n}(1^{-1})$ un développement automatique. On déduit de 6.1.31 (2) que si v apparaît à l'étape m , alors $m = u_n$ ou $m = u_n + 1$. Dans les deux cas, v est un suffixe propre de $\sigma^{m+1}(1^{-1})$ d'après 6.1.15 (page 98). Si v apparaît à l'étape m , alors les mots $v\sigma^m(\sigma^k(1)) = v\sigma^{m+k}(1)$, $1 \leq k \leq d - 2$ apparaissent en même temps. v est un suffixe propre de $\sigma^{m+k}(1^{-1})$ quel que soit $1 \leq k \leq d - 2$ puisque c'est un suffixe propre de $\sigma^{m+1}(1^{-1})$. Finalement, $v\sigma^{m+k}(1)$ est un suffixe propre de $\sigma^{m+k}(1)$ quel que soit k , et appartient donc à $\delta(\Omega_d^+)$. \square

On va montrer que tous les points de $\delta(\Omega_d^+)$ sont effectivement atteints. On note que pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, $\delta(\Omega_d^+)$ contient exactement d mots de longueur l ; ce sont les suffixes des passés (les mots de $A^{-\mathbb{N}^*}$) des mots (fixes par σ^d) $\omega_1, \dots, \omega_d$. Les dernières lettres de ces mots sont respectivement $1, 2, \dots, d$. On remarque également que :

- pour tout $0 \leq k \leq d - 1$, la dernière lettre de $\sigma^n(1)$ où $n = k[d]$ est $(k + 1)$,

- pour tout $0 \leq k \leq d-1$, si $n = k[d]$, $n > 0$, alors aucun mot apparaissant à l'étape n n'a pour dernière lettre k ou $(k+1)[d]$, mais pour tout $h \neq k, (k+1)[d]$, il existe un mot apparaissant en n qui finit par h .

Proposition 6.1.35 *L'application f_0 est une bijection de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} TP_n^s$ dans $\delta(\Omega_g^+)$.*

Preuve *Les mots $1, \dots, d$ apparaissent à l'étape 0. On va montrer que tous les mots finissant par la lettre 1 sont atteints. Le même raisonnement pourra être fait pour les autres mots.*

Des mots finissant par 1 apparaissent aux étapes $[id+2, id+d-1]$ quel que soit i dans \mathbb{N} . Quel que soit $2 \leq k \leq d-1$, ces mots s'écrivent $v\sigma^{id+k}(\sigma^{d-k}(1)) = v\sigma^{(i+1)d}(1)$ où v parcourt les mots négatifs qui apparaissent en $id+k$. Le mot positif concaténé ne dépend pas de k . D'après la proposition 6.1.31 (3), il existe un mot négatif $negmin_i$ de longueur minimale apparaissant à l'étape $id+2$ et un mot négatif $negmax_i$ de longueur maximal apparaissant à l'étape $id+(d-1)$ tels que tout mot de $\delta(\Omega_d^+)$ de longueur l , $|negmin_i| \leq l \leq |negmax_i|$, apparaît en $id+k$ pour un certain $2 \leq k \leq d-1$. On en déduit l'existence de deux entiers α_i et β_i tels que tout mot de $\delta(\Omega_g^+)$ finissant par 1 de longueur l , $\alpha_i \leq l \leq \beta_i$, apparaît en $id+k$ pour un certain $2 \leq k \leq d-1$.

Il nous suffit alors de montrer que $\alpha_0 = 2$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\beta_i + 1 = \alpha_{i+1}$. Le mot $\sigma^{d-1}(d^{-1})\sigma^d(1) = \sigma^{d-2}(23) = d1$ apparaît à l'étape $d-1$, assurant que $\alpha_0 = 2$. α_{i+1} est la longueur de la réduction de $negmax_{i+1}\sigma^{(i+2)d}(1)$ et β_i est la longueur de la réduction de $negmin_i\sigma^{(i+1)d}(1)$. On remarque que si u est le plus long mot négatif apparaissant à l'étape $id+1$, alors le plus long mot négatif de l'étape $id+1+2d-2 = (i+1)d+d-1$ est exactement $u\sigma^{(i+1)d+d-1}(1^{-1})$ (proposition 6.1.31 page 105). α_{i+1} est donc la longueur de la réduction de

$$u\sigma^{(i+1)d+d-1}(1^{-1})\sigma^{(i+2)d}(1) = u\sigma^{(i+1)d+d-1}(2) = u\sigma^{(i+1)d}(1).$$

Par ailleurs, $|negmin_i| = |u| + 1$ d'après 6.1.31 (3) et $|negmin_i\sigma^{(i+1)d}(1)| + 1 = |u\sigma^{(i+1)d}(1)|$ après réduction, ce qui donne effectivement $\beta_i + 1 = \alpha_{i+1}$ quel que soit $i \in \mathbb{N}$.

Finalement, tous les mots de $\delta(\Omega_g^+)$ finissant par 1 sont atteints. \square

Bijection de Ω_0^+ dans $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$

On a montré successivement que f_0 est une bijection de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BP_n^s$ dans $\delta(\Omega_d^+)$ et de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} TP_n^s$ dans $\delta(\Omega_g^+)$. On sait par ailleurs que δ est une bijection de Ω_0^+ dans $\delta(\Omega_0^+)$, et qu'il y a une bijection entre BT_n^s et BT_n pour tout n . On définit finalement la bijection

$$f_Q : \Omega_0^+ \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$$

6.1.9 Les points fixes dans l'arbre

On rappelle la proposition 6.1.31 (2). Si $1 \leq k \leq d-1$, $\sigma^{k-1}(1^{-1})$ est le seul développement automatique à apparaître à l'étape k ; $\sigma^d(1^{-1})$ est le plus grand à apparaître à l'étape d . Le plus long développement automatique (négatif) apparaissant en $u_n > d$ est

$v = \sigma^{u_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{u_n}(1^{-1})$ avec,

- si $u_n = k[2d-2]$, $d \leq k \leq 2d-2$, alors pour tout $0 \leq i \leq n$, $u_i = i(2d-2) + k$,
- si $u_n = k[2d-2]$, $1 \leq k \leq d-1$, alors $u_0 = k-1$, et pour tout $0 < i \leq n$, $u_i = i(2d-2) + k$.

Propriété 6.1.36 *On notera v le plus grand développement automatique négatif d'une étape donnée.*

Si $u_n = 0[2d-2]$, v^{-1} est exactement le début du développement en préfixe de $\omega_{d-1,1}$.

Si $u_n = k[2d - 2]$, $k \geq d$, v^{-1} est exactement le début du développement en préfixe de $\omega_{k-d+1,1}$.
 Si $u_n = k[2d - 2]$, $1 \leq k \leq d - 1$, v^{-1} est exactement le début du développement en préfixe de $\omega_{k,2}$.

Le mot v apparaît à l'étape u_n dans tous les cas. Les $(d - 2)$ mots positifs, obtenus par réduction des mots $v\sigma^{u_n+h}(1)$, $1 \leq h \leq d - 2$, apparaissent en même temps. On va donner une expression de ces mots positifs en termes de suffixes.

Remarque 6.1.37 $1^{-1}\sigma(1) = 2$, $1^{-1}\sigma^2(1) = 23$, $1^{-1}\sigma^h(1) = 2\sigma(2) \dots \sigma^{h-1}(2)$, si $3 \leq h \leq d - 1$.

On notera $v_{i,k} = \sigma^{i(2d-2)+k+1}(2)\sigma^{i(2d-2)+k+2}(2) \dots \sigma^{i(2d-2)+k+(d-3)}(2)\sigma^{i(2d-2)+k+(d-2)}(2)$ afin de simplifier les écritures. On obtient les résultats suivants grâce à la remarque précédente.

Si $u_n = i(2d - 2)$, pour tout $3 \leq h \leq d - 2$,

$$\begin{aligned} & \sigma^{2d-2}(1^{-1})\sigma^{2(2d-2)}(1^{-1}) \dots \sigma^{i(2d-2)}(1^{-1})\sigma^{i(2d-2)}(\sigma^h(1)) \\ &= \sigma^{2d-2}(2) v_{1,0} v_{2,0} \dots v_{i-1,0} \sigma^{i(2d-2)+1}(2)\sigma^{i(2d-2)+2}(2) \dots \sigma^{i(2d-2)+(h-1)}(2) \\ &= 12 v_{0,0} v_{1,0} v_{2,0} \dots v_{i-1,0} \sigma^{i(2d-2)+1}(2) \dots \sigma^{i(2d-2)+(h-1)}(2), \end{aligned}$$

pour $h = 1$,

$$12 v_{0,0} v_{1,0} v_{2,0} \dots v_{i-1,0},$$

pour $h = 2$,

$$12 v_{0,0} v_{1,0} v_{2,0} \dots v_{i-1,0} \sigma^{i(2d-2)+1}(2).$$

On obtient, pour chaque h , un début du développement en suffixe de $w_{d-1,1}$.

Si $u_n = i(2d - 2) + k$, $d \leq k \leq 2d - 3$, pour tout $3 \leq h \leq d - 2$,

$$\begin{aligned} & \sigma^k(1^{-1})\sigma^{2d-2+k}(1^{-1}) \dots \sigma^{i(2d-2)+k}(1^{-1})\sigma^{i(2d-2)+k}(\sigma^h(1)) \\ &= \sigma^k(2) v_{0,k} v_{1,k} \dots v_{i-1,k} \sigma^{i(2d-2)+k+1}(2)\sigma^{i(2d-2)+k+2}(2) \dots \sigma^{i(2d-2)+k+(h-1)}(2) \\ &= 12 \dots \sigma^{k-d}(2) v_{0,k} v_{1,k} \dots v_{i-1,k} \sigma^{i(2d-2)+k+1}(2) \dots \sigma^{i(2d-2)+k+(h-1)}(2), \end{aligned}$$

pour $h = 1$,

$$12 \dots \sigma^{k-d}(2) v_{0,k} v_{1,k} \dots v_{i-1,k},$$

pour $h = 2$,

$$12 \dots \sigma^{k-d}(2) v_{0,k} v_{1,k} \dots v_{i-1,k} \sigma^{i(2d-2)+k+1}(2).$$

On obtient, pour chaque h , un début du développement en suffixe de $w_{k-d+1,1}$.

Si $u_n = i(2d - 2) + k$, $1 \leq k \leq d - 1$, pour tout $3 \leq h \leq d - 2$,

$$\begin{aligned} & \sigma^{k-1}(1^{-1})\sigma^{2d-2+k}(1^{-1}) \dots \sigma^{i(2d-2)+k}(1^{-1})\sigma^{i(2d-2)+k}(\sigma^h(1)) \\ &= \sigma^{k-1}(1^{-1})\sigma^{d+k-1}(1) v_{1,k} v_{2,k} \dots v_{i-1,k} \sigma^{i(2d-2)+k+1}(2)\sigma^{i(2d-2)+k+2}(2) \dots \sigma^{i(2d-2)+k+(h-1)}(2) \\ &= \sigma^{k-1}(23 \dots d1) v_{1,k} v_{2,k} \dots v_{i-1,k} \sigma^{i(2d-2)+k+1}(2)\sigma^{i(2d-2)+k+2}(2) \dots \sigma^{i(2d-2)+k+(h-1)}(2) \\ &= (k + 1)\sigma^k(2) v_{0,k} v_{1,k} v_{2,k} \dots v_{i-1,k} \sigma^{i(2d-2)+k+1}(2) \dots \sigma^{i(2d-2)+k+(h-1)}(2), \end{aligned}$$

pour $h = 1$,

$$(k + 1)\sigma^k(2) v_{0,k} v_{1,k} v_{2,k} \dots v_{i-1,k},$$

pour $h = 2$,

$$(k + 1)\sigma^k(2) v_{0,k} v_{1,k} v_{2,k} \dots v_{i-1,k} \sigma^{i(2d-2)+k+1}(2).$$

On obtient, pour chaque h , un début du développement en suffixe de $w_{k,2}$.

6.1.10 Injection de L dans \overline{T}

L'application ξ

On rappelle que $\omega = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma^n(1)$ est le point fixe (unilatéral à droite) de σ et que P est le point de T fixe par H . On va montrer (proposition 6.1.38) que $Q(\omega) = P \in T$. f_Q étant une bijection de Ω_0^+ dans $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$, on peut définir l'application ξ ; pour tout v de Ω_0^+ ,

$$\begin{aligned} \xi & : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n &\rightarrow & T \\ & f_Q(v) &\mapsto & Q(v) \end{aligned}$$

Il s'agit de montrer que ξ conserve les distances. On notera ξ_n la restriction de ξ à BT_n , et on montrera que ξ_n conserve les distances quel que soit n .

La distance dans L est notée d_L ; on remarque que si s et t de BT_n sont à distance x , alors par définition de la substitution d'arbre, ils seront à distance x dans tout $L_m, m \geq n$, et à distance x dans L . On désignera également par d_L la distance dans n'importe quel L_n . Il nous suffira de montrer que pour tout couple (u, v) d'éléments de Ω_0^+ , $d_L(f_Q(u), f_Q(v)) = d_\infty(Q(u), Q(v))$.

On commence par ξ_0 . L'application ν_0 définie en 6.1.7 (page 102) nous permet de déduire

$$f_Q(\omega) = O, f_Q(1\omega) = 0^1, \forall 2 \leq k \leq d, f_Q(k\omega) = (k-1)\eta^{d-(k-1)}.$$

Propriété 6.1.38 *Pour tout élément $v \in F_d$, $Q(v\omega) = vP$.*

Par la propriété $\sigma^{-1}(v)H = Hv$ pour tout v de F_d , on déduit $d_\infty(P, \sigma^n(1)P) = \eta^{-n}d_\infty(P, 1P)$. Ainsi, la suite $(\sigma^n(1))_n$ converge vers ω , et la suite $(\sigma^n(1)P)_n$ converge vers P ; d'après la proposition 2.3.5 (page 48), $Q(\omega) = P$. L'équivariance de Q permet de vérifier la propriété.

On se réfère à la propriété 2.3.3 (page 48) pour déduire que

$$\begin{aligned} d_\infty(Q(\omega), Q(1\omega)) &= d_\infty(P, 1P) = 1 \\ d_\infty(Q(\omega), Q(k\omega)) &= d_\infty(P, kP) = \eta^{d-(k-1)} \text{ pour } 2 \leq k \leq d. \end{aligned}$$

Il faut encore s'assurer que pour tout $1 \leq k, h \leq d$, l'égalité

$$d_\infty(Q(k\omega), Q(h\omega)) = d_\infty(Q(\omega), Q(k\omega)) + d_\infty(Q(\omega), Q(h\omega))$$

est vérifiée. Il suffit pour cela qu'il n'y ait jamais d'annulations par applications successives de σ^{-1} à la paire $k^{-1}h$ (propriété 2.3.3). En fait, compte tenu de la définition de l'application pr , la proposition 6.1.21 page 101 (qui montre que l'arbre L_n^s est discerné quel que soit $n \in \mathbb{N}$) nous permet de conclure directement à cette absence d'annulation.

Finalement, ξ_0 conserve les distances. On suppose que ξ_{n-1} conserve les distances. La remarque suivante nous aidera à identifier les points de BT_n qui ne sont pas dans BT_{n-1} .

Remarque 6.1.39 *Si v est un élément de $\delta(\Omega_0^+)$, alors le mot réduit $v\omega$ est un antécédent (pour δ) de v .*

On en déduit que $BT_n \setminus BT_{n-1} = \bigcup_v \{f_Q(v\omega), f_Q(v\sigma^n(\sigma^h(1))\omega), 1 \leq h \leq d-2\}$, où l'union est faite sur les éléments $v \in \delta(\Omega_d^+)$ qui apparaissent à l'étape n . Pour chacun de ces v , les points $f_Q(v\sigma^n(1)\omega)$ et $f_Q(v\sigma^n(d)\omega)$ sont des éléments de BT_{n-1} . Vérifier que ξ_n conserve les distances revient à vérifier que la restriction de ξ_n aux $(d+1)$ -uplets

$$\{f_Q(v\omega), f_Q(v\sigma^n(1)\omega), f_Q(v\sigma^n(d)\omega), f_Q(v\sigma^n(\sigma^h(1))\omega), 1 \leq h \leq d-2\}$$

les conserve.

On rappelle que $\sigma^{-1}(1) = d$. La définition de ν_n (paragraphe 6.1.7 page 102) donne immédiatement

$$\begin{aligned} d_L(f_Q(v\omega), f_Q(v\sigma^n(\sigma^h(1))\omega)) &= \eta^{-(n+h)}, \text{ où } -1 \leq h \leq d-2, \\ d_L(f_Q(v\sigma^n(\sigma^h(1))\omega), f_Q(v\sigma^n(\sigma^k(1))\omega)) &= \eta^{-(n+h)} + \eta^{-(n+k)}, \text{ pour } -1 \leq h < k \leq d-2. \end{aligned}$$

Utilisant l'action par isométries de F_d sur T et la propriété $\sigma^{-1}(v)H = Hv$ pour tout $v \in F_d$, on obtient

$$d_\infty(Q(v\omega), Q(v\sigma^n(\sigma^h(1))\omega)) = d_\infty(P, \sigma^{n+h}(1)P) = \eta^{-(n+h)}, \text{ où } -1 \leq h \leq d-2.$$

Pour tout $-1 \leq h < k \leq d-2$, $\sigma^h(1^{-1})\sigma^k(1) = \sigma^k(\sigma^{-(k-h)}(1^{-1})1)$. Puisque $1 \leq k-h \leq d-1$, alors $\sigma^{-(k-h)}(1^{-1})$ est constitué d'une seule lettre l^{-1} , avec $l = d+1 - (k-h)$; notamment, $l \neq 1$. Appliquer σ^{-m} (pour tout $m \in \mathbb{N}$) à $l^{-1}1$ ne produira jamais d'annulations d'après la proposition 6.1.21 (page 101), et on peut conclure

$$d_\infty(Q(v\sigma^n(\sigma^h(1))\omega), Q(v\sigma^n(\sigma^k(1))\omega)) = d_\infty(P, \sigma^{n+k}(\sigma^{-(k-h)}(1^{-1})1)P) = \eta^{-(n+h)} + \eta^{-(n+k)}.$$

On en conclut que ξ_n conserve les distances. La récurrence est ainsi complétée; pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $\xi_n : BT_n \rightarrow T$ conserve les distances. On en déduit, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $BT_n \subset BT_{n+1}$, que la proposition suivante est vérifiée.

Proposition 6.1.40 *L'application ξ définie pour tout v de Ω_0^+ par*

$$\begin{aligned} \xi &: \bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n &\rightarrow & T \\ &f_Q(v) &\mapsto & Q(v) \end{aligned}$$

conserve les distances.

Densité des points de branchement et des points terminaux dans L

L_n est l'enveloppe convexe de BT_n . Si x est un point de L_n , alors il appartient à un certain segment $]s, t[$, où s et t sont des points de BT_n et tel que $]s, t[$ ne contient aucun point de BT_n . Un tel segment a forcément une de ses extrémités dans BP_n (l'ensemble des points de branchement de L_n). On en déduit, par la propriété 6.1.24 (page 103), que si $x \in L_n$, alors il existe $y \in BP_n$ tel que $d_L(x, y) \leq \eta^{-(n-(d-1))}$. Ce constat nous permet de montrer la proposition suivante.

Proposition 6.1.41 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BP_n$ est dense (pour la topologie métrique) dans L .

Preuve Soit $x \in L$ et $(x_n)_n$ une suite convergente vers x avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in L_n$. On choisit un réel ϵ et un entier m tel que $\epsilon - \eta^{-(m-(d-1))} > 0$. Il existe un entier $n_0 \geq m$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $d_L(x, x_n) < \epsilon - \eta^{-(m-(d-1))}$ et une suite $(y_n)_n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in BP_n$ et $d_L(x_n, y_n) \leq \eta^{-(n-(d-1))}$. Alors, pour tout $n \geq n_0 \geq m$, $d_L(x, y_n) < \epsilon - \eta^{-(m-(d-1))} + \eta^{-(n-(d-1))} \leq \epsilon$. \square

On peut montrer de la même manière que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} TP_n$ est également dense dans L .

ξ et f_Q étendent leurs domaines

Proposition 6.1.42 *Pour tout élément v de Ω^+ , il existe une suite $(v_n)_n$ de mots de $\mathfrak{L}(\Omega)$ telle que*

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \omega \in \Omega^+$,
- $(v_n)_n$ converge vers $v \in \Omega^+$,
- la suite $(v_n P)_n$ de T converge dans \overline{T} .

Preuve *Si v est un mot de $\Omega^+ \setminus \Omega_0^+$ ou de Ω_d^+ , il existe un mot uv de Ω et on peut associer au mot $S^{-1}(uv)$ une unique suite $(p_i, \alpha_i, s_i)_{i \geq 0}$ de l'automate des préfixes-suffixes vérifiant :*

$$\forall m_0 \in \mathbb{N}, \exists m > m_0 \text{ tel que } s_m \neq \epsilon.$$

On obtient grâce aux suffixes un développement automatique (de l'automate positif décrit figure 6.5 page 97) de v ; $v = \sigma^{u_0}(2) \dots \sigma^{u_n}(2) \dots$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $v_n = \sigma^{u_0}(2) \dots \sigma^{u_n}(2)$. La suite $(v_n)_n$ tend effectivement vers v , et puisque tout v_n s'écrit sous forme d'un développement automatique, $v_n \omega$ est bien un élément de Ω^+ . De plus,

$$d_\infty(v_{n-1}P, v_n P) = d_\infty(P, \sigma^{u_n}(2)P) = \eta^{-(u_n - (d-1))}$$

et $(v_n P)_n$ est une suite de Cauchy.

Si v est un mot de Ω_g^+ , la suite des suffixes du développement $(p_i, \alpha_i, s_i)_{i \geq 0}$ associé au mot $S^{-1}(uv)$ de Ω est ultimement constante égale à ϵ . On note $v_0 = \sigma^{u'_0}(2) \dots \sigma^{u'_{n_0}}(2)$, où $j = u'_{n_0}$ est l'entier maximal pour lequel $s_j \neq \epsilon$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^$, $v_n = v_0 \sigma^{u_n}(2)$, avec $u_n = u'_{n_0} + dn + 1$. La suite $(\sigma^{u_n}(2))_{n \geq 1}$ tend vers ω et la suite $(v_n)_n$ tend vers v . Tout v_n s'écrit sous forme d'un développement automatique ; $v_n \omega$ est dans Ω^+ . Enfin (pour $n \geq 2$),*

$$d_\infty(v_{n-1}P, v_n P) = d_\infty(\sigma^{u_{n-1}}(2)P, \sigma^{u_n}(2)P) \leq \eta^{-(u_{n-1} - (d-1))} + \eta^{-(u_n - (d-1))},$$

et $(v_n P)_n$ est encore une suite de Cauchy. \square

Pour tout élément v de $\Omega^+ \setminus \Omega_0^+$, on choisit une suite $(v_n)_n$ de mots finis comme dans la proposition 6.1.42. Puisque ξ conserve les distances sur $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$, la suite $(f_Q(v_n \omega))_n$ est également une suite de Cauchy de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$, et est donc convergente dans L (compact).

On définit alors $f_Q : \Omega^+ \rightarrow L$. La restriction de f_Q à Ω_0^+ a été définie précédemment. Si $v \in \Omega^+ \setminus \Omega_0^+$, alors on a mis en évidence une suite $(v_n)_n$ qui converge vers v et telle que $(f_Q(v_n \omega))_n$ converge dans L ; on note alors $f_Q(v) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_Q(v_n \omega)$.

Proposition 6.1.43 *Si u et v sont deux mots distincts de Ω^+ vérifiant $d_L(f_Q(u), f_Q(v)) = \rho$, alors $d_\infty(Q(u), Q(v)) = \rho$.*

Preuve *On choisit deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ de mots finis comme dans la proposition 6.1.42. $(u_n)_n$ tend vers u , $(v_n)_n$ tend vers v , et les suites $(f_Q(u_n \omega))_n$ et $(f_Q(v_n \omega))_n$ sont des suites de Cauchy de L qui tendent vers $f_Q(u)$ et $f_Q(v)$ respectivement ; on note $\rho = d_L(f_Q(u), f_Q(v))$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_L(f_Q(u_n \omega), f_Q(v_n \omega)) = d_\infty(Q(u_n \omega), Q(v_n \omega)) = d_\infty(u_n P, v_n P)$, et les suites $(u_n P)_n$ et $(v_n P)_n$ tendent vers $Q(u)$ et $Q(v)$ respectivement. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|\rho - d_L(f_Q(u_n \omega), f_Q(v_n \omega))| < \frac{\epsilon}{2}$ et $|d_\infty(Q(u), Q(v)) - d_\infty(u_n P, v_n P)| < \frac{\epsilon}{2}$, ce qui donne $|\rho - d_\infty(Q(u), Q(v))| < \epsilon$. Finalement, $d_\infty(Q(u), Q(v)) = \rho$. \square*

La proposition est en particulier vraie pour les mots $u, v \in \Omega^+$ tels que $f_Q(u) = f_Q(v)$, ce qui nous permet d'étendre l'ensemble de définition de ξ .

Remarque 6.1.44 La nouvelle application ξ définie pour tout $v \in \Omega^+$ par

$$\begin{aligned} \xi & : f_Q(\Omega^+) \rightarrow \overline{T} \\ & f_Q(v) \mapsto Q(v) \end{aligned}$$

conserve encore les distances. On en déduit, d'après la proposition 2.3.5 (page 48), que si $(v_n)_n$ (où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \omega \in \Omega^+$) converge vers $v \in \Omega^+$ et $(f_Q(v_n \omega))_n$ converge dans L , alors $(f_Q(v_n \omega))_n$ converge vers $f_Q(v)$.

Proposition 6.1.45 L'application $f_Q : \Omega^+ \rightarrow L$ ainsi définie est surjective.

Preuve Soit $x \in L \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$; $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} TP_n$ étant dense dans L , il existe une suite $(x_p)_p$ d'éléments de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} TP_n$ convergente vers x . f_Q est une bijection de Ω_g^+ dans $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} TP_n$; on choisit donc la suite $(u_p \omega)_p$ de Ω_g^+ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f_Q(u_p \omega) = x_p$. Par compacité de Ω^+ , on peut choisir une sous-suite $(v_p \omega)_p$ de $(u_p \omega)_p$ convergente vers un élément v de Ω^+ . Puisque $x \in L \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$, $v \notin \Omega_0^+$ et $|v_p| \rightarrow +\infty$ lorsque $p \rightarrow +\infty$. $(v_p)_p$ converge également vers v et $(f_Q(v_p \omega))_p$ converge vers x . La remarque 6.1.44 nous permet alors de conclure que $f_Q(v) = x$. \square

On peut donner grâce à cette proposition la nouvelle application $\xi : L \rightarrow \overline{T}$ définie pour tout $v \in \Omega^+$, par $\xi(f_Q(v)) = Q(v)$.

Théorème 6.1.46 L'application ξ définie pour tout v de Ω^+ par

$$\begin{aligned} \xi & : L \rightarrow \overline{T} \\ & f_Q(v) \mapsto Q(v) \end{aligned}$$

conserve les distances. ξ est une bijection isométrique de L dans $Q(\Omega^+)$.

6.1.11 Cœur et cylindres

Soit u^{-1} un élément de $\delta(\Omega_d^+)$ qui apparaît à l'étape n . $x = f_Q(u^{-1} \omega)$ est le centre des d points $x_h = f_Q(u^{-1} \sigma^n(\sigma^h(1)) \omega)$, pour $-1 \leq h \leq d-2$. Chacun de ces points sépare l'espace $\overline{\mathcal{R}^d} \setminus \{x_h\}$ en $2d$ composantes connexes, et l'une d'elle contient x . On notera $Cn_{x_h}(x)$ la composante connexe issue de x_h et contenant x . On définit alors

$$L(x) = (L \cap (\bigcap_{-1 \leq h \leq d-2} Cn_{x_h}(x))) \cup (\bigcup_{-1 \leq h \leq d-2} \{x_h\}).$$

On s'intéresse à l'antécédent de $L(x)$ par l'application f_Q .

Si u est un mot de $\mathcal{L}(\Omega)$, l'ensemble des mots de Ω^+ dont u est le préfixe est noté C_u , et l'ensemble des mots v de Ω^+ tels que uv est encore un mot de Ω^+ est noté P_u .

Images par f_Q des cylindres

Proposition 6.1.47 Si u^{-1} est un élément de $\delta(\Omega_d^+)$, alors $L(f_Q(u^{-1} \omega)) = f_Q(P_u)$.

On note qu'on peut rendre la propriété vraie pour le mot vide ϵ en considérant que celui-ci est apparu à l'étape $-(d-2)$; $L = L(f_Q(\omega)) = f_Q(P_\epsilon) = f_Q(\Omega^+)$.

Cela est en fait suffisant pour initialiser une récurrence. On supposera que pour tout mot u_0^{-1} de $\delta(\Omega_d^+)$ apparaissant à une étape $\leq n-1$, la propriété $L(f_Q(u_0^{-1} \omega)) = f_Q(P_{u_0})$ est vérifiée. Si $u^{-1} \in \delta(\Omega_d^+)$ apparaît à l'étape n , alors $v^{-1} = u^{-1} \sigma^n(d)$ est un mot de $\delta(\Omega_d^+)$ apparu à une étape antérieure m , et u^{-1} est un des d mots $v^{-1} \sigma^{m+(d-1)+h}(1^{-1})$, $-1 \leq h \leq d-2$ (cf. proposition 6.1.30 page 105). La propriété suivante est nécessaire pour continuer.

Propriété 6.1.48 *Si u^{-1} est un point de $\delta(\Omega_d^+)$ apparaissant à l'étape n , alors les mots $u^{-1}\omega$, $u^{-1}\sigma^n(\sigma^h(1))\omega$, $-1 \leq h \leq d-2$ sont des éléments de P_u . De plus les mots $u^{-1}\sigma^{n+(d-1)+h}(1^{-1})\omega$, $-1 \leq h \leq d-2$, sont également dans P_u .*

Une éventuelle récurrence nous permet de déduire la conséquence suivante.

Conséquence 6.1.49 *Si $x \in L(f_Q(u^{-1}\omega)) \cap BT_p$ pour un certain p , alors l'antécédent (par f_Q) de x dans Ω_0^+ est également dans P_u .*

$L(f_Q(u^{-1}\omega))$ est compact en tant que fermé du compact L . Si x est un point quelconque de $L(f_Q(u^{-1}\omega)) \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$, il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $L(f_Q(u^{-1}\omega)) \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} TP_n$ convergente vers x (par densité) et une suite $(w_n)_n$ d'éléments de $\delta(\Omega_g^+)$ tels que $w_n\omega \in P_u$ et $f_Q(w_n\omega) = x_n$. $(w_n\omega)_n$ est convergente (quitte à prendre une sous-suite) vers un mot w par compacité de Ω^+ . De plus, $|w_n| \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$ puisque $x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$. w est également la limite de $(w_n)_n$ et $w \in P_u$ (ce dernier étant ouvert-fermé); enfin, $f_Q(w) = x$ (par remarque 6.1.44). On obtient $L(f_Q(u^{-1}\omega)) \subset f_Q(P_u)$.

L'autre inclusion dépendra de la proposition suivante.

Proposition 6.1.50 *Si $v^{-1} \in \delta(\Omega_d^+)$ apparaît à l'étape m , et si $u_h^{-1} = v^{-1}\sigma^{m+(d-1)+h}(1^{-1})$, $-1 \leq h \leq d-2$, alors pour tout $-1 \leq i < j \leq d-2$*

$$P_{u_i} \cap P_{u_j} = \{v^{-1}\omega\}.$$

Preuve *Ecrire $u_h v^{-1}\omega = \sigma^{m+(d-1)+h}(1)\omega$, pour tout $-1 \leq h \leq d-2$ suffit à montrer que $v^{-1}\omega$ est effectivement dans l'intersection. ω est l'unique mot infini à droite spécial à gauche (6.1.7 page 95); on en déduit que $v^{-1}\omega$ est le seul élément de cette intersection. \square*

Maintenant, par l'hypothèse de récurrence, $L(f_Q(v^{-1}\omega)) = f_Q(P_v)$; en particulier, pour tout w de $\delta(\Omega_0^+)$ tel que $w\omega \in P_u$, on a $f_Q(w\omega) \in L(f_Q(v^{-1}\omega)) \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$ (en effet $P_u \subset P_v$ puisque v est suffixe de u). Par la conséquence 6.1.49 (qu'on appliquera en fait aux points u_h différents de u), et se rappelant que f_Q est une bijection de Ω_0^+ dans $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$, on déduit que $f_Q(w\omega) \in L(f_Q(u^{-1}\omega))$ (s'il était dans $L(f_Q(u_h^{-1}\omega)) \setminus L(f_Q(u^{-1}\omega))$, $u_h \neq u$, on aurait $w\omega \neq v^{-1}\omega$ et $w\omega \in P_{u_h} \cap P_u$, ce qui est impossible).

On choisit w dans $\Omega^+ \setminus \Omega_0^+$, w^- tel que $w^-w \in \Omega$, et u un suffixe de w^- (w est donc dans P_u). Le mot $S^{-1}(w^-w)$ a un développement en préfixes-suffixes dans lequel les préfixes (resp. suffixes) sont non tous nuls; on note $(p_i, \alpha_i, s_i)_{i \geq 0}$ ce développement. On obtient un développement automatique de w ; $w = \sigma^{u_0}(2) \dots \sigma^{u_n}(2) \dots$.

Proposition 6.1.51 *Il existe k_w tel que pour tout $k \geq k_w$, le mot $u\sigma^{u_0}(2) \dots \sigma^{u_k}(2)\omega$ est un mot de Ω_0^+ .*

Preuve *Le mot u est un suffixe de w^- . Il existe donc un rang h_w tel que le développement donné par la suite (finie) $(p_i, \alpha_i, s_i)_{i \leq h}$ où $h \geq h_w$, c'est-à-dire $\sigma^h(p_h) \dots p_0 \alpha_0 s_0 \dots \sigma^h(s_h)$, a exactement pour suffixe $u\sigma^{u_0}(2) \dots \sigma^{u_k}(2)$, où k est supérieur à un certain k_w . On pourra supposer que ce chemin fini se termine au sommet 1 sans que cela n'ait aucune influence sur les suffixes (on peut éventuellement l'allonger suivant les triplets dont le suffixe est vide). L'étude des points fixes de l'automorphisme extérieur nous assure qu'il n'y a pas de couple de mots bi-infinis ayant même passé et futurs différents sur $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S^n(\Omega_{per})$; la suite de préfixes-suffixes*

$(p_i, \alpha_i, s_i)_{i \leq h} [(\epsilon, 1, \epsilon)(\epsilon, d, \epsilon) \dots (\epsilon, 2, \epsilon)(1, 2, \epsilon)]^*$ correspond donc à un unique mot (par Γ^{-1}), et ce mot contient $u\sigma^{u_0}(2) \dots \sigma^{u_k}(2)\omega$, assurant que ce dernier est bien dans Ω_0^+ . \square

Finalement, si $k \geq k_w$, $\sigma^{u_0}(2) \dots \sigma^{u_k}(2)\omega \in P_u$. On note alors $(w_n)_n$ la suite définie pour tout n par $w_n = \sigma^{u_0}(2) \dots \sigma^{u_{k+n}}(2)$, pour n'importe quel $k \geq k_w$. $(w_n)_n$ converge vers w et pour tout n , $w_n\omega \in P_u$. On vérifiera facilement que la suite $(Q(w_n\omega))_n$ est alors une suite de Cauchy (F_d agit par isométries sur T et $w_{n-1}^{-1}w_n = \sigma^{u_{k+n}}(2)$), et converge vers $Q(w)$ par 2.3.5 (page 48). Par isométrie, la suite des $f_Q(w_n\omega)$ converge vers $f_Q(w)$ dans L . Or, pour tout n , $f_Q(w_n\omega)$ est un élément de $L(f_Q(u^{-1}\omega))$, qui est compact. On déduit finalement que $f_Q(w) \in L(f_Q(u^{-1}\omega))$.

La récurrence est donc complétée, et le résultat annoncé dans la proposition 6.1.47 est vérifié : si u^{-1} est un élément de $\delta(\Omega_d^+)$, alors $L(f_Q(u^{-1}\omega)) = f_Q(P_u)$.

Etude de la non-injectivité de f_Q

Soit v un élément de Ω^+ et v^- un mot infini à gauche tel que $v^-v \in \Omega$. Si $v^-v \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_{per}$, l'automate des préfixes-suffixes donne les développements de certains suffixes de v^- ; on les notera $v_n = \sigma^{u_n}(1) \dots \sigma^{u_0}(1)$. Si $v^-v \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_{per}$ l'automate ne produira qu'une suite finie de préfixes dont le développement sera par exemple $\sigma^{u_k}(1) \dots \sigma^{u_0}(1)$; dans ce cas, il suffit de voir que si v^-v est un shifté de $\omega_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma^{dn}(i.1)$ (pour un certain i , $1 \leq i \leq d$), alors pour tout u_{k+1} tel que $u_{k+1} - u_k \geq d$ et $u_{k+1} = (i-1)[d]$, $\sigma^{u_{k+1}}(1)\sigma^{u_k}(1) \dots \sigma^{u_0}(1)$ est un suffixe de v^- . On notera dans ce cas $v_n = \sigma^{u_n}(1) \dots \sigma^{u_0}(1)$ si $n \leq k$ et $v_n = \sigma^{u_n}(1)\sigma^{u_k}(1) \dots \sigma^{u_0}(1)$, où u_{k+1} est le plus petit indice tel que $u_{k+1} - u_k \geq d$, $u_{k+1} = (i-1)[d]$, et $u_n = u_{k+1} + d(n - (k+1))$ sinon.

On pourra se reporter à la conséquence 6.1.49 pour vérifier que dans les deux cas, la suite $(L(f_Q(v_n^{-1}\omega)))_n$ est une suite de compacts emboîtés dont la suite des diamètres tend vers 0 (par la propriété 6.1.24 page 103). Puisque $f_Q(v)$ appartient à chaque élément de cette suite (par $L(f_Q(v_n^{-1}\omega)) = f_Q(P_{v_n})$), on en déduit

$$\{f_Q(v)\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} L(f_Q(v_n^{-1}\omega)).$$

On peut facilement déduire de cette définition que si u^-u et u^-v sont deux mots de Ω (avec u^- un mot infini à gauche et u, v deux mots de Ω^+), alors $f_Q(u) = f_Q(v)$. On va démontrer que la réciproque est également vraie.

Proposition 6.1.52 *Tout point de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$ a un unique antécédent dans Ω^+ par f_Q .*

Preuve *On vérifie la propriété pour $f_Q(\omega)$ et on conclura grâce à l'équivariance. f_Q étant une bijection de Ω_0^+ dans $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$, aucun mot de Ω_0^+ ($\neq \omega$) n'a pour image $f_Q(\omega)$ par f_Q . Soit v un élément de $\Omega^+ \setminus \Omega_0^+$. Si v^-v est un mot de Ω , l'automate des préfixes-suffixes produit deux entiers u_0 et u_1 tels que $v \in P_{\sigma^{u_1}(1)\sigma^{u_0}(1)}$. $f_Q(v)$ est alors un élément de $f_Q(\sigma^{u_0}(1^{-1})\sigma^{u_1}(1^{-1})\omega)$. Une simple observation de la figure 6.7 (page 102) permet d'obtenir l'équivalence, pour $u \neq \epsilon$:*

$$f_Q(\omega) \in L(f_Q(u^{-1}\omega)) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}; u^{-1} = \sigma^k(1^{-1}).$$

Finalement, on conclut que $f_Q(v)$ est bien différent de $f_Q(\omega)$ grâce à la proposition 6.1.16 (page 98). \square

Proposition 6.1.53 *Si u et v sont deux points de Ω^+ tels que $f_Q(u) = f_Q(v)$, alors il existe un mot infini à gauche u^- tel que u^-u et u^-v sont deux points de Ω .*

Preuve *Si $f_Q(u) = f_Q(v)$ est dans $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$, alors $u = v$ d'après 6.1.52.*

Si $f_Q(u) = f_Q(v)$ est dans $L \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$, alors u et v sont des éléments de $\Omega^+ \setminus \Omega_0^+$. On suppose l'existence de deux mots infinis à gauche u^- et v^- , tels que

- $u^-u \in \Omega$ et $v^-v \in \Omega$,
- $u^-v \notin \Omega$ et $v^-u \notin \Omega$.

L'automate des préfixes-suffixes produira (grâce à la propriété 6.1.15 page 98) u_s suffixe de u^- et v_s suffixe de v^- tels que

- u_s^{-1} et v_s^{-1} sont des éléments de $\delta(\Omega_d^+)$,
- u_s (resp. v_s) n'est pas un suffixe de v_s (resp. u_s),
- $u \in P_{u_s}$ et $v \in P_{v_s}$,
- $u \notin P_{v_s}$ et $v \notin P_{u_s}$.

On déduit de la conséquence 6.1.49 que si u_s et v_s ne sont pas suffixe l'un de l'autre, alors l'intersection de $L(f_Q(P_{u_s}))$ et $L(f_Q(P_{v_s}))$ est constitué d'au plus un point, et ce point est dans $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$. Finalement, $d_L(f_Q(u), f_Q(v)) > 0$, une contradiction. \square

Corollaire 6.1.54 *Si x est un point de $L(f_Q(u^{-1}\omega))$, alors pour tout v de Ω^+ tel que $f_Q(v) = x$, $v \in P_u$.*

Preuve $L(f_Q(u^{-1}\omega)) = f_Q(P_u)$ d'après 6.1.47; il existe donc v de P_u tel que $f_Q(v) = x$. On déduit alors de 6.1.53 que les autres antécédents de x sont également dans P_u . \square

Remarque 6.1.55 *On note μ l'unique mesure de probabilité du système dynamique (Ω^+, S) . Jusqu'à la fin de ce chapitre, toute partition de Ω^+ sera en fait une partition modulo un ensemble de mesure nulle pour μ .*

L_n engendre une partition en cylindres de Ω^+

Définition 6.1.56 *Soit $e = [s, t]$ un arc de L_n . Si e vérifie*

- s et t sont des éléments de BT_n ,
- l'intérieur de e ne contient aucun élément de BT_n ,

*alors on dira que e est un arc **simple**; sinon, il sera dit **composé**.*

Soit $e = [s, t]$ un arc simple de L_n . Pour un certain $m \geq n$, e est un arc simple de L_{m-1} et est un arc composé de L_m ; son intérieur contient exactement un sommet de BT_m . On sera alors dans la situation décrite dans la proposition 6.1.47. En supposant que le point de BT_m contenu dans l'intérieur de e est $f_Q(u^{-1}\omega)$ (u est alors un mot fini positif), on dira que e a **généralisé** P_u .

On rappelle que si un mot fini u est tel que $f_Q(u\omega) \in BT_n$ et $f_Q(u\omega) \notin BT_{n-1}$, alors on dit que u est **apparu** à l'étape n . On pourra se reporter au paragraphe 6.1.8 (page 105) pour les notations.

Proposition 6.1.57 *Si u^{-1} est un mot (de $\delta(\Omega_d^+)$) apparaissant à l'étape n , alors les d arcs*

$$e_h = [f_Q(u^{-1}\omega), f_Q(u^{-1}\sigma^{n+h}(1)\omega)], \quad -1 \leq h \leq d-2$$

de L_n , génèrent $P_{1u}, P_{2u}, \dots, P_{du}$ (pas forcément respectivement).

Preuve *Si u^{-1} apparaît à l'étape n , alors les d arcs adjacents génèrent $P_{u_1}, P_{u_2}, \dots, P_{u_d}$, avec $u_k = \sigma^{n+(d-3)+k}(1)u$, $1 \leq k \leq d$. On suppose que la dernière lettre de $\sigma^{n+(d-3)+k}(1)$ est z_k ; les z_k sont 2 à 2 distincts.*

Si v est dans $P_{z_k u}$, alors il est dans P_u , et $f_Q(v)$ est dans $L(f_Q(u^{-1}\omega))$. De plus,

$$L(f_Q(u^{-1}\omega)) = \bigcup_{1 \leq k \leq d} L(f_Q(u_k^{-1}\omega)).$$

Si $f_Q(v)$ est dans $L(f_Q(u_j^{-1}\omega))$ pour un certain j , alors d'après la proposition 6.1.47 et le corollaire 6.1.54, tous les antécédents de $f_Q(v)$ sont des éléments de $P_{u_j} \cap P_{z_k u}$. Si $u_j \neq u_k$, alors $z_j \neq z_k$ et puisque ω est le seul mot infini à droite qui soit spécial à gauche, on en déduit que $P_{u_j} \cap P_{z_k u} = \{u^{-1}\omega\}$. Ainsi si v est un élément de $P_{z_k u} \setminus \{u^{-1}\omega\}$ alors c'est forcément un élément de P_{u_k} . Puisque $u^{-1}\omega \in P_{u_k}$, on en déduit que $P_{z_k u} \subset P_{u_k}$. L'autre inclusion est évidente puisque $z_k u$ est un suffixe de u_k , et on obtient $P_{z_k u} = P_{u_k}$. \square

Proposition 6.1.58 Si v^{-1} est le plus long mot de $\delta(\Omega_d^+)$ à apparaître à l'étape n , alors tout arc $e = [s, t]$ simple de L_n génère P_u pour un certain u vérifiant $|u| = |v| + 1$.

Preuve On suppose que $f_Q(w^{-1}\omega) = s$ et $f_Q(w^{-1}\sigma^n(w')\omega) = t$ où w' est soit une lettre, $1 \leq w' \leq d$, soit un mot $\sigma^h(1)$ pour un certain $1 \leq h \leq d-2$. Dans ce cas, s est un point de BP_n et e génère $P_{zw} = P_{w_0}$ où $z \in \{1, \dots, d\}$ et $w_0 = \sigma^{m+(d-3)+k}(1)w$ avec m l'étape d'apparition de w^{-1} et $1 \leq k \leq d$ (cf. proposition 6.1.57). Si v^{-1} est le plus grand élément de $\delta(\Omega_d^+)$ qui apparaît à l'étape n , alors

$$|zw| \leq |v| + 1 \leq |\sigma^{m+(d-3)+k}(1)w|$$

(car w^{-1} est apparu au plus tard à l'étape n , et $w^{-1}\sigma^{m+(d-3)+k}(1^{-1})$ n'est pas encore apparu). Il existe donc un mot u de longueur de $|v| + 1$ tel que

- u est un suffixe de w_0 ,
- zw est un suffixe de u ,
- $P_{zw} = P_u$. \square

Proposition 6.1.59 Si v^{-1} est le plus long mot de $\delta(\Omega_d^+)$ à apparaître à l'étape n , alors pour tout mot u de $\mathcal{L}(\Omega)$ tel que $|u| = |v| + 1$, il existe un arc simple de L_n qui génère P_u .

Preuve Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, L_n est une union d'arcs simples. Si v^{-1} est le plus long mot de $\delta(\Omega_d^+)$ à apparaître à l'étape n et u est un mot de $\mathcal{L}(\Omega)$ tel que $|u| = |v| + 1$, alors il existe un mot w , $|w| = |v| + 1$, tel que P_w est généré par un arc simple e de L_n et $f_Q(P_w) \cap f_Q(P_u)$ est constitué d'une infinité de points. On rappelle que si $w_1 \neq w_2$ et $|w_1| = |w_2|$, l'intersection $P_{w_1} \cap P_{w_2}$ comporte au plus 1 point (cela vient du fait que ω est le seul mot infini spécial à gauche); par 6.1.53, l'intersection $f_Q(P_{w_1}) \cap f_Q(P_{w_2})$ comporte au plus 1 point. On en conclut que $u = w$ et que e génère P_u . \square

Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$ on note \mathcal{P}_m la partition de Ω^+ constituée des ensembles P_u où u est un mot de $\mathcal{L}(\Omega)$ de longueur m .

Théorème 6.1.60 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier m tel que

- pour tout $P_v \in \mathcal{P}_m$, il existe un unique arc simple $[s, t]$ de L_n pour lequel $f_Q(P_v) = Cn(s, t) \cap L$,
- réciproquement, pour tout arc simple $[s, t]$ de L_n , il existe un unique élément P_v de \mathcal{P}_m tel que $f_Q(P_v) = Cn(s, t) \cap L$,
- $m - 1$ est la longueur du plus long mot de $\delta(\Omega_d^+)$ à apparaître à l'étape n .

On dit que L_n a engendré la partition \mathcal{P}_m .

Des illustrations de ce résultat (dans le cas $d = 3$) sont données figures 6.9 (page 122) et 6.10 (page 122).

Propriétés des partitions engendrées

Ce paragraphe étudie les partitions de Ω^+ qui peuvent être engendrées par les arbres L_n . On note μ l'unique mesure de probabilité sur Ω^+ invariante par shift. μ est définie sur tout cylindre par $\mu(C_u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \#\{0 \leq k < n; \omega_k \dots \omega_{k+|u|-1} = u\}$ où $\#$ désigne le cardinal; pour tout $u \in \mathfrak{L}(\Omega)$, $\mu(C_u) > 0$. Si P_u et P_v sont les éléments d'une partition \mathcal{P}_n quelconque, on dit que $P_u \sim P_v$ si et seulement si $\mu(P_u) = \mu(P_v)$. On s'intéresse au cardinal de l'ensemble \mathcal{P}_n / \sim .

On a vu au paragraphe précédent l'importance des ensembles P_u . μ étant invariante par le shift, l'égalité $\mu(P_u) = \mu(C_u)$ est vérifiée pour tout $u \in \mathfrak{L}(\Omega)$. On travaillera sur les ensembles C_u dans la suite de ce paragraphe.

On rappelle que les préfixes de ω sont les seuls mots spéciaux à gauche, et que les suffixes des passés des $\omega_{i,2}$, $1 \leq i \leq d-1$ sont les seuls mots spéciaux à droite.

λ est la valeur propre dominante de la matrice d'incidence de σ . La mesure définie est telle que pour tout u dans le langage, $\mu(\sigma(C_u)) = \lambda^{-1}\mu(C_u)$. Le lemme suivant permettra d'utiliser cette propriété par la suite.

Lemme 6.1.61 *Si u est un mot de $\mathfrak{L}(\Omega)$ dont la dernière lettre est différente de d , alors $\sigma(C_u) = C_{\sigma(u)}$.*

Preuve *L'inclusion $\sigma(C_u) \subset C_{\sigma(u)}$ est évidente. Soit $v \in C_{\sigma(u)}$, $v = \sigma(u)w$, et puisque d n'est pas la dernière lettre de u , alors 1 n'est pas la dernière lettre de $\sigma(u)$ et w ne commence pas par 2. Or, tout mot (infini) commençant par $l \neq 2$ a un antécédent par σ dans Ω^+ , c'est-à-dire qu'il existe $w_0 \in \Omega^+$ tel que $\sigma(w_0) = w$. Une manière simple de s'en assurer est d'écrire le développement en préfixes-suffixes d'un mot $w^- \cdot \alpha w \in \Omega$. Dans ce cas, $v = \sigma(uw_0)$, assurant que v est dans $\sigma(C_u)$. \square*

λ vérifie $\lambda^d = \lambda^{d-1} + 1$ et on en déduit que les égalités

$$\lambda^{2d-2} = \sum_{0 \leq k \leq d-1} \lambda^k \quad \text{et} \quad 1 = \sum_{0 \leq k \leq d-1} \lambda^{-(d-1+k)}$$

sont vérifiées.

Proposition 6.1.62 *Soit u un préfixe de ω (possiblement ϵ) et $\mu(C_u) = x$. Alors $\mu(C_{1u})$, $\mu(C_{2u})$, \dots , $\mu(C_{du})$ prennent les valeurs (pas forcément respectives) $\lambda^{-(d-1+k)}x$, $0 \leq k \leq d-1$.*

Preuve *Si u est un préfixe de ω , alors u est préfixe de $\sigma(u)$. On pourra supposer u spécial à droite, en remarquant que si ce n'est pas le cas, il existe un mot u_0 spécial à droite (dont u est préfixe) tel que $C_u = C_{u_0}$.*

Il n'existe qu'une seule lettre l_0 de $\{1, \dots, d\}$ pour laquelle $\sigma(l_0)u$ est encore spécial à droite; si l est un élément de $\{1, \dots, d\}$ et $l \neq l_0$, $\sigma(l)u$ n'est pas spécial à droite. Le développement des préfixes de ω spéciaux à droite nous permet de dire qu'il n'existe aucun préfixe v de $\sigma(u)$ tel que u est préfixe de v , $|u| < |v| < |\sigma(u)|$ et v est spécial à droite. On en conclut que $C_{\sigma(l)\sigma(u)} = C_{\sigma(l)u}$. u étant spécial à droite, sa dernière lettre est différente de d , et par 6.1.61, $\sigma(C_{lu}) = C_{\sigma(l)\sigma(u)}$, ce qui donne $\sigma(C_{lu}) = C_{\sigma(l)u}$. On rappelle que 2 est non spécial à gauche. On a ainsi, pour tout $l \neq l_0$:

$$\begin{aligned} \mu(C_{lu}) &= \lambda \mu(C_{(l+1)u}) & \text{si } l \neq d, \\ \mu(C_{lu}) &= \lambda \mu(C_{1u}) & \text{si } l = d. \end{aligned}$$

On note $y = \mu(C_{(l_0+1)u})$ si $l_0 \neq d$ et $y = \mu(C_{1u})$ si $l_0 = d$; on a alors $\sum_{0 \leq k \leq d-1} \lambda^{-k}y = x$, ce qui donne $y = \lambda^{-(d-1)}x$. \square

On va pouvoir préciser le cardinal des ensembles \mathcal{P}_n / \sim après un dernier lemme. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $E_n = \{\mu(C_u); u \in \mathfrak{L}(\Omega), |u| = n\}$.

Lemme 6.1.63 *Si u est un préfixe du point fixe ω , alors $\mu(C_u)$ est un élément maximal de $E_{|u|}$. De plus, u est spécial à droite si et seulement si pour tout $v \in \mathfrak{L}(\Omega)$ tel que $|v| = |u|, v \neq u$, on a $\mu(C_u) > \mu(C_v)$.*

Preuve Soit $v \in \mathfrak{L}(\Omega)$ un mot de longueur $|u|$. Si v n'est pas un préfixe du point fixe, alors il existe un préfixe w du point fixe, tel que $|w| > |u|$, v est un suffixe (propre) de w et $\mu(C_w) = \mu(C_v)$; en effet si v n'est pas spécial à gauche et $\alpha v \in \mathfrak{L}(\Omega)$ ($\alpha \in \{1, \dots, d\}$), alors $\mu(C_{\alpha v}) = \mu(C_v)$. Or, puisque u est un préfixe de w , alors $C_u \supset C_w$ et $\mu(C_u) \geq \mu(C_w) = \mu(C_v)$.

v est toujours un mot de longueur $|u|$, u est préfixe de ω et w est un préfixe de ω tel que v est un suffixe propre de w et $\mu(C_w) = \mu(C_v)$. On note $w = uw_0$; si u est spécial à droite, alors il existe w_1 tel que $|w_1| = |w_0|$, $w_1 \neq w_0$ et uw_1 est dans le langage. Dans ce cas, $C_u \supset C_{uw_0} \cup C_{uw_1}$ et $\mu(C_u) > \mu(C_w) = \mu(C_v)$ (car C_{uw_0} et C_{uw_1} sont de mesures strictement positives).

Si pour tout v tel que $|v| = |u|, v \neq u$, on a $\mu(C_u) > \mu(C_v)$, on note α une lettre de $\{1, \dots, d\}$ telle que $u\alpha$ est dans le langage. Si v est le suffixe de $u\alpha$ de longueur $|u|$, alors v n'est pas spécial à gauche et $\mu(C_v) = \mu(C_{u\alpha})$. On a alors $\mu(C_u) > \mu(C_{u\alpha})$, ce qui implique que u est spécial à droite. \square

Proposition 6.1.64 *Soit u un préfixe du point fixe ω .*

$$- E_1 = \bigcup_{0 \leq k \leq d-1} \{\lambda^{-(d-1+k)}\},$$

$$- \forall n \geq 2,$$

- si le préfixe u_{n-1} de ω de longueur $n-1$ est spécial à droite, alors il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que

$$E_n = \bigcup_{0 \leq k \leq 2d-3} \{\lambda^{-(j+k)}\},$$

$$- \text{sinon, il existe } j \in \mathbb{N} \text{ tel que } E_n = \bigcup_{0 \leq k \leq 2d-2} \{\lambda^{-(j+k)}\}.$$

Preuve Dans cette preuve, on désignera par u_n le préfixe de ω de longueur n .

Par récurrence. On obtient directement de 6.1.62 que $E_1 = \bigcup_{0 \leq k \leq d-1} \{\lambda^{-(d-1+k)}\}$. 1 est le seul mot de longueur 1 spécial à gauche, $\mu(C_1) = \lambda^{-(d-1)}$ d'après 6.1.63, et on obtient par 6.1.62 que les $\mu(C_{h1})$, $1 \leq h \leq d$ prennent les valeurs $\lambda^{-(2d-2+k)}$, $0 \leq k \leq d-1$. Si $l \neq 1$, l n'est pas spécial à gauche et $\mu(C_{(l-1)l}) = \mu(C_l)$. On en déduit que $E_2 = \bigcup_{0 \leq k \leq 2d-3} \{\lambda^{-(d+k)}\}$. On suppose que les propriétés annoncées sont vraies à tous les rangs $\leq n$.

Si u_n et u_{n-1} sont spéciaux à droite, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $E_n = \bigcup_{0 \leq k \leq 2d-3} \{\lambda^{-(j+k)}\}$ par hypothèse de récurrence, et par 6.1.63, C_{u_n} est le seul cylindre de mesure λ^{-j} . On peut déduire de la proposition 6.1.62 que $E_{n+1} = \bigcup_{1 \leq k \leq 2d-2} \{\lambda^{-(j+k)}\}$.

Si u_n est spécial à droite, et u_{n-1} ne l'est pas, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $E_n = \bigcup_{0 \leq k \leq 2d-2} \{\lambda^{-(j+k)}\}$ et C_{u_n} est le seul cylindre de mesure λ^{-j} . On en déduit que $E_{n+1} = \bigcup_{1 \leq k \leq 2d-2} \{\lambda^{-(j+k)}\}$.

Si u_n n'est pas spécial à droite, et u_{n-1} est spécial à droite, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $E_n = \bigcup_{0 \leq k \leq 2d-3} \{\lambda^{-(j+k)}\}$ et C_{u_n} n'est pas le seul cylindre de mesure λ^{-j} ; $E_{n+1} = \bigcup_{0 \leq k \leq 2d-2} \{\lambda^{-(j+k)}\}$.

Si u_n et u_{n-1} ne sont spéciaux à droite ni l'un ni l'autre, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $E_n = \bigcup_{0 \leq k \leq 2d-2} \{\lambda^{-(j+k)}\}$ et C_{u_n} n'est pas le seul cylindre de mesure λ^{-j} . On a alors $E_{n+1} = E_n$.

Les propriétés passent donc aux successeurs. \square

On peut finalement conclure que $\#(\mathcal{P}_0/\sim) = d$, $\#(\mathcal{P}_n/\sim) = 2d - 2$ si le préfixe de ω de longueur $n - 1$ est spécial à droite, et $\#(\mathcal{P}_n/\sim) = 2d - 1$ sinon. Ce résultat est à rapprocher du théorème 6.1.60 et de la propriété 6.1.33 (page 107).

Théorème 6.1.65 L_0 engendre \mathcal{P}_1 . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'arbre, L_n engendre une partition de Ω^+ en \mathcal{P}_m avec $\#(\mathcal{P}_m/\sim) = 2d - 2$. Toute partition \mathcal{P}_m telle que $\#(\mathcal{P}_m/\sim) = 2d - 2$ est engendrée par un arbre L_n .

6.1.12 Cœur et fractal de Rauzy

Pour $d = 3$, la substitution est de type Pisot, et en remarquant que pour toute lettre i , $\sigma^{d-1}(i)$ a pour première lettre 1, on en déduit que la condition de forte coïncidence est vérifiée : pour tout $i, j \in A$, il existe k, n tels que la k -ième lettre de $\sigma^n(i)$ et la k -ième lettre de $\sigma^n(j)$ sont égales et les abélianisés des préfixes de longueur $k - 1$ de $\sigma^n(i)$ et $\sigma^n(j)$ sont égaux. D'après [6] et [23] (chapitre 3), cela est suffisant pour définir un fractal de Rauzy et un échange de morceaux (à mesure de Lebesgue nulle près).

On note π l'application qui à tout mot de Ω^+ associe la projection de son abélianisé dans le plan contractant, parallèlement à la direction dilatante. Pour tout point x de L , l'ensemble $\pi(f_Q^{-1}(\{x\}))$ est réduit à un point. On peut donc définir, pour tout élément w de Ω^+ , l'application

$$\spadesuit : \begin{array}{ccc} L & \rightarrow & R \\ f_Q(w) & \mapsto & \pi(w), \end{array}$$

où R est le fractal de Rauzy.

Remarque 6.1.66 Les croix noires (présentes sur $\spadesuit(L_5)$, $\spadesuit(L_6)$ et $\spadesuit(L_8)$) indiquent les points x de R tels que le cardinal de l'ensemble $f_Q(\pi^{-1}(\{x\}))$ est strictement > 1 . Ces situations sont des défauts de la représentation planaire ; en effet, certains couples de points de Ω^+ dont les images par f_Q sont distinctes ont même abélianisé, et ont donc même image par π .

La figure 6.9 illustre le théorème 6.1.60 (page 117) ; les arcs simples (bleu, rouge et vert) de L_0 ont engendrés respectivement P_a , P_b , et P_c .

La figure 6.10 illustre le fait que L_4 génère \mathcal{P}_7 . On représente le fractal de Rauzy en attribuant une même couleur à $\pi(P_u)$ et $\pi(P_v)$ (où P_u et P_v sont dans \mathcal{P}_7) si $\mu(P_u) = \mu(P_v)$; $\pi(P_u)$ et $\pi(P_v)$ sont égaux à translation près. L'image par \spadesuit de L_4 est également représentée ; on note la correspondance entre les arcs simples et les cylindres.

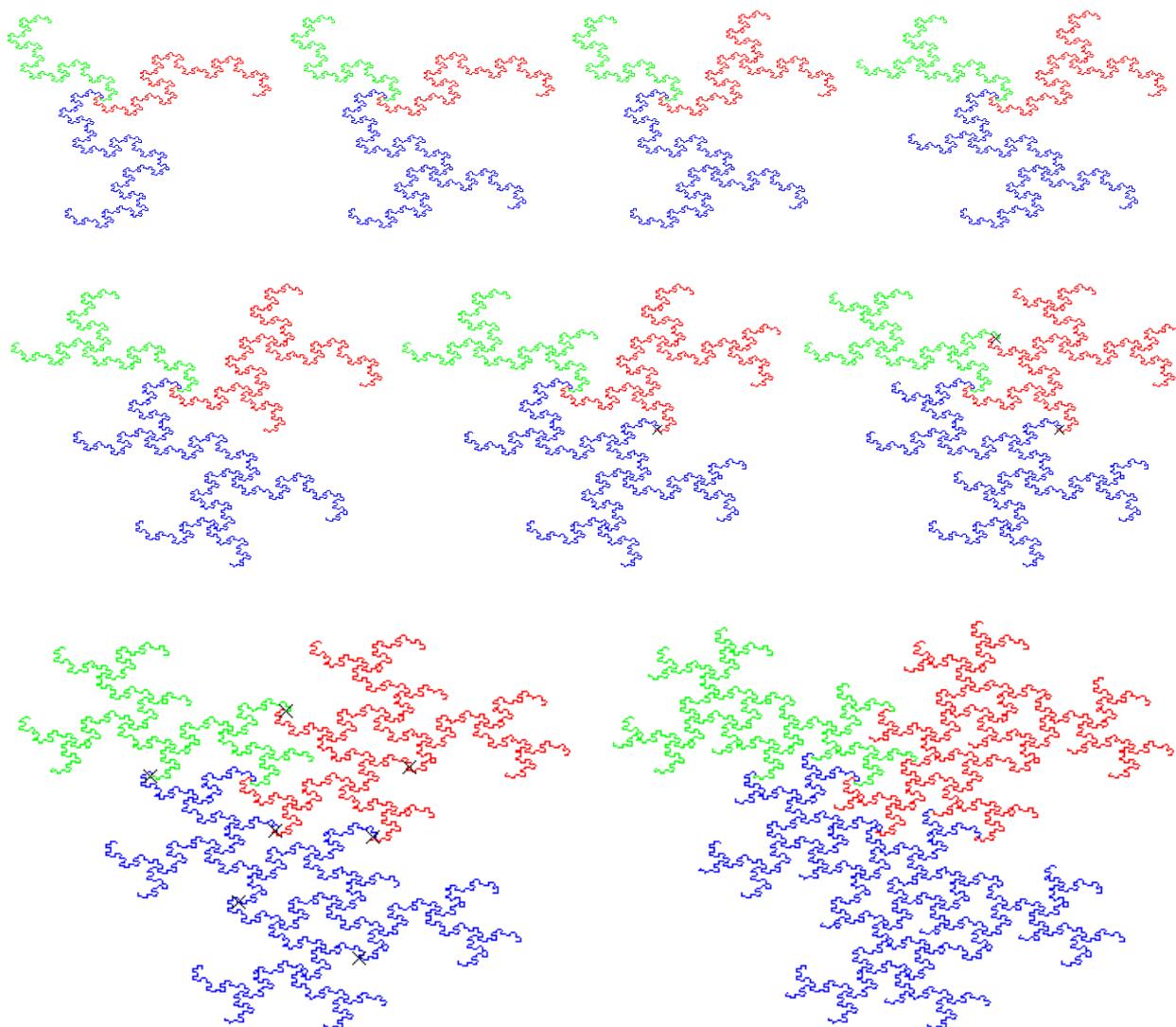


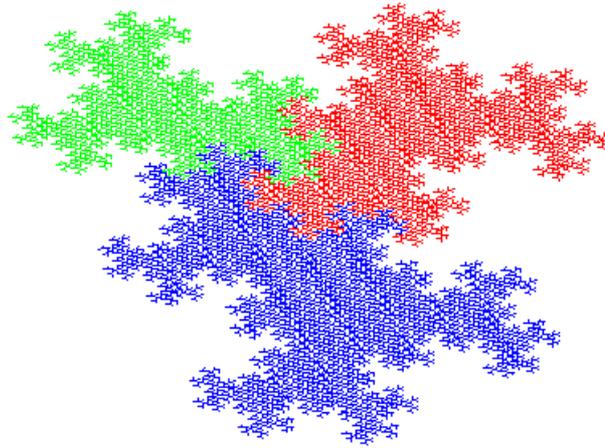
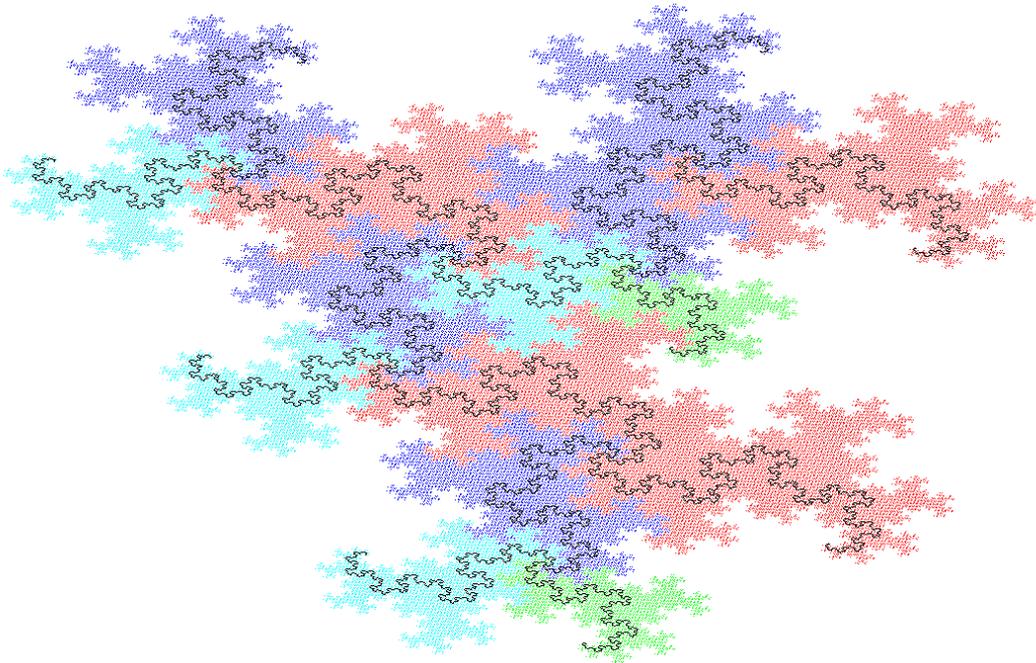
FIG. 6.8: Représentations de $\spadesuit(L_0)$, $\spadesuit(L_1)$, $\spadesuit(L_2)$, $\spadesuit(L_3)$, $\spadesuit(L_4)$, $\spadesuit(L_5)$, $\spadesuit(L_6)$, $\spadesuit(L_8)$ et $\spadesuit(L_{10})$.

6.2 Deuxième exemple

L'exemple précédent présente une propriété particulièrement importante qui justifie cette nouvelle étude. L'automorphisme inverse admet un représentant topologique train-track et sans chemin de Nielsen sur la rose R_d . Dans l'exemple suivant, le représentant topologique train-track de l'automorphisme inverse sera défini sur un graphe G différent de R_d . Il ne possèdera pas non plus de chemin de Nielsen.

Différences principales avec le premier exemple

Les étapes du raisonnement restent les mêmes. Dans le premier exemple, le représentant train-track de l'automorphisme inverse sur la rose nous a permis d'associer (par la fonction f_Q) les mots de l'orbite d'un unique mot (le point fixe de la substitution) aux sommets des arbres obtenus par substitution d'arbre (voir sous-section 6.1.8 page 104). Cette association est possible notamment parce que le tronc de la substitution d'arbre correspond exactement à l'automorphisme inverse (voir sous-sections 6.1.6 page 98 et 6.1.7 page 99). Ici, le représentant

FIG. 6.9: Représentation de $\spadesuit(L_{22})$.FIG. 6.10: Représentation de R et $\spadesuit(L_4)$.

train-track (de l'automorphisme inverse) est défini sur un graphe contenant deux vertex distincts (voir sous-section 6.2.6 page 132), et le tronc de la substitution sera défini par le codage de ce représentant (voir sous-section 6.2.7 page 134). De plus, on établira une bijection entre l'ensemble des sommets des arbres obtenus par substitution d'arbre et les orbites de deux mots différents (voir sous-sections 6.2.5 page 130 et 6.2.8 page 139).

Dans les sous-sections 6.2.11 (page 150) et 6.2.12 (page 156), on voudra adapter le théorème 6.1.60 (page 117) au nouvel exemple, c'est-à-dire mettre en évidence des partitions de l'ensemble des mots du système dynamique en fonction des arbres obtenus par substitution d'arbre. Cette fois, chaque arbre engendrera naturellement deux partitions en cylindres; chacune d'elles sera uniquement déterminée par les mots d'une même orbite.

Enoncés des résultats de la section 6.2

Soit $d \geq 3$; on définit sur $A = \{1, 2, \dots, d\}$ la substitution primitive σ :

$$\begin{aligned} \sigma & : & 1 & \mapsto & 12 \\ & & k & \mapsto & 1(k+1) \quad \text{pour } 2 \leq k \leq d-1 \\ & & d & \mapsto & 1. \end{aligned}$$

σ engendre le système dynamique symbolique (Ω^+, S) . σ est inversible, et on note encore σ l'automorphisme du groupe libre de base A (désormais noté F_d) engendré par la substitution, et σ^{-1} son inverse. La classe extérieure de σ^{-1} est notée Φ_1 (cf. 2.2 page 44).

L'algorithme de Bestvina-Handel ([4]) produit un représentant train-track h_0 de Φ_1 sur le graphe G décrit sur la figure 6.11. On choisit un ensemble $A_\rho = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_d, \rho_{d+1}\}$ de $d+1$ entiers successifs. On identifie le groupe fondamental $\pi_1(G, *)$ de G avec F_d par

- $1 \simeq \rho_1$,
- $k \simeq \rho_{d+1}\rho_k$ pour tout $2 \leq k \leq d$.

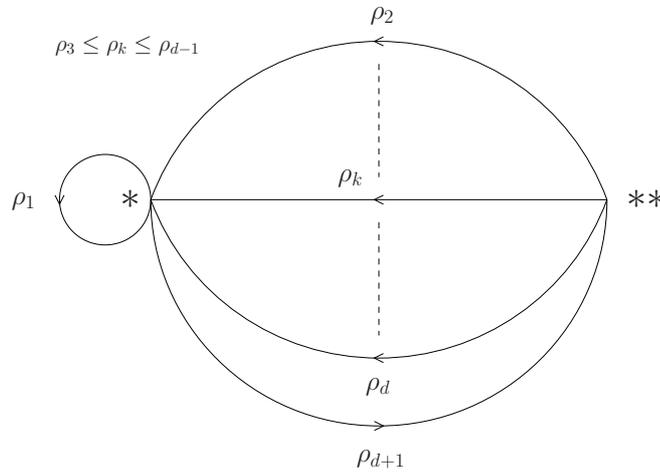


FIG. 6.11: Graphe G ; $h_0 : G \rightarrow G$ est train-track.

Si on identifie $\pi_1(G, *)$ avec $\pi_1(G, h_0(*))$ en choisissant le chemin trivial comme chemin de $*$ à $h_0(*)$, h_0 induit l'automorphisme

$$\begin{aligned} \phi^{-1} & : & F(A_\rho) & \rightarrow & F(A_\rho) \\ & & \rho_1 & \mapsto & \rho_{d+1}\rho_d \\ & & \rho_2 & \mapsto & \rho_{d+1}^{-1}\rho_1 \\ & & \rho_k & \mapsto & \rho_{k-1} \quad \text{pour tout } 3 \leq k \leq d \\ & & \rho_{d+1} & \mapsto & \rho_d^{-1} \end{aligned}$$

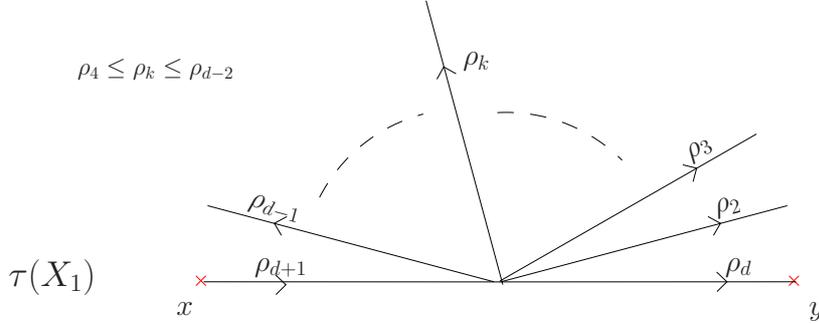
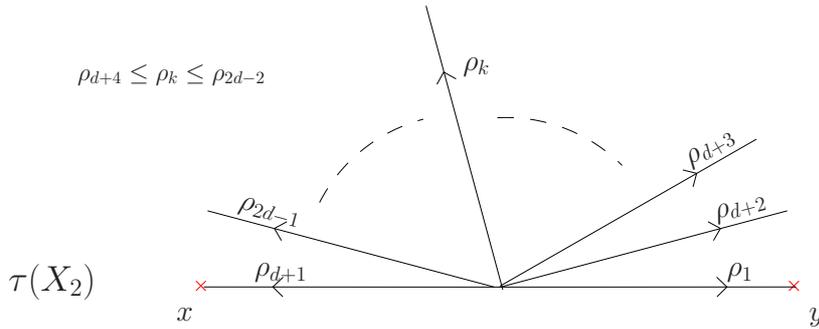
sur le groupe libre muni de la base A_ρ . On note que ϕ^{-1} admet un automorphisme inverse $\phi : F(A_\rho) \rightarrow F(A_\rho)$; ϕ peut être vu comme un recodage de la substitution σ .

On note η la valeur propre dominante de la matrice d'incidence de h_0 . Le vecteur $v = [(\eta^d - 1) \ \eta^{d-1} \ \eta^{d-2} \ \dots \ \eta^2 \ \eta \ 1]$ est un vecteur propre à gauche associé à η . On donne à l'arc ρ_i de G la longueur $v(i)$ et on construit l'arbre T associé à σ^{-1} (cf. 2.3 page 47). L'action de F_d sur T est à orbites denses et on définit $Q : \partial F_d \rightarrow \bar{T} \cup \partial T$.

On va à nouveau obtenir $Q(\Omega^+)$ par substitutions d'arbre. Cette fois, le tronc de la substitution d'arbre ne correspondra pas à σ^{-1} , mais à ϕ^{-1} . Soit $A_\tau = \{\rho_1, \dots, \rho_d, \rho_{d+1}, \rho_{d+2}, \dots, \rho_{2d-1}\}$ un alphabet. Si X_i est un élément de $\mathcal{S}_E(A_\tau)$, $X_i = (\{x, y\}, \{(x, y, \rho_i)\})$, où $i \in A_\tau$, τ est la substitution d'arbre définie par :

- l'image de X_1 est représentée figure 6.12,

- l'image de X_2 est représentée figure 6.13,
- $\tau(X_i) = X_{i-1}$ si $3 \leq i \leq d$,
- $\tau(X_{d+1}) = (\{x, y\}, \{(y, x, \rho_d)\})$,
- $\tau(X_{d+2}) = X_1$,
- $\tau(X_i) = X_{i-1}$ si $d+3 \leq i \leq 2d-1$.

FIG. 6.12: Image de X_1 par τ .FIG. 6.13: Image de X_2 par τ .

On appelle L_0^s l'arbre $\tau^2(X_1)$ et $L_n^s = \tau^n(L_0^s)$. x_0 est la racine de L_n^s quel que soit $n \in \mathbb{N}$. BT_n^s est l'ensemble des sommets de L_n^s ; par définition de la substitution d'arbre, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $BT_n^s \subset BT_{n+1}^s$. On notera γ_n la fonction chemin de L_n^s . On définit le morphisme $pr : (A_\tau \cup \overline{A_\tau})^* \rightarrow F(A_\rho)$;

- $pr(\rho_k) = \rho_k$ pour $k \in \{1, \dots, d+1\}$,
- $pr(\rho_{d+1+k}) = \phi^k(\rho_1)$ pour $k \in \{1, \dots, d-2\}$,
- $pr(\overline{\rho_k}) = \rho_k^{-1}$ pour $k \in \{1, \dots, d+1\}$,
- $pr(\overline{\rho_{d+1+k}}) = \phi^k(\rho_1^{-1})$ pour $k \in \{1, \dots, d-2\}$.

Cette application explicite les $d-2$ lettres de $A_\tau \setminus A_\rho$.

Soit $\omega = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma^n(1)$ et $\Omega_0^+ = \{v \in \Omega^+; S^k(v) = \omega\} \cup \{v \in \Omega^+; S^k(\omega) = v\}$. Si x est un sommet de L_p^s , le mot $\phi^p(pr(\gamma_p(x_0, x)))$ est un élément de $F(A_\rho)$. On rappelle qu'on a effectué l'identification

- $1 \simeq \rho_1$,
- $k \simeq \rho_{d+1}\rho_k$ pour tout $2 \leq k \leq d$.

Malgré cela, certains mots ne peuvent pas être recodés en éléments de F_d et il nous sera impossible d'associer un point de Ω_0^+ à chaque sommet de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n^s$.

On montrera par la suite la propriété suivante.

Propriété 6.2.1 *Le mot $\phi^p(\text{pr}(\gamma_p(x_0, x)))$ peut être vu,*

- soit comme un mot de F_d ; on dit alors que x est un point de classe 2,
- soit comme un mot $u\rho_{d+1}$ où $u \in F_d$; x est alors un point de classe 1.

On choisira un point ω' (qui sera en fait un mot fixe par un automorphisme représentant le même automorphisme extérieur que σ) et on notera $\Omega_{g,1}^+ = \{v \in \Omega; S^k(v) = \omega'\}$. Si $\phi^p(\text{pr}(\gamma_p(x_0, x)))$ peut être recodé en un mot de F_d , on associera à x un mot de Ω_0^+ ; s'il peut être recodé en $u\rho_{d+1}$ où $u \in F_d$, on lui associera un mot de $\Omega_{g,1}^+$.

Proposition 6.2.2 *Pour tout point $v = u\omega$ de Ω_0^+ , il existe un unique sommet $x = f_Q(v)$ de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n^s$ et un unique entier p_0 minimal tel que pour tout $p \geq p_0$, $u' = \phi^p(\text{pr}(\gamma_p(x_0, x)))$, où u' peut être recodé en un mot u de F_d .*

Pour tout point $v = u\omega'$ de $\Omega_{g,1}^+$, il existe un unique sommet $x = f_Q(v)$ de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n^s$ et un unique entier p_0 minimal tel que pour tout $p \geq p_0$, $u'' = \phi^p(\text{pr}(\gamma_p(x_0, x)))$, où $u'' = u'\rho_{d+1}$ et u' peut être recodé en un mot u de F_d .

On rappelle que $L_0^s = \tau^2(X_1)$, où X_1 est un élément de $\mathcal{S}_E(A_\tau)$ dont l'arête est colorée 1; les sommets de $\tau^n(X_1)$ sont de degré au plus d quel que soit $n \in \mathbb{N}$. On choisit un intervalle de longueur $\eta^2(\eta^d - 1)$ comme réalisation de X_1 . On se place dans \mathcal{R}^d et on applique le théorème 5.5.5 (page 86). On obtient une suite de réalisations;

- deux arêtes de L_n^s de même couleur ont deux réalisations isométriques,
- si ν_n est la fonction de réalisation de L_n^s , et si x est un sommet commun à L_k^s et L_{k+1}^s , alors $\nu_{k+1}(x) = \nu_k(x)$.

On note L_n l'enveloppe convexe de $\nu_n(BT_n^s) = BT_n$; la suite $(L_n)_n$ converge vers un arbre réel L de \mathcal{F}^d . Par densité de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$ dans L et par la proposition 6.2.2, on définit la fonction f_Q

surjective de Ω^+ dans L . Pour tout $x \in L$, l'ensemble $Q(f_Q^{-1}(\{x\})) \subset \overline{T}$ est réduit à un unique élément. On peut donc définir la fonction $\xi : L \rightarrow Q(\Omega^+)$, qui à tout $f_Q(v)$ ($v \in \Omega^+$) associe $Q(v)$.

σ engendre le système dynamique (Ω^+, S) , T est un arbre invariant de l'automorphisme σ^{-1} et Q est l'application équivariante surjective de ∂F_d dans $\overline{T} \cup \partial T$ associée. τ est la substitution d'arbre associée à σ et on peut décrire, grâce aux arbres $L_n^s = \tau^n(L_0^s)$, une suite d'arbres réels convergente vers un arbre réel L . Les chemins des arbres L_n^s nous permettent de construire une fonction f_Q surjective de Ω^+ dans L .

Théorème 6.2.3 *L'application ξ définie pour tout v de Ω^+ par*

$$\begin{array}{ccc} \xi & : & L \rightarrow Q(\Omega^+) \\ & & f_Q(v) \mapsto Q(v) \end{array}$$

est une bijection isométrique.

Pour tout mot u positif de $\mathfrak{L}(\Omega^+)$, on note P_u l'ensemble des mots v de Ω^+ tels que uv appartient encore à Ω^+ , et C_u l'ensemble des mots de Ω^+ dont u est préfixe. On note μ l'unique mesure de probabilité du système (Ω^+, S) (cf. sous-section 1.4.3 page 37). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des P_u (resp. C_u), $|u| = n$ forme une partition (modulo un ensemble de mesure nulle) notée \mathcal{P}_n (resp. \mathcal{C}_n) de Ω^+ .

Un point de L_n est un point de classe 1 (resp. classe 2) s'il est réalisation d'un point de classe 1 (resp. classe 2).

Définition 6.2.4 *Un sous-arbre 1-simple (resp. 2-simple) de L_n est un sous-arbre maximal pour l'inclusion, et dont l'intérieur ne contient aucun point de classe 1 (resp. 2).*

Si e est un arbre 1-simple (resp. 2-simple) de L_n , e est l'enveloppe convexe d'un ensemble E de points de L_n . Pour tout $x \in E$, $\overline{\mathcal{R}^d \setminus \{x\}}$ est composé de $2d$ composantes connexes, et l'une d'elle contient les autres points de E ; on la note $Cn_x(E)$ et on définit

$$L(e) = \left(\bigcap_{x \in E} Cn_x(E) \right) \cup E.$$

Théorème 6.2.5 *Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe un entier m_1 tel que pour tout $P_v \in \mathcal{P}_{m_1}$, il existe un unique arbre 2-simple e de L_n pour lequel $f_Q(P_v) = L(e)$; réciproquement, pour tout arbre 2-simple e de L_n , il existe un unique élément P_v de \mathcal{P}_{m_1} tel que $f_Q(P_v) = L(e)$.*

Pour le même n , il existe un entier m_2 tel que pour tout $C_u \in \mathcal{C}_{m_2}$, il existe un unique arbre 1-simple e de L_n pour lequel $f_Q(C_u) = L(e)$; réciproquement, pour tout arbre 1-simple e de L_n , il existe un unique élément P_u de \mathcal{C}_{m_2} tel que $f_Q(C_u) = L(e)$.

6.2.1 Abélianisé et points périodiques

Soit d un entier supérieur ou égal à 3 et $A = \{1, 2, \dots, d\}$ un alphabet. On note σ la substitution de l'alphabet A définie par

$$\begin{aligned} \sigma & : k \mapsto 1(k+1) \quad \text{pour } 1 \leq k \leq d-1 \\ & d \mapsto 1 \end{aligned}$$

La matrice d'incidence M_σ de σ est défini par

- pour tout $1 \leq i \leq d-1$, $M_\sigma(1, i) = M_\sigma(i+1, i) = 1$,
- $M_\sigma(1, d) = 1$,
- M_σ est nulle partout ailleurs.

Le polynôme caractéristique M_σ est $(-1)^d(x^d - (\sum_{0 \leq i \leq d-1} x^i))$. Cette matrice est primitive et admet donc une valeur propre réelle dominante $\lambda (> 1)$; λ vérifie $\lambda^d = \sum_{0 \leq i \leq d-1} \lambda^i$.

σ est primitive quel que soit d ; on note (Ω, S) le système dynamique symbolique associé à σ et $\mathfrak{L}(\Omega)$ son langage. On remarque que le mot $k1$ est dans le langage quel que soit $1 \leq k \leq d$ et on note

$$\omega_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma^{dn}(k.1).$$

$\omega_1, \dots, \omega_d$ sont les seuls points périodiques de σ ; on note $\Omega_{per} = \{\omega_1, \dots, \omega_d\}$.

Par la suite, nous parlerons également de shift unilatéral, et on notera

$$\omega = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma^n(1).$$

6.2.2 Points fixes de la classe extérieure

On note à nouveau F_d le groupe libre de base A . On notera encore σ l'automorphisme de F_d induit par la substitution et Φ sa classe extérieure. On pourra à nouveau se reporter au chapitre 3 et au théorème 3.3.5 (page 56) pour des détails sur les résultats qui suivent.

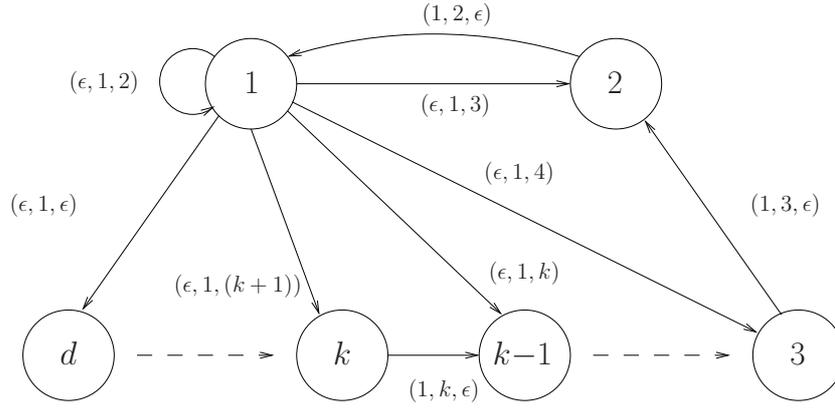
L'automorphisme $\Psi = (i_a \circ \sigma)^d$ donne, pour tout $1 \leq k \leq d$, un mot fixe

$$\omega_{k,2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Psi^n(1.k).$$

La borne de points fixes donnée par [10] (théorème 1') est atteinte.

6.2.3 Automate des préfixes-suffixes

L'automate des préfixes-suffixes de σ est décrit en figure 6.14. On se reporte à la section 1.5 (page 37) et au théorème 1.5.7 concernant l'automate des préfixes-suffixes pour les notations.

FIG. 6.14: Automate des préfixes-suffixes de σ .

Développements des points fixes de Φ en préfixes-suffixes

Ces développements nous serviront principalement à exprimer de manière simple les facteurs spéciaux du langage ; on verra même par la suite qu'on obtient tous les facteurs spéciaux grâce aux points fixes. On utilise le symbole $*$ pour signifier qu'un développement est ultimement constant ; le dernier terme entre crochets ou parenthèses est répété à l'infini. Les éléments de Ω_{per} ont tous pour développement $(\epsilon, 1, 2)^*$; par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \Gamma(S^{-1}(\omega_1)) &= [(\epsilon, 1, \epsilon)(1, d, \epsilon)(1, (d-1), \epsilon) \dots (1, 4, \epsilon)(1, 3, \epsilon)(1, 2, \epsilon)]^*, \\ \Gamma(S^{-1}(\omega_2)) &= [(1, 2, \epsilon)(\epsilon, 1, \epsilon)(1, d, \epsilon)(1, (d-1), \epsilon) \dots (1, 4, \epsilon)(1, 3, \epsilon)]^*, \\ \Gamma(S^{-1}(\omega_3)) &= [(1, 3, \epsilon)(1, 2, \epsilon)(\epsilon, 1, \epsilon)(1, d, \epsilon) \dots (1, 4, \epsilon)]^*, \\ \Gamma(S^{-1}(\omega_k)) &= [(1, k, \epsilon) \dots (1, 3, \epsilon)(1, 2, \epsilon)(\epsilon, 1, \epsilon)(1, d, \epsilon) \dots (1, (k+1), \epsilon)]^* \text{ si } k \geq 4. \end{aligned}$$

Pour ce qui concerne les autres, on va donner à la fois leurs développements par rapport à σ et leurs développements par rapport à σ^d . On notera Γ_d l'application qui à un mot de Ω associe son développement dans l'automate de σ^d .

Si $k = 1$:

$$\begin{aligned} \Gamma(S(\omega_{1,2})) &= [(1, 2, \epsilon)(\epsilon, 1, 2)^{d-2}(\epsilon, 1, 3)]^* \\ \Gamma_d(S(\omega_{1,2})) &= (1, 2, \sigma(2)\sigma^2(2) \dots \sigma^{d-2}(2)\sigma^{d-1}(3))^* \end{aligned}$$

si $k = 2$:

$$\begin{aligned} \Gamma(S(\omega_{2,2})) &= [(\epsilon, 1, 3)(1, 2, \epsilon)(\epsilon, 1, 2)^{d-2}]^* \\ \Gamma_d(S(\omega_{2,2})) &= (\sigma(1), 1, 3\sigma^2(2)\sigma^3(2) \dots \sigma^{d-1}(2))^* \end{aligned}$$

si $3 \leq k \leq d-1$ (si $d \geq 4$) :

$$\begin{aligned} \Gamma(S(\omega_{k,2})) &= [(\epsilon, 1, 2)^{k-2}(\epsilon, 1, 3)(1, 2, \epsilon)(\epsilon, 1, 2)^{d-k}]^* \\ \Gamma_d(S(\omega_{k,2})) &= (\sigma^{k-1}(1), 1, 2\sigma(2) \dots \sigma^{k-3}(2)\sigma^{k-2}(3)\sigma^k(2)\sigma^{k+1}(2) \dots \sigma^{d-1}(2))^* \end{aligned}$$

si $k = d$:

$$\begin{aligned} \Gamma(S(\omega_{d,2})) &= [(\epsilon, 1, 2)^{d-2}(\epsilon, 1, 3)(1, 2, \epsilon)]^* \\ \Gamma_d(S(\omega_{d,2})) &= (\sigma^{d-1}(1), 1, 2\sigma(2) \dots \sigma^{d-3}(2)\sigma^{d-2}(3))^* \end{aligned}$$

On remarque que $\sigma^0(1) = 1$, $\sigma(1) = 12$, $\sigma^2(1) = \sigma(1)13$ et pour tout $3 \leq k \leq d-1$, $\sigma^k(1) = \sigma^{k-1}(1) \dots \sigma(1)1(k+1)$. Or, $\sigma^d(k+1) = \sigma^{d-1}(1)\sigma^{d-1}(k+2)$ et par suite,

$$\sigma^d(k+1) = \sigma^{d-1}(1) \dots \sigma^{k+1}(1)\sigma^{k+1}(d) = \sigma^{d-1}(1) \dots \sigma^k(1).$$

Enfin, puisque l'égalité $\sigma^d(1) = \sigma^{d-1}(1) \dots \sigma(1)1$ est vérifiée, le théorème 3.3.5 (page 56) nous permet de conclure que le d -uplet $(\omega_{1,2}, \dots, \omega_{d,2})$ forme un point fixe. On déduit du théorème 1.5.6 (page 39) que pour tout $1 \leq k \leq d$, $\omega_{k,2}$ est un point de $\Omega \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S^n(\Omega_{per})$. On en conclut (puisque la borne de [10] est atteinte) que la propriété suivante est vérifiée.

Propriété 6.2.6

- Si deux points de $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S^n(\Omega_{per})$ ont même passé, alors ils sont égaux,
- si deux points de $\Omega \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S^n(\Omega_{per})$ ont même futur, alors ils sont égaux.

Conséquence 6.2.7 $\omega = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma^n(1)$ est l'unique mot infini à droite qui soit spécial à gauche.
 $\bar{\omega} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Psi^n(1)$ est l'unique mot infini à gauche spécial à droite.

6.2.4 Facteurs spéciaux

Note Les raisonnements et méthodes utilisés dans cette sous-section sont identiques à ceux du premier exemple. Les résultats importants sont donnés dans la conséquence 6.2.10 et la proposition 6.2.13.

On commence par mettre en évidence les facteurs spéciaux à gauche. On dit qu'un mot u de $\mathfrak{L}(\Omega)$ peut être désubstitué s'il existe un unique mot $u_{des} \in \mathfrak{L}(\Omega)$ de longueur minimale tel que u est préfixe $\sigma(u_{des})$. On pourra vérifier que les mots de longueur 2 du langage sont

- $1k$, $1 \leq k \leq d$,
- $k1$, $2 \leq k \leq d$,

et puisque 1 est le seul mot de longueur 1 spécial à gauche, 12 est le seul mot de longueur 2 spécial à gauche.

Lemme 6.2.8 Si u est spécial à gauche, $|u| \geq 2$ et que u peut être désubstitué, alors son désubstitué est encore spécial à gauche.

Preuve Soit u un mot spécial à gauche et $|u| \geq 2$. On remarque d'abord que pour tout $k \neq 1$, k n'est pas spécial à gauche : $1k$ est le seul mot de longueur 2 de suffixe k . On suppose hu et ku dans $\mathfrak{L}(\Omega)$ avec $h, k \in \{1, 12, 13, \dots, 1d\}$. Tout mot de longueur ≥ 2 spécial à gauche a pour préfixe 12 ; le mot $1u$ est donc désubstituable en du_{des} . Si $h = 1$ (resp. $k = 1$), on note $h_{des} = d$ (resp. $k_{des} = d$). Si $h, k \neq 1$, h et k sont désubstituables et on note h_{des} et k_{des} leurs désubstitués ; si $h \neq k$, alors $h_{des} \neq k_{des}$. De plus, si u est désubstituable et u_{des} est son désubstitué, alors hu et hk le sont également et les mots $h_{des}u_{des}$ et $k_{des}u_{des}$ sont des éléments de $\mathfrak{L}(\Omega)$. u_{des} est donc spécial à gauche. \square

Proposition 6.2.9 Tout mot spécial à gauche est préfixe de ω .

Preuve On a déjà vérifié la propriété pour les longueurs 1 et 2. Tout mot de longueur ≥ 2 spécial à gauche a pour préfixe 12 ; si celui-ci peut être désubstitué, alors son désubstitué est de longueur strictement inférieure. On suppose que pour tout $k \leq n$, l'unique mot de longueur k spécial à gauche est le préfixe (de longueur k) de ω . Soit $u = u_0 \dots u_{n-1}u_n$ un mot spécial à gauche. Si $u_n \neq 1$, on peut immédiatement désubstituer u en u_{des} avec $|u_{des}| < |u|$; u_{des} est alors un préfixe de ω , et u l'est également.

Si $u_n = 1$ et $u_{n-1} = 1$, on peut encore désubstituer u puisque les paires $dk, k \neq 1$ ne sont pas dans le langage, et on conclut de la même manière.

Si $u_n = 1$ et $u_{n-1} \neq 1$ et u est spécial à gauche, le mot $u' = u_0 \dots u_{n-1}$ est encore spécial à gauche. L'hypothèse de récurrence s'applique et u' est préfixe de ω ; u' n'est pas spécial à droite puisque u_{n-1} ne l'est pas, et on conclut que u est préfixe de ω . \square

On rappelle que ω (resp. $\bar{\omega}$) peut être étendu à gauche (resp. droite) par d lettres.

Conséquence 6.2.10

- La fonction de complexité p de $\mathcal{L}(\Omega)$ vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p(n) = (d-1)n + 1$.
- Les seuls mots spéciaux à gauche sont les préfixes de ω , et les seuls mots spéciaux à droite sont les suffixes de $\bar{\omega}$ (le passé commun aux $\omega_{k,2}$).

On étudie maintenant les mots bispéciaux : leur intérêt apparaîtra par la suite. Soit $u = \sigma^{u_n}(1)\sigma^{u_{n-1}}(1) \dots \sigma^{u_1}(1)\sigma^{u_0}(1)$, correspondant au début du développement en préfixes de $\omega_{k,2}$ (quel que soit $1 \leq k \leq d$). u est spécial à droite par définition et u est préfixe de $\sigma^{u_{n+1}}(1)$ (et donc de ω) par 1.5.5 (page 38), ce qui le rend bispécial. On va montrer que ce sont les seuls mots bispéciaux.

Remarque 6.2.11 *Tout préfixe de ω est atteint par un développement du type*

$$\sigma^{v_n}(1)\sigma^{v_{n-1}}(1) \dots \sigma^{v_1}(1)\sigma^{v_0}(1)$$

où pour tout $0 \leq i \leq n-1$, $v_{i+1} - v_i > 0$, et toute sous-suite $(v_j)_j$ d'exposants consécutifs est de longueur $< d$.

Il suffit d'écrire le développement des shiftés de ω_1 dans l'automate des préfixes-suffixes pour s'en convaincre.

Lemme 6.2.12 *Si $n \neq 0$ et $n \neq d$, alors $\sigma^n(1)$ n'est pas spécial à droite.*

Preuve 1 est le seul mot de longueur 1 spécial à droite. On en déduit que si $\sigma^n(1)$ est spécial à droite, alors $n = 0[d]$. Soit m un entier > 1 ; par la relation $\sigma^d(1) = \sigma^{d-1}(1)\sigma^{d-2}(1) \dots \sigma(1)1$, on déduit que le mot $\sigma^{d+1}(1)\sigma^d(1)$ est suffixe de $\sigma^{md}(1)$.

Le mot $\sigma^{2d}(1)\sigma^d(1)$ est suffixe de $\bar{\omega}$ (par le développement en préfixes-suffixes de $\omega_{1,2}$) et $2d$ et $d+1$ différent modulo d ; les dernières lettres de $\sigma^{2d}(1)$ et $\sigma^{d+1}(1)$ sont différentes. On en conclut que $\sigma^{md}(1)$ n'est pas suffixe de $\bar{\omega}$ et n'est donc pas bispécial si $m > 1$.

Proposition 6.2.13 *Tous les bispéciaux sont de la forme $u = \sigma^{u_n}(1)\sigma^{u_{n-1}}(1) \dots \sigma^{u_1}(1)\sigma^{u_0}(1)$, où u est le début du développement en préfixes de $\omega_{i,2}$ pour un certain i .*

Preuve Dans cette preuve, on dira d'un mot issu du développement en préfixes d'un des $\omega_{i,2}$ qu'il est **admis**.

Le lemme précédent nous permet d'initialiser une récurrence : on suppose donc que si $u = \sigma^{u_{n-1}}(1) \dots \sigma^{u_0}(1)$ est spécial à droite, alors il est admis. Soit $u = \sigma^{u_n}(1) \dots \sigma^{u_0}(1)$ un mot spécial à droite; le suffixe $\sigma^{u_{n-1}}(1) \dots \sigma^{u_0}(1)$ est également spécial à droite, et il est donc admis par hypothèse de récurrence. On rappelle qu'un mot sera spécial à droite s'il est suffixe de $\bar{\omega}$, et spécial à gauche s'il est préfixe de ω .

Si $u_{n-1} \leq d-2$, alors $u = \sigma^{u_{n-1}+2d+1}(1)\sigma^{u_{n-1}+d+1}(1)\sigma^{u_{n-1}}(1) \dots \sigma^{u_0}(1)$ est suffixe de $\bar{\omega}$ (par le développement en préfixes de $\omega_{u_{n-1}+2,2}$). Pour coïncider avec la dernière lettre de $\sigma^{u_{n-1}+d+1}(1)$, il faut que $u_n = u_{n-1} + 1[d]$; de plus on suppose $u_n > u_{n-1}$ (par 6.2.11). Soit m un entier > 1 ; on suppose $u_n = u_{n-1} + md + 1$. Par la relation $\sigma^d(1) = \sigma^{d-1}(1)\sigma^{d-2}(1) \dots \sigma(1)1$, on déduit que le mot $\sigma^{u_{n-1}+d+2}(1)\sigma^{u_{n-1}+d+1}(1)$ est suffixe de $\sigma^{u_n}(1)$. $u_{n-1} + d + 2$ et $u_{n-1} + 2d + 1$ différent modulo d ; le mot $\sigma^{u_n}(1) \dots \sigma^{u_0}(1)$ n'est donc pas suffixe de $\bar{\omega}$ et n'est pas bispécial. Les deux cas $m = 0$ et $m = 1$ produisent des développements admis si $u_{n-1} < d-2$; le cas $m = 1$ pour $u_{n-1} = d-2$ également. On écarte le cas $m = 0$ et $u_{n-1} = d-2$ en utilisant 6.2.11.

Si $u_{n-1} > d-2$, alors $u = \sigma^{u_{n-1}+2d}(1)\sigma^{u_{n-1}+d}(1)\sigma^{u_{n-1}}(1) \dots \sigma^{u_0}(1)$ est suffixe de $\bar{\omega}$. Un raisonnement similaire nous permettra de montrer que si $u_n = u_{n-1} + md$ avec $m > 1$, alors $\sigma^{u_n}(1) \dots \sigma^{u_0}(1)$ n'est pas suffixe de $\bar{\omega}$. De plus le cas $m = 1$ produit effectivement un développement admis.

On conclut grâce à la remarque 6.2.11. \square

6.2.5 Une caractérisation du shift unilatéral

Note On commence par caractériser l'orbite de ω (mot fixe de σ) de la même manière que dans le premier exemple. Dans un deuxième temps, on met en évidence une partie de l'orbite d'un second mot de Ω^+ . La nécessité d'introduire cette nouvelle orbite apparaîtra clairement à la sous-section 6.2.8 (page 139).

Sur l'orbite de Ω_{per}

On considère maintenant le shift infini à droite, noté Ω^+ ; on rappelle que $\omega = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma^n(1)$. Soient $\Omega_d^+ = \{v \in \Omega^+; S^k(\omega) = v, k \in \mathbb{N}\}$, $\Omega_g^+ = \{v \in \Omega^+; S^k(v) = \omega, k \in \mathbb{N}^*\}$, $\Omega_0^+ = \Omega_d^+ \cup \Omega_g^+$ et $\mathfrak{L}_0 = \{v; v \in \mathfrak{L}(\Omega) \text{ ou } v^{-1} \in \mathfrak{L}(\Omega)\}$; on définit

$$\begin{aligned} \delta & : \Omega_0^+ \rightarrow \mathfrak{L}_0 \\ u & \mapsto \begin{cases} u_{[0,k-1]} & \text{(préfixe de longueur } k \text{ de } u) \text{ si } S^k(u) = \omega \\ (\omega_{[0,k-1]})^{-1} & \text{(inverse du préfixe de longueur } k \text{ de } \omega) \text{ si } S^k(\omega) = u. \end{cases} \end{aligned}$$

Les deux automates des figures 6.15 et 6.16, appelés **automate négatif** et **automate positif** vont nous aider à caractériser Ω_g^+ et Ω_d^+ .

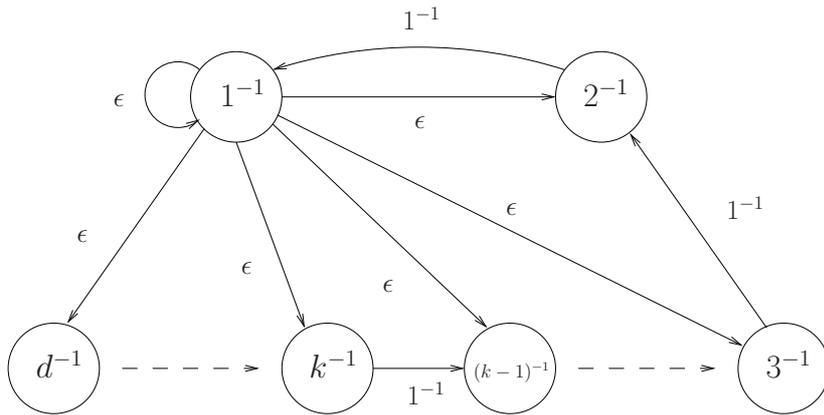


FIG. 6.15: Automate négatif.

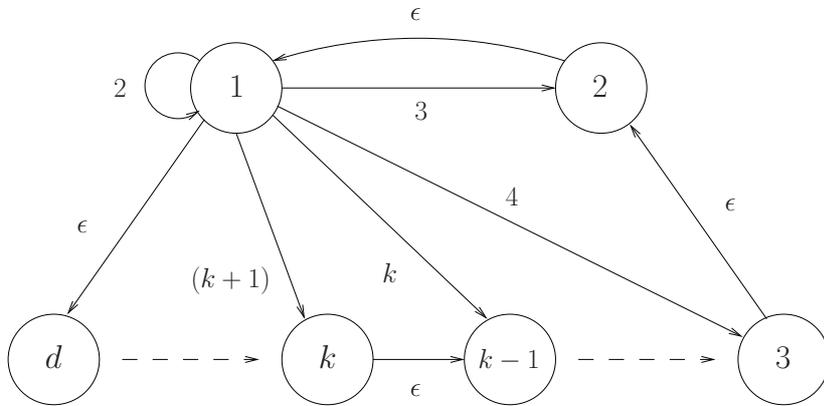


FIG. 6.16: Automate positif.

On note Σ_{aut}^+ l'ensemble des suites finies de couleurs $\alpha_0 \dots \alpha_m$ (où pour tout $0 \leq i \leq m$, $\alpha_i \in \{\epsilon, 2, 3, \dots, d\}$) vérifiant $m > 0$, $\alpha_m \neq \epsilon$, et issues des chemins de l'automate positif. Σ_{aut}^- est

constitué de la suite vide et des suites finies de couleurs $\alpha_0 \dots \alpha_m$ (où pour tout $0 \leq i \leq m$, $\alpha_i \in \{\epsilon, 1^{-1}\}$) vérifiant $m > 0$, $\alpha_m = 1^{-1}$, et issues des chemins de l'automate négatif.

Si $\alpha = \alpha_0 \dots \alpha_m \in \Sigma_{aut}^+$, on associe à α le mot $\sigma^0(\alpha_0) \dots \sigma^m(\alpha_m) = \sigma^{u_0}(k_0) \dots \sigma^{u_n}(k_n)$, où $\{u_0, \dots, u_n\}$ est l'ensemble des j , $0 \leq j \leq m$ pour lesquels $\alpha_j \neq \epsilon$, pour tout $0 < i \leq n$, $u_{i-1} < u_i$ et k_i , $0 \leq i \leq n$ est un élément de $\{2, 3, \dots, d\}$.

Si $\alpha = \alpha_0 \dots \alpha_m \in \Sigma_{aut}^-$, on associe à α le mot $\sigma^0(\alpha_0) \dots \sigma^m(\alpha_m) = \sigma^{u_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{u_n}(1^{-1})$, où $\{u_0, \dots, u_n\}$ est l'ensemble des j , $0 \leq j \leq m$ pour lesquels $\alpha_j = 1^{-1}$ et pour tout $0 < i \leq n$, $u_{i-1} < u_i$. Le mot vide ϵ est associé au chemin de longueur 0.

Définitions 6.2.14 On dira que $\sigma^{u_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{u_n}(1^{-1})$ est un **développement automatique** si pour tout $0 < i \leq n$, $u_i - u_{i-1} > 0$ et si toute sous-suite $(u_j)_j$ d'exposants consécutifs est de longueur $< d$.

On dira que $\sigma^{u_0}(k_0) \dots \sigma^{u_n}(k_n)$ est un **développement automatique** si pour tout $0 \leq i \leq n$, $2 \leq k_i \leq d$ et si pour tout $0 < i \leq n$, $u_i - u_{i-1} = k_{i-1} - 2 + md + 1$ pour un certain m de \mathbb{N} .

A chaque mot de Σ_{aut}^+ ou Σ_{aut}^- correspond un unique développement automatique, et à tout développement automatique correspond un unique chemin de Σ_{aut}^+ ou Σ_{aut}^- .

Propriété 6.2.15 D'après la propriété 1.5.5 (page 38), si $\sigma^{u_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{u_n}(1^{-1})$ est un développement automatique, alors c'est un suffixe propre de $\sigma^{u_n+1}(1^{-1})$ (un des chemins correspondant à 1^{-1} comme sommet terminal). Si $\sigma^{u_0}(k_0) \dots \sigma^{u_n}(k_n)$ est un développement automatique (où pour tout $0 \leq i \leq n$, $2 \leq k_i \leq d$), alors c'est un suffixe propre de $\sigma^{u_n+1}(k_n - 1)$.

Proposition 6.2.16 L'ensemble Σ_{aut}^- (resp. Σ_{aut}^+) est en bijection avec l'ensemble $\delta(\Omega_d^+)$ (resp. $\delta(\Omega_g^+)$).

Preuve On commence par Σ_{aut}^- et $\delta(\Omega_d^+)$. Si u^{-1} est un mot de $\delta(\Omega_d^+)$ de longueur k , alors $\Gamma(S^k(\omega_j)) = (p_i, \alpha_i, s_i)_{i \leq h}(\epsilon, 1, 2)^*$ (avec $\omega_j \in \Omega_{per}$) et $u = \sigma^h(p_h) \dots p_0 = \sigma^{u_n}(1) \dots \sigma^{u_0}(1)$. Le mot $\sigma^{u_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{u_n}(1^{-1})$ est alors un développement automatique de u^{-1} , ce qui assure la surjection.

L'automate des préfixes-suffixes nous permet de déduire que tout développement automatique de l'automate négatif sera effectivement un mot de $\delta(\Omega_d^+)$. On remarque que pour tout $m \leq d-1$, $|\sigma^m(1)| > \sum_{0 \leq i \leq m-1} |\sigma^i(1)|$; la formule $\sigma^d(1) = \sigma^{d-1}(1) \dots \sigma(1)1$ ne serait pas vérifiée dans le cas contraire. Par la définition 6.2.14, le mot de taille maximal obtenu par un chemin de Σ_{aut}^- de longueur $m = kd + h$ ($h < d$) est

$$rv_{m,0}v_{m,1} \dots v_{m,k-1}$$

où $v_{m,i} = \sigma^{h+id+1}(1^{-1})\sigma^{h+id+2}(1^{-1}) \dots \sigma^{h+id+d-1}(1^{-1})$ et $r = 1^{-1}\sigma(1^{-1}) \dots \sigma^{h-1}(1^{-1})$ (r peut être vide). On déduit de la formule $\sigma^d(1^{-1}) = 1^{-1}\sigma(1^{-1}) \dots \sigma^{d-1}(1^{-1})$ que

$$\sigma^m(1^{-1}) = \sigma^h(1^{-1})v_{m,0}v_{m,1} \dots v_{m,k-1}.$$

On obtient de la remarque précédente que $|\sigma^h(1^{-1})| > r$ et on en déduit que $\sigma^m(1^{-1})$ est de longueur strictement supérieure à tout développement automatique d'exposant maximal $< m$.

Ainsi, si $\sigma^{u_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{u_n}(1^{-1}) = \sigma^{v_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{v_m}(1^{-1})$ sont deux développements automatiques, alors on a forcément $u_n = v_m$. Une éventuelle récurrence donnera $m = n$ et $u_i = v_i$ pour tout $0 \leq i \leq n$, ce qui montre l'injection.

On passe à Σ_{aut}^+ et $\delta(\Omega_g^+)$. Si u est un mot de $\delta(\Omega_g^+)$ de longueur k , alors il existe $\omega_j \in \Omega_{per}$ tel que $\Gamma(S^{-(k+1)}(\omega_j)) = (p_i, \alpha_i, s_i)_{i \leq h}[(\epsilon, 1, \epsilon), (1, d, \epsilon), \dots, (1, 3, \epsilon)(1, 2, \epsilon)]^*$ et $u = s_0 \dots \sigma^h(s_h) = \sigma^{u_0}(k_0) \dots \sigma^{u_n}(k_n)$; le mot $\sigma^{u_0}(k_0) \dots \sigma^{u_n}(k_n)$ est une écriture automatique.

L'automate des préfixes-suffixes nous permet de déduire que tout développement automatique de l'automate positif sera effectivement un mot de $\delta(\Omega_g^+)$. Si on a $\sigma^{u_0}(k_0) \dots \sigma^{u_n}(k_n) = \sigma^{v_0}(h_0) \dots \sigma^{v_m}(h_m)$ avec $v_0 > u_0$, alors $k_0 \dots \sigma^{u_n - u_0}(k_n) = \sigma^{v_0 - u_0}(h_0) \dots \sigma^{v_m - u_0}(h_m)$, impliquant que $u_0 = v_0$ et $k_0 = h_0$ (la première lettre de $\sigma^{v_0 - u_0}(h_0)$ est différente de k_0 sinon). Par suite, $n = m$, $u_i = v_i$ et $k_i = h_i$ pour tout $0 \leq i \leq n$. \square

Sur l'orbite de $\omega_{1,2}$

Soit $\omega_{1,2}^+$ la projection de $\omega_{1,2}$ sur Ω^+ . On note $\Omega_{g,1}^+ = \{v \in \Omega^+; S^k(v) = \omega_{1,2}^+, k \in \mathbb{N}\}$ et on étend la définition de δ à l'ensemble $\Omega_{g,1}^+$. Afin de distinguer les images par δ des éléments de Ω_0^+ et ceux de $\Omega_{g,1}^+$, on ajoute un symbole supplémentaire ρ (dont le sens deviendra clair par la suite) et on définit

$$- \delta(\omega_{1,2}^+) = \rho,$$

$$- \delta(v) = v_{[0,k-1]}\rho \text{ (où } v_{[0,k-1]} \text{ est le préfixe de longueur } k \text{ de } v \text{ si } S^k(v) = \omega_{1,2}^+).$$

δ est une bijection de $\Omega_{g,1}^+$ dans $\delta(\Omega_{g,1}^+)$ et une bijection de $\Omega_0^+ \cup \Omega_{g,1}^+$ dans $\delta(\Omega_0^+ \cup \Omega_{g,1}^+)$.

Remarque 6.2.17 Cette définition ne fait intervenir que le passé de $\omega_{1,2}$. On aurait donc pu choisir n'importe quel $\omega_{i,2}$, $1 \leq i \leq d$.

6.2.6 Arbre invariant de σ^{-1}

L'application inverse à σ est définie par

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} &: 1 \mapsto d \\ & k \mapsto d^{-1}(k-1) \text{ pour } 2 \leq k \leq d. \end{aligned}$$

La représentation de cette automorphisme sur la rose à d pétales n'est pas train-track ($\sigma^{-2}(d) = (d-1)^{-1}dd^{-1}(d-2)$). L'algorithme de Bestvina-Handel ([4]) produit un représentant train-track h_0 sur le graphe G décrit sur la figure 6.17. On choisit un ensemble $A_\rho = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_d, \rho_{d+1}\}$ de $d+1$ entiers successifs. On identifie le groupe fondamental $\pi_1(G, *)$ de G avec F_d par

$$- 1 \simeq \rho_1,$$

$$- k \simeq \rho_{d+1}\rho_k \text{ pour tout } 2 \leq k \leq d.$$

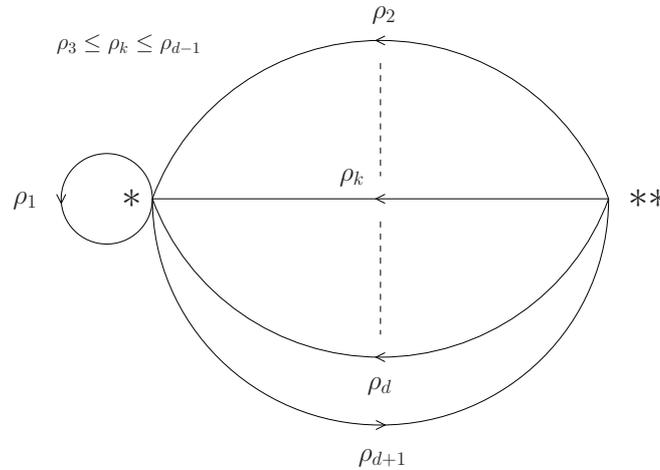


FIG. 6.17: Graphe G ; $h_0 : G \rightarrow G$ est train-track.

Si on identifie $\pi_1(G, *)$ avec $\pi_1(G, h_0(*))$ en choisissant le chemin trivial comme chemin de $*$ à $h_0(*)$, h_0 induit l'automorphisme

$$\begin{aligned}
\phi^{-1} & : F(A_\rho) \rightarrow F(A_\rho) \\
\rho_1 & \mapsto \rho_{d+1}\rho_d \\
\rho_2 & \mapsto \rho_{d+1}^{-1}\rho_1 \\
\rho_k & \mapsto \rho_{k-1} \text{ pour tout } 3 \leq k \leq d \\
\rho_{d+1} & \mapsto \rho_d^{-1}
\end{aligned}$$

sur le groupe libre muni de la base A_ρ . On en profite pour définir ϕ , l'automorphisme inverse à ϕ^{-1} :

$$\begin{aligned}
\phi & : F(A_\rho) \rightarrow F(A_\rho) \\
\rho_1 & \mapsto \rho_1\rho_{d+1}\rho_2 \\
\rho_k & \mapsto \rho_{k+1} \text{ pour tout } 2 \leq k \leq d-1 \\
\rho_d & \mapsto \rho_{d+1}^{-1} \\
\rho_{d+1} & \mapsto \rho_1\rho_{d+1}.
\end{aligned}$$

La matrice d'incidence $M_{\phi^{-1}}$ de ϕ^{-1} est définie par

- $M_{\phi^{-1}}(d, 1) = M_{\phi^{-1}}(d+1, 1) = 1$,
- $M_{\phi^{-1}}(d+1, 2) = 1$,
- pour tout $2 \leq i \leq d+1$, $M_{\phi^{-1}}(i-1, i) = 1$,
- $M_{\phi^{-1}}$ est nulle partout ailleurs.

Le polynôme caractéristique de $M_{\phi^{-1}}$ est $(-1)^{d+1}(x^{d+1} - 2x - 1)$. Cette matrice est primitive et admet donc une valeur propre réelle dominante $\eta (> 1)$; η vérifie $\eta^{d+1} = 2\eta + 1$. Le vecteur $[(\eta^d - 1) \ \eta^{d-1} \ \eta^{d-2} \ \dots \ \eta^2 \ \eta \ 1]$ est un vecteur propre à gauche associé à η .

On construit maintenant un arbre invariant (voir 2.3.1 page 47) associé à σ^{-1} . On note Φ_1 la classe extérieure de σ^{-1} .

Un chemin $\alpha : [0, 1] \rightarrow G$ où $\alpha(0)$ et $\alpha(1)$ sont égaux aux sommets * ou ** détermine un élément $\langle \alpha \rangle$ de $F(A_\rho)$. Si e est un arc de G , $\langle e \rangle$ est un élément de $A_\rho \cup A_\rho^{-1}$. Le vecteur $v = [(\eta^d - 1) \ \eta^{d-1} \ \eta^{d-2} \ \dots \ \eta^2 \ \eta \ 1]$ est un vecteur propre à gauche de $M_{\phi^{-1}}$ associé à η . On donne à l'arc ρ_i de G la longueur $v(i)$.

h_0 est l'équivalence d'homotopie de G dans G vérifiant, pour tout arc e de G , $\langle h_0(e) \rangle = \phi^{-1}(\langle e \rangle)$. h_0 multiplie la longueur de tout chemin légal par η .

On note $p : \tilde{G} \rightarrow G$ une projection du revêtement universel \tilde{G} de G . La métrique sur G induit une distance d_0 sur \tilde{G} et F_d agit sur \tilde{G} par isométries. On définit une application (continue) $h : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ qui vérifie, pour tout arc e de G et pour tout relevé \tilde{e} de e , $p \circ h(\tilde{e}) = h_0(e)$ et telle que

$$\sigma^{-1}(w)h = hw$$

pour tout élément w de F_d .

On définit pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la pseudo-distance

$$d_k(x, y) = \eta^{-k}d_0(h^k(x), h^k(y))$$

sur \tilde{G} et on note $d_\infty = \lim_{k \rightarrow +\infty} d_k$. d_∞ est une pseudo-distance sur \tilde{G} et une distance sur $T = \tilde{G}/\sim$ où $x \sim y$ si et seulement si $d_\infty(x, y) = 0$. F_d agit encore sur T par isométries et h induit l'application H sur T . H est une homothétie de rapport η qui vérifie

$$\sigma^{-1}(w)H = Hw$$

pour tout élément w de F_d . Finalement, T est un arbre invariant de σ^{-1} .

On remarque que pour tout $a \in A$, $X_a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma^{-nd}(a^{-1})$ est fixe par σ^{-d} ; l'indice (défini page 47) de σ^{-d} est donc > 0 quel que soit le rang de son sous-groupe fixe. L'homothétie H admet donc un point fixe dans T (unique puisque $\eta > 1$) et on le note P .

L'application Q

T est un arbre réel et F_d agit sur T de manière non-triviale, minimale, avec stabilisateurs d'arcs triviaux. L'action est de plus à orbites denses ($\eta > 1$). On définit l'application Q de ∂F_d dans $\overline{T} \cup \partial T$ comme dans la section 2.3.1 (page 48).

6.2.7 Substitution d'arbre

On définit une substitution d'arbre τ et un arbre initial L_0^s . On va associer à chaque arbre $L_n^s = \tau(L_0^s)$, un arbre réel L_n de \mathcal{R}^d . La suite $(L_n)_n$ obtenue sera convergente vers un arbre réel compact L de \mathcal{T}^d , et on montrera par la suite que L et $Q(\Omega^+)$ sont isomorphiquement isométriques.

Substitution d'arbre simplicial

Soit $A_\tau = \{\rho_1, \dots, \rho_d, \rho_{d+1}, \rho_{d+2} \dots \rho_{2d-1}\}$ un alphabet. Si X_i est un élément de $\mathcal{S}_E(A_\tau)$, $X_i = (\{x, y\}, \{(x, y, \rho_i)\})$, où $\rho_i \in A_\tau$, τ est la substitution d'arbre définie par :

- l'image de X_1 est représentée figure 6.18,
- l'image de X_2 est représentée figure 6.19,
- $\tau(X_i) = X_{i-1}$ si $3 \leq i \leq d$,
- $\tau(X_{d+1}) = (\{x, y\}, \{(y, x, \rho_d)\})$,
- $\tau(X_{d+2}) = X_1$,
- $\tau(X_i) = X_{i-1}$ si $d + 3 \leq i \leq 2d - 1$.

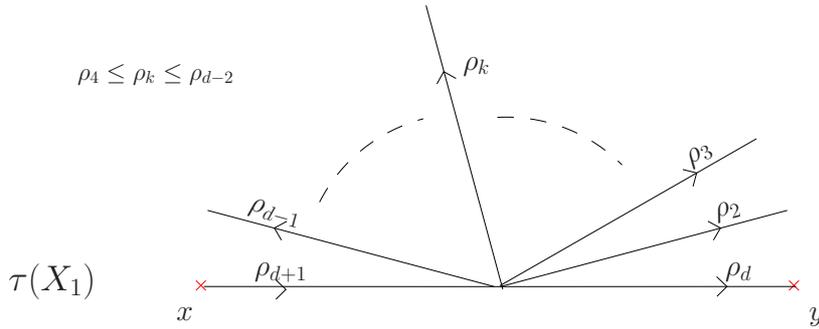


FIG. 6.18: Image de X_1 par τ .

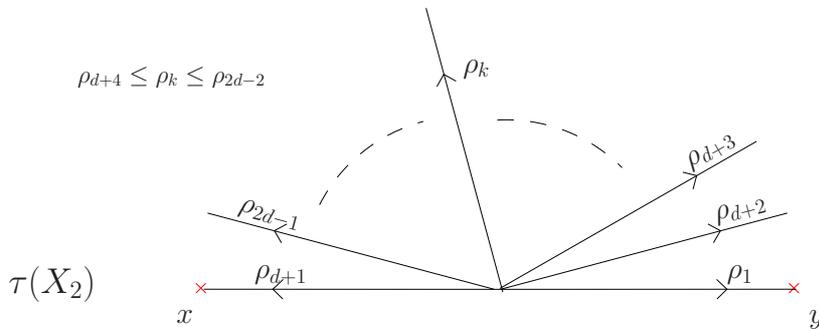


FIG. 6.19: Image de X_2 par τ .

Remarque 6.2.18 On peut définir la matrice d'incidence M_τ associée à τ ; M_τ est une matrice $(2d-1) \times (2d-1)$ et $M_\tau(i, j)$ est le nombre d'arêtes colorées par ρ_i dans $\tau(X_j)$. Le spectre de M_τ est constitué du spectre de M_σ et de $d-1$ valeurs propres de module 1.

La matrice tronc M_{tronc} de τ est définie par

- $M_{tronc}(d, 1) = M_{tronc}(d+1, 1) = 1$,
- $M_{tronc}(1, 2) = M_{tronc}(d+1, 2) = 1$,
- $M_{tronc}(1, d+2) = 1$,
- pour tout $3 \leq i \leq 2d-1$ où $i \neq d+2$, $M_{tronc}(i-1, i) = 1$,
- M_{tronc} est nulle partout ailleurs.

Le spectre de cette matrice contient le spectre de $M_{\phi^{-1}}$ et 0 (d'ordre $d-2$). η est donc sa valeur propre dominante. On pourra vérifier que le vecteur

$$[(\eta^d - 1) \quad \eta^{d-1} \quad \eta^{d-2} \quad \dots \quad \eta^2 \quad \eta \quad 1 \quad \frac{(\eta^d - 1)}{\eta} \quad \frac{(\eta^d - 1)}{\eta^2} \quad \dots \quad \frac{(\eta^d - 1)}{\eta^{d-3}} \quad \frac{(\eta^d - 1)}{\eta^{d-2}}]$$

est un vecteur propre à gauche associé à η .

On choisit un élément X_1 de $\mathcal{S}_E(A_\tau)$ d'arête colorée par ρ_1 et on définit $L_0^s = \tau^2(X_1)$. L_0^s est représenté figure 6.20; on note x_0 la racine de L_0^s . On définit également $L_n^s = \tau^n(L_0^s)$.

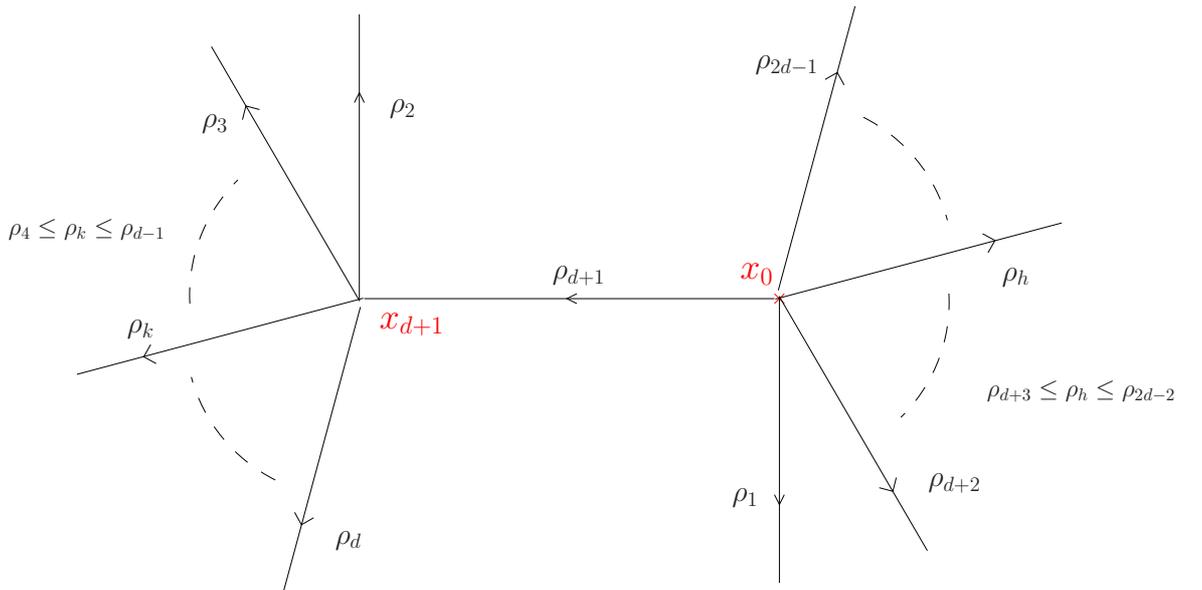


FIG. 6.20: Représentation de L_0^s .

Proposition 6.2.19 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n^s est un arbre discerné.

Il faut vérifier qu'aucun chemin de la forme $\overline{\rho_k} \rho_k$, $\rho_1 \leq \rho_k \leq \rho_{2d-1}$ n'apparaît dans les chemins de L_n^s . Une paire $\overline{\rho_k} \rho_k$ sera dite illégale.

Pour tout $1 \leq i \leq 2d-1$, $X_i = (\{x, y\}, \{(x, y, \rho_i)\})$ est un élément de $\mathcal{S}_E(A_\tau)$; on note x_i l'unique sommet de $\tau(X_i)$ à distance 1 de x et y_i l'unique sommet de $\tau(X_i)$ à distance 1 de y . On rappelle que $\gamma_\tau(X_i)$ associe un mot de $(A_\tau \cup \overline{A_\tau})^*$ (où $\overline{A_\tau} = \{\overline{\rho_1}, \dots, \overline{\rho_{2d-1}}\}$) à tout couple de sommets de $\tau(X_i)$ (cf. paragraphe 4.1.1 page 60).

On définit l'application suivante pour tout ρ_k, ρ_h de A_τ ,

$$\begin{array}{lcl}
\varphi & : & (A_\tau \cup \overline{A_\tau})^2 \rightarrow (A_\tau \cup \overline{A_\tau})^2 \\
& & \rho_k \rho_h \mapsto \gamma_{\tau(X_k)}(y_k, y) \gamma_{\tau(X_h)}(x, x_h) \\
& & \overline{\rho_k} \rho_h \mapsto \gamma_{\tau(X_k)}(x_k, x) \gamma_{\tau(X_h)}(x, x_h) \\
& & \rho_k \overline{\rho_h} \mapsto \gamma_{\tau(X_k)}(y_k, y) \gamma_{\tau(X_h)}(y, y_h) \\
& & \overline{\rho_k} \overline{\rho_h} \mapsto \gamma_{\tau(X_k)}(x_k, x) \gamma_{\tau(X_h)}(y, y_h)
\end{array}$$

On commence par remarquer que

- si $\rho_2 \leq \rho_k < \rho_h \leq \rho_d$, alors $\varphi^d(\overline{\rho_k} \rho_h) = \overline{\rho_k} \rho_h$,
- si $\rho_2 \leq \rho_h \leq \rho_d$, alors $\varphi^d(\rho_{d+1} \rho_h) = \rho_{d+1} \rho_h$.

De plus, pour tout $1 \leq h \leq d-2$, $\varphi^{h+2}(\overline{\rho_{d+1}} \rho_{d+1+h}) = \rho_{d-(h+1)} \overline{\rho_d}$, et on constate que $\varphi^d(\rho_{d-(h+1)} \overline{\rho_d}) = \rho_{d-(h+1)} \overline{\rho_d}$. De même, $\varphi^2(\overline{\rho_{d+1}} \rho_1) = \rho_{d-1} \overline{\rho_d}$ qui est constant par φ^d . Enfin

- $\varphi(\overline{\rho_1} \rho_{d+2}) = \overline{\rho_{d+1}} \rho_1$,
- pour tout $2 \leq h \leq d-2$, $\varphi(\overline{\rho_1} \rho_{d+1+h}) = \overline{\rho_{d+1}} \rho_{d+h}$,
- si $\rho_{d+2} \leq \rho_{d+1+k} < \rho_{d+1+h} \leq \rho_{2d-1}$, alors $\varphi^k(\overline{\rho_{d+1+k}} \rho_{d+1+h}) = \overline{\rho_1} \rho_{d+1+h-k}$,

et on se ramène aux cas précédents. Finalement, appliquer successivement τ à L_0^s ne produit jamais de paire illégale et pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n^s est un arbre discerné.

Propriété 6.2.20 *La boule de rayon 1 autour du point x_{d+1} (figure 6.20) est constante sous l'action de τ :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, B_{x_{d+1}, 1}(L_n^s) =_{\mathcal{S}(A_\tau)} B_{x_{d+1}, 1}(L_0^s).$$

La figure 6.21 représente les boules de rayon 1 (autour de la racine) des arbres L_n^s . On remarque de plus que pour tout $k \geq d$, $B_1(L_k^s) =_{\mathcal{S}(A_\tau)} B_1(L_d^s)$.

Il nous est nécessaire pour la suite de définir le morphisme $pr : (A_\tau \cup \overline{A_\tau})^* \rightarrow F(A_\rho)$ tel que

- $pr(\rho_k) = \rho_k$ pour $k \in \{1, \dots, d+1\}$,
- $pr(\rho_{d+1+k}) = \phi^k(\rho_1)$ pour $k \in \{1, \dots, d-2\}$,
- $pr(\overline{\rho_k}) = \rho_k^{-1}$ pour $k \in \{1, \dots, d+1\}$,
- $pr(\overline{\rho_{d+1+k}}) = \phi^k(\rho_1^{-1})$ pour $k \in \{1, \dots, d-2\}$.

Définitions 6.2.21 *Pour tout entier n , on appelle BT_n^s l'ensemble des sommets de L_n^s , BP_n^s l'ensemble des points de branchement de L_n^s (c'est-à-dire les sommets de degré d) et TP_n^s l'ensemble des feuilles de L_n^s (c'est-à-dire les sommets de degré 1).*

Si x_0 est la racine de L_n^s , pour tout élément x de BT_n^s , il existe un chemin minimal de x_0 à x et un mot $\gamma_n(x_0, x)$ de $(A_\tau \cup \overline{A_\tau})^*$ associé (on pourra se reporter au paragraphe 4.1.1 page 59).

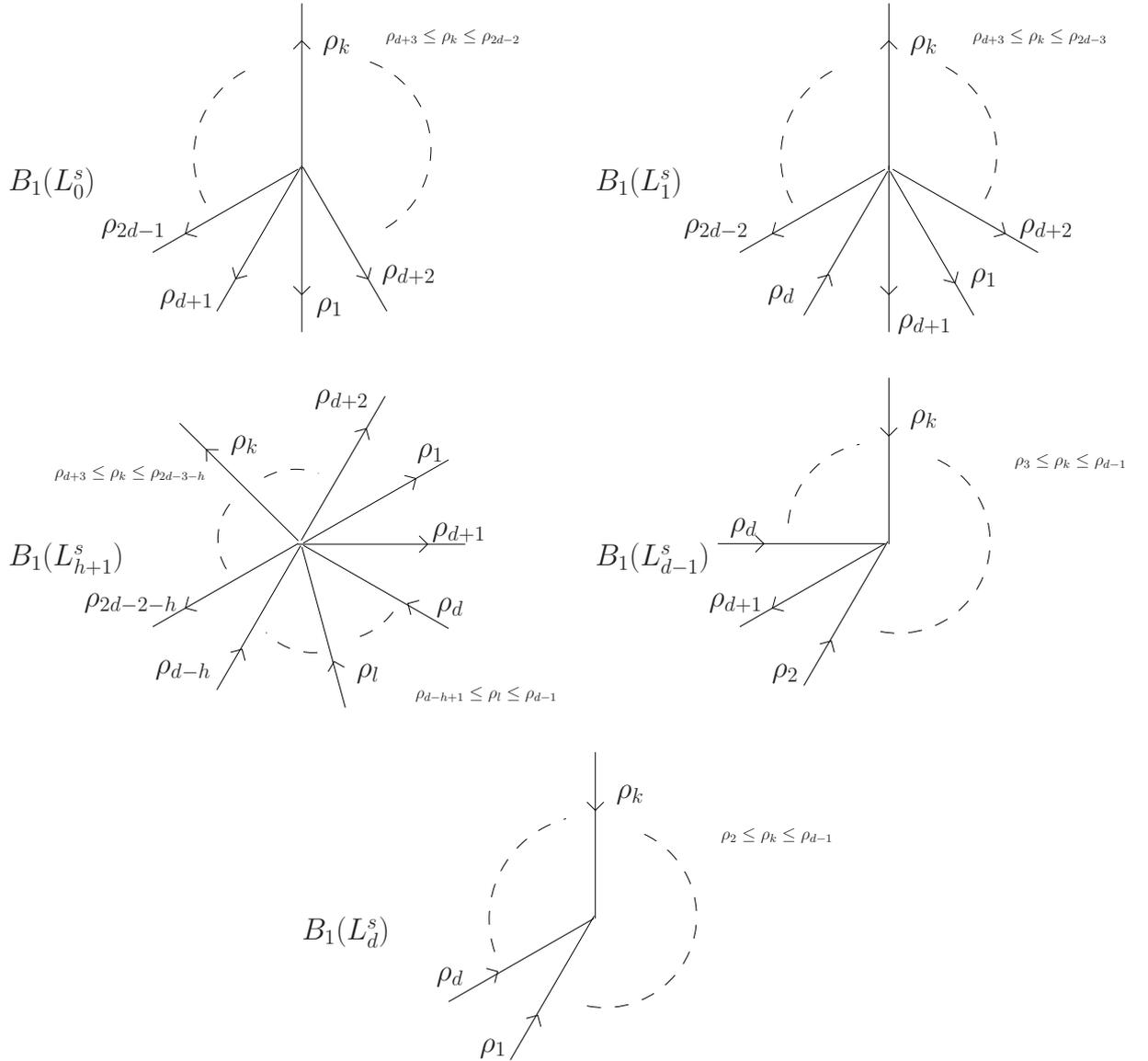
Proposition 6.2.22 *Si x et y sont deux sommets distincts de L_n^s , alors on a $pr(\gamma_n(x_0, x)) \neq pr(\gamma_n(x_0, y))$.*

Preuve *L'arbre L_n^s est discerné, et on a directement $\gamma_n(x_0, x) \neq \gamma_n(x_0, y)$. Le résultat est immédiat si aucun des deux mots ne contient de lettres de $\{\rho_{d+2}, \dots, \rho_{2d-1}\}$ (en se rappelant que puisque L_n^s est discerné, il n'y aura pas d'annulations). Si $\gamma_n(x_0, x)$ contient la lettre $\rho_{d+1+k} \in \{\rho_{d+2}, \dots, \rho_{2d-1}\}$ et que $pr(\gamma_n(x_0, x)) = pr(\gamma_n(x_0, y))$, alors $\gamma_n(x_0, y)$ contient forcément la paire $\rho_1 \rho_{d+1}$; dans ce cas, L_{n+1}^s n'est pas discerné, ce qui contredit la proposition 6.2.19. \square*

Réalisation

On se permettra de confondre un point de \mathcal{R}^d avec ses écritures (réduites ou non). x_0 est la racine de L_0^s ; les arêtes de L_0^s sont énumérées ci-dessous :

- (x_0, x_1, ρ_1) ,
- (x_0, x_j, ρ_j) pour tout $d+1 \leq j \leq 2d-1$,
- (x_{d+1}, x_j, ρ_j) pour tout $2 \leq j \leq d$.

FIG. 6.21: Application de τ sur une boule de rayon 1.

On note ν_0 l'application définie par

$$\begin{aligned}
 \nu_0 &: BT_0^s \rightarrow \mathcal{R}^d \\
 x_0 &\mapsto O \\
 x_1 &\mapsto 1^{(\eta^d-1)} \\
 x_{d+j} &\mapsto j^{(\eta^d-1)\eta^{-(j-1)}} \quad \text{pour } 2 \leq j \leq d-1 \\
 x_{d+1} &\mapsto 0^1 \\
 x_j &\mapsto 0^1 j \eta^{d-(j-1)} \quad \text{pour } 2 \leq j \leq d-1 \\
 x_d &\mapsto 0^1 1^\eta
 \end{aligned}$$

On rappelle que le vecteur

$$vp = [(\eta^d - 1) \ \eta^{d-1} \ \eta^{d-2} \ \dots \ \eta^2 \ \eta \ 1 \ \frac{(\eta^d-1)}{\eta} \ \frac{(\eta^d-1)}{\eta^2} \ \dots \ \frac{(\eta^d-1)}{\eta^{d-3}} \ \frac{(\eta^d-1)}{\eta^{d-2}}]$$

est un vecteur propre à gauche (associé à η) de la matrice tronc de la substitution d'arbre. On construit par récurrence une suite de fonctions $\nu_n : BT_n^s \rightarrow \mathcal{R}^d$ vérifiant

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si (y_1, y_2, ρ_k) est une arête de L_n^s , alors $\nu_n(y_1)^{-1}\nu_n(y_2) = j^p$ pour un certain $0 \leq j \leq d-1$ et $|p| = \eta^{-n}vp(k)$,
- pour tout $y \in BT_{n-1} \cap BT_n$, $\nu_n(y) = \nu_{n-1}(y)$.

Propriété 6.2.23 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si (y_1, y_2, ρ_k) est une arête de L_n^s , alors la longueur du segment $[\nu_n(y_1), \nu_n(y_2)]$ est $vp(k)\eta^{-n}$.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'arbre L_n de \mathcal{T}^d comme l'enveloppe convexe des points de $\nu_n(BT_n^s)$. De manière évidente, $L_{n-1} \subset L_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$. De plus, tout point de L_n est à une distance strictement inférieure à η^{d-n} (par 6.2.23 et puisque η^d est strictement supérieur à toutes les coordonnées de vp) de L_{n-1} , ce qui fait de la suite $(L_n)_n$ une suite de Cauchy de \mathcal{T}^d qui est complet. On note finalement

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n.$$

Un point de branchement d'un arbre réel est un point duquel partent au moins 3 germes ; un point terminal est un point tel qu'un unique germe part de ce point.

Définitions 6.2.24 *On notera $BT_n = \nu_n(BT_n^s)$ l'union des points de branchement et des points terminaux de L_n , BP_n est l'ensemble de ses points de branchement, et TP_n est l'ensemble de ses points terminaux.*

On note que pour tout $n \in \mathbb{N}$, ν_n est une bijection BT_n^s dans BT_n .

Substitution d'arbre réel

On va définir la substitution d'arbre réel et en déduire la dimension de Hausdorff de L . On se place dans \mathcal{R}^d ; pour tout élément de $\Theta = \{11, 12, \dots, 1(d-1), 1d, 21, 22, \dots, 2(d-1), 2d, 3, 4, \dots, 2d-1\}$, on définit une similitude de Λ_d .

- $\zeta_k = Id$ ($3 \leq k \leq d$),
- $\zeta_{d+1} : [O, 0^1] \mapsto [0^1, O]$,
- $\zeta_k = Id$ ($d+2 \leq k \leq 2d-1$),
- $\zeta_{11} : [O, 0^1] \mapsto [O, 0^p]$ avec $p = (\eta(\eta^d - 1))^{-1} = (\eta + 1)^{-1}$,
- $\zeta_{1d} : [O, 0^1] \mapsto [0^p, 0^1]$,
- $\zeta_{1h} : [O, 0^1] \mapsto [0^p, 0^p h^{p\eta^{d-(h-1)}}]$, ($2 \leq h \leq d-1$)
- $\zeta_{2d} : [O, 0^1] \mapsto [0^{\eta^{-d}}, O]$,
- $\zeta_{2(d-1)} : [O, 0^1] \mapsto [0^{\eta^{-d}}, 0^1]$,
- $\zeta_{2h} : [O, 0^1] \mapsto [0^{\eta^{-d}}, 0^{\eta^{-d}} h^{\eta^{-(d+h)}(\eta^d - 1)}]$, ($1 \leq h \leq d-2$).

On définit également le sous-shift Σ_ζ de type fini associé à ζ par l'ensemble des mots de longueur 2 possibles.

- $(11)(d+1), (1d)(d)$,
- pour tout $2 \leq h \leq d-1$, $(1h)(h)$,
- $(2d)(d+1)$,
- pour tout $1 \leq h \leq d$, $(2(d-1))(1h)$,
- pour tout $1 \leq h \leq d-2$, $(2h)(d+1+h)$,
- pour tout $1 \leq h \leq d$, $3(2h)$,
- pour tout $1 \leq h \leq d$, $(d+2)(1h)$,
- pour tout $4 \leq k \leq 2d-1$ où $k \neq d+2$, $(k)(k-1)$.

Les cylindres de Σ_ζ sont notés $C_{11}, \dots, C_{1d}, C_{21}, \dots, C_{2d}, C_k$ ($3 \leq k \leq 2d-1$) et on définit $C_1 = \bigcup_{1 \leq h \leq d} C_{1h}$ et $C_2 = \bigcup_{1 \leq h \leq d} C_{2h}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'arbre L_n défini au paragraphe précédent est isomorphiquement isométrique à l'arbre

$$L'_n = \bigcup_{x_1 \dots x_m \in C_1} \zeta_{x_m} \circ \dots \circ \zeta_{x_1}([O, 0^{\eta^2(\eta^d-1)}])$$

où $m = n + 2$. La suite $(L'_n)_n$ converge vers un arbre réel compact L' isomorphiquement isométrique à L .

On se rend compte facilement qu'il existe une construction graphe-dirigée dont la matrice d'incidence pondérée est

$$\begin{bmatrix} 0 & \sum_{-1 \leq k \leq d-2} (\eta^k(\eta^d-1)^{-1})^\alpha \\ \sum_{0 \leq k \leq d-2} (\eta^{-(d+k)}(\eta^d-1))^\alpha & \eta^{-d\alpha} \end{bmatrix}$$

et qui admet $[L'K']$ comme vecteur de compacts invariant. Le graphe de la construction est fortement connexe et la dimension de Hausdorff de L' est donnée par un réel α qui vérifie

$$1 - \eta^{-d\alpha} - \eta^{-(2d-1)\alpha} \left(\frac{1 - \eta^{d\alpha}}{1 - \eta} \right) \left(\frac{1 - \eta^{(d-1)\alpha}}{1 - \eta} \right) = 0.$$

En remarquant que λ (valeur propre dominante de la matrice d'incidence associée à σ) vérifie l'équation $\lambda^d = \lambda^{d-1} + \lambda^{d-2} + \dots + \lambda + 1 = (1 - \lambda)^{-1}(1 - \lambda^d)$, on déduit que le réel $\alpha = \frac{\ln(\lambda)}{\ln(\eta)}$ est solution de l'équation. C'est la dimension de Hausdorff de L' .

Remarque 6.2.25 *Ce résultat est encore cohérent avec la remarque 6.2.18 (la valeur propre principale de la matrice d'incidence de τ est λ) et la propriété 6.2.23 (les longueurs des arêtes sont divisées par η à chaque application de la substitution d'arbre); λ joue le rôle de facteur d'expansion, et η celui de facteur de renormalisation.*

Remarque 6.2.26 *Cette dimension est approximativement égale à 1.829 pour la substitution sur 3 lettres (Tribonacci). Dans le cas de Tribonacci, la matrice d'incidence de σ a deux valeurs propres complexes conjuguées α et $\bar{\alpha}$. La dimension de Hausdorff de la frontière du fractal de Rauzy associé est donnée par le rapport $(-\frac{\ln(\eta)}{\ln(|\alpha|)})$ (cf. [18]) et est approximativement égale à 1.093.*

6.2.8 De $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$ à $\Omega_0^+ \cup \Omega_{g,1}^+$

On va se servir des automates positif et négatif des figures 6.16 et 6.15, ainsi que de la substitution d'arbre décrite en figures 6.18 et 6.19 afin de définir une bijection de $\Omega_0^+ \cup \Omega_{g,1}^+$ dans $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$.

L'application f_0

Soit f_1 l'application définie par

$$\begin{aligned} f_1 & : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n^s & \rightarrow & F(A_\rho) \\ & x & \mapsto & \phi^p(pr(\gamma_p(x_0, x))) \end{aligned}$$

où p est n'importe quel entier tel que L_p^s contient x . En effet, la substitution d'arbre τ est définie de manière à ce que $\phi(pr(\gamma_{p+1}(x_0, x))) = pr(\gamma_p(x_0, x))$. On pourra vérifier cela sur les chemins de longueur 1. Il vient que $f_1(x)$ ne dépend pas du choix de p .

Les arêtes de L_n^s colorée ρ_1 ou ρ_2 font apparaître de nouveaux points de branchement de L_{n+1}^s .

Définition 6.2.27 On dit qu'un point de branchement de L_{n+1}^s ($n \in \mathbb{N}$) est de **classe 1** s'il est issu d'une arête colorée ρ_1 , et qu'il est de **classe 2** s'il est issu d'une arête colorée ρ_2 . Le point x_0 est de classe 2 et le point x_{d+1} (voir figure 6.20) est de classe 1.

Soit Υ l'ensemble des mots u de $F(A_\rho)$ vérifiant

- $\epsilon \in \Upsilon$,
- tout mot pur positif (aucun ρ_i^{-1} pour tout $1 \leq i \leq d+1$) vérifiant
 - toute lettre ρ_k , pour $\rho_2 \leq \rho_k \leq \rho_d$, est précédée de la lettre ρ_{d+1} ,
 - toute lettre ρ_{d+1} est suivie de ρ_k , pour $\rho_2 \leq \rho_k \leq \rho_d$,
 est un mot de Υ ,
- tout mot pur négatif (aucun ρ_i pour tout $1 \leq i \leq d+1$) vérifiant
 - toute lettre ρ_k^{-1} , pour $\rho_2 \leq \rho_k \leq \rho_d$, est suivie de la lettre ρ_{d+1}^{-1} ,
 - toute lettre ρ_{d+1}^{-1} est précédée de ρ_k^{-1} , pour $\rho_2 \leq \rho_k \leq \rho_d$,
 est un mot de Υ ,
- Υ est stable par concaténation.

Remarque 6.2.28 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les écritures réduites de $\phi^n(\rho_1)$ (resp. $\phi^n(\rho_1^{-1})$) et de $\phi^n(\rho_{d+1}\rho_k)$ (resp. $\phi^n(\rho_k^{-1}\rho_{d+1}^{-1})$) pour tout $\rho_2 \leq \rho_k \leq \rho_d$, sont des éléments de Υ .

Proposition 6.2.29 Pour tout $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n^s$, si x est un point de branchement de classe 1, alors $f_1(x) = u\rho_{d+1}$ avec u pur positif et $u \in \Upsilon$. Si x est un point de branchement de classe 2 ($\neq x_0$), alors $f_1(x)$ est un élément pur négatif de Υ .

Preuve On se référera à la propriété 6.2.20 et à la figure 6.21. On vérifie facilement la propriété sur L_0^s et on la suppose vraie sur L_n^s .

Si x est un point de branchement de $BT_{n+1}^s \setminus BT_n^s$ de classe 1, alors x est issu d'une arête de L_n^s colorée ρ_1 . Une telle arête ne peut sortir que d'un point de branchement de classe 2, et tout point de branchement de classe 2 ayant une arête sortante colorée ρ_1 a également une arête sortante colorée ρ_{d+1} ; celle-ci ne peut être entrante que dans un point z de classe 1 et on en déduit

$$f_1(x) = f_1(z)\phi^n(\rho_{d+1}^{-1})\phi^{n+1}(\rho_{d+1}).$$

Une simple récurrence montrera que pour tout $m > 0$, $\phi^m(\rho_{d+1}) = \phi^{m-1}(\rho_1) \dots \phi(\rho_1)\rho_1\rho_{d+1}$, et le mot $\phi^{n-1}(\rho_1) \dots \phi(\rho_1)\rho_1$ est un préfixe de $\phi^n(\rho_1) \dots \phi(\rho_1)\rho_1$. Finalement, il existe un mot v pur positif de Υ tel que $f_1(x) = f_1(z)\rho_{d+1}^{-1}v\rho_{d+1}$, et concaténer la dernière lettre de $f_1(z)$ avec ρ_{d+1}^{-1} nous permet de conclure.

Si x est un point de branchement de $BT_{n+1}^s \setminus BT_n^s$ de classe 2, alors x est issu d'une arête de L_n^s colorée ρ_2 . Une telle arête ne peut sortir que d'un point de branchement y de classe 1, et on en déduit l'existence d'un point z de BT_n^s tel que (z, y, ρ_{d+1}) est une arête de L_n^s . z est alors forcément un point de branchement de classe 2. x vérifie

$$f_1(x) = f_1(z)\phi^n(\rho_{d+1})\phi^{n+1}(\rho_{d+1}^{-1}) = f_1(z)\phi^n(\rho_1^{-1})$$

et on peut conclure. \square

Proposition 6.2.30 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $x \in TP_n^s$ (l'ensemble des points terminaux de L_n^s), alors $f_1(x) \in \Upsilon$.

Preuve La propriété est facilement vérifiable au rang 0. Soit x est un point de $TP_n^s \setminus TP_{n-1}^s$ ($n > 0$). Il y a deux possibilités. La première est qu'il existe une arête (y, x, ρ_k) (où y un point de classe 2 et $\rho_{d+2} \leq \rho_k \leq \rho_{2d-1}$) de L_n^s ; dans ce cas $f_1(y) \in \Upsilon$ d'après 6.2.29, pour tout

$n + 1 \leq k \leq n + d - 2$, $\phi^k(1) \in \Upsilon$, et finalement, $f_1(x) \in \Upsilon$. Sinon, il existe une arête (z, x, ρ_k) (où z un point de classe 1 et $\rho_2 \leq \rho_k \leq \rho_{d-1}$) de L_n^s ; il existe alors un point z_0 de classe 2 tel que (z_0, z, ρ_{d+1}) est une arête de L_n^s . $f_1(z_0) \in \Upsilon$ d'après 6.2.29, pour tout $\rho_2 \leq \rho_k \leq \rho_{d-1}$, $\phi^n(\rho_{d+1}\rho_k) \in \Upsilon$, et à nouveau, $f_1(x) \in \Upsilon$. \square

Si un mot de Υ est vu comme une concaténation de mots purs (vérifiant les propriétés des mots purs de Υ), l'écriture du mot n'est pas forcément réduite. On se sert cependant de cette représentation pour définir le morphisme pr_d de Υ dans F_d .

- $pr_d(\rho_1) = 1$,
- $pr_d(\rho_{d+1}\rho_k) = k$ pour tout $2 \leq k \leq d$.

Propriété 6.2.31 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $pr_d(\phi^n(\rho_1)) = \sigma^n(1)$ et quel que soit $\rho_2 \leq \rho_k \leq \rho_d$, $pr_d(\phi^n(\rho_{d+1}\rho_k)) = \sigma^n(k)$.

$F(A \cup \{\rho\})$ désigne le groupe libre de base de $A \cup \{\rho\}$. On définit finalement l'application :

$$\begin{aligned}
 f_0 & : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n^s & \rightarrow & F_d \cup F(A \cup \{\rho\}) \\
 & x & \mapsto & pr_d(f_1(x)) = pr_d(\phi^p(pr(\gamma_p(x_0, x)))) \text{ si } x \text{ est de classe 2} \\
 & x & \mapsto & pr_d(f_1(x)) \text{ si } x \text{ est un point terminal} \\
 & x & \mapsto & pr_d(u)\rho \text{ où } f_1(x) = u\rho_{d+1} \text{ si } x \text{ est de classe 1.}
 \end{aligned}$$

On va montrer que f_0 est une bijection de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n^s$ dans $\delta(\Omega_0^+) \cup \delta(\Omega_{g,1}^+)$. On sépare l'étude des points de branchement et des points terminaux.

De $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BP_n^s$ à $\delta(\Omega_d^+) \cup \delta(\Omega_{g,1}^+)$

Proposition 6.2.32 f_0 est injective de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BP_n^s$ dans $F_d \cup F(A \cup \{\rho\})$.

Preuve L'application pr est injective par 6.2.22, et ϕ est un automorphisme. Il suffit de remarquer que pr_d est injective de l'ensemble des mots purs de Υ dans F_d ; la proposition 6.2.29 permet alors de conclure. \square

Définition 6.2.33 On dira qu'un mot $f_0(x)$ (ou que le point x) **apparaît** à une étape k si $x \in BT_k^s$ et $x \notin BT_{k-1}^s$.

On va d'abord vérifier que tous les mots décrits par l'automate négatif sont atteints.

Les mots de l'automate négatif

On se reporte à la propriété 6.2.20 et à la figure 6.21. Si x est un point de branchement de classe 2 qui apparaît à une étape n , alors pour tout $n + 1 \leq k \leq n + d$, il existe un point de branchement y de classe 2 tel que $\gamma_k(x, y) = \overline{\rho_d \rho_{d+1}}$ (γ_k est la fonction chemin de L_k^s) et y est apparu à l'étape k . On en déduit que le mot $f_0(x)\sigma^k(d^{-1})$ apparaît à l'étape k . De plus, pour tout $k \geq n + d$, il y a une arête colorée ρ_1 entrante dans x ; le mot $f_0(y) = f_0(x)\sigma^k(1^{-1})$ apparaît à l'étape k . Cependant, dans ce dernier cas, y est issu d'une arête (z, x, ρ_2) de L_{k-1}^s . z est forcément un point de branchement de classe 1 (ce sont les seuls qui acceptent une arête sortante colorée ρ_2), et on en déduit l'existence d'une arête (z_0, z, ρ_{d+1}) de L_{k-1}^s . z_0 est forcément un point de branchement de classe 2 (ce sont les seuls qui acceptent une arête sortante colorée ρ_{d+1}) et on peut déduire de la propriété 6.2.20 qu'il est apparu à l'étape $(k - 1)$. On en déduit que z_0 est un point de classe 2 qui vérifie $\gamma_k(z_0, y) = \overline{\rho_d \rho_{d+1}}$. Finalement, on a $f_0(z_0)\sigma^k(d^{-1}) = f_0(y)$ et on en déduit la propriété suivante.

Propriété 6.2.34 *Tous les mots $u = f_0(x)$, où x est un point de branchement de classe 2, apparus à une étape n , vérifient $u = f_0(y)\sigma^n(d^{-1})$, où y est un point de branchement de classe 2, et $f_0(y)$ est apparus à une étape m , $n - d \leq m \leq n - 1$.*

Si x est un point de branchement de classe 2, on se permettra de dire que $f_0(x)$ est un mot de classe 2.

Proposition 6.2.35

- (1) ϵ est le seul mot de classe 2 de l'étape 0.
- (2) Pour tout $m \geq 1$, le plus long développement automatique d'un mot de classe 2 apparaissant en m est $\sigma^{u_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{u_n}(1^{-1})$ ($n \geq 0$) avec,
 - si $m = (n + 1)d$, $n > 0$, alors pour tout $0 \leq i \leq n$, $u_i = (i + 1)d$,
 - si $m = kd + h$, avec $k \geq 0$, $1 \leq h \leq d - 1$, $n = h + k - 1$, alors pour tout $0 \leq i \leq h - 1$, $u_i = i$, et pour tout $h \leq i \leq h + k - 1$, $u_i = (i - h + 1)d + h$.
- (3) Tous les suffixes de ce mot sont apparus à une étape $\leq m$.
- (4) L'image par f_0 de tout point de branchement de classe 2 peut s'écrire sous la forme d'un développement automatique de l'automate négatif.

Preuve On va démontrer les parties (2), (3) et (4) par récurrence forte. On suppose les 3 propriétés vraies aux rangs $< m$ et on suppose $m \geq 1$.

(2) On déduit de la propriété 6.2.34 que le développement le plus long apparaissant en m (que l'on notera l_m jusqu'à la fin de cette preuve) est $l_{m-1}\sigma^m(d^{-1})$ où l_{m-1} est le plus long développement apparaissant en $m - 1$. En rappelant que $\sigma^d(1^{-1}) = 1^{-1}\sigma(1^{-1}) \dots \sigma^{d-1}(1^{-1})$, on peut écrire

$$l_{m-1} = 1^{-1}\sigma(1^{-1}) \dots \sigma^{m-2}(1^{-1}),$$

si $m > 1$ et $l_{m-1} = \epsilon$ sinon. On a alors

$$l_m = l_{m-1}\sigma^m(d^{-1}) = l_{m-1}\sigma^{m-1}(1^{-1}).$$

Ce n'est pas un développement automatique. Cependant, si $m = kd$ pour un certain $k > 0$, on peut écrire pour tout $0 \leq i \leq m - 1$, $i = 0[d]$, $\sigma^i(1^{-1}) \dots \sigma^{i+d-1}(1^{-1}) = \sigma^{i+d}(1^{-1})$, donnant finalement $l_m = \sigma^{u_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{u_{k-1}}(1^{-1})$, avec pour tout $0 \leq j \leq k - 1$, $u_j = (j + 1)d$. Si $m = kd + h$ pour $k \geq 0$ et $1 \leq h \leq d - 1$, écrire $\sigma^i(1^{-1}) \dots \sigma^{i+d-1}(1^{-1}) = \sigma^{i+d}(1^{-1})$ pour tout $0 \leq i \leq m - 1$ tel que $i = h[d]$ produira $l_m = \sigma^{u_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{u_{h+k-1}}(1^{-1})$, avec pour tout $0 \leq j \leq h - 1$, $u_j = j$, et pour tout $h \leq j \leq h + k - 1$, $u_j = (j - h + 1)d + h$.

(3) On va étudier le développement le plus court apparaissant à l'étape m (on le notera c_m), et on va montrer qu'il vérifie $|c_m| = |l_{m-1}| + 1$. On définit $l_k = c_k = \epsilon$ pour tout $k \leq 0$.

Par l'hypothèse de récurrence et par 6.2.34, c_m est obtenu par concaténation du plus court de l'étape $m - d$ (ou de ϵ si $m \leq d$), que l'on note c_{m-d} , et de $\sigma^m(d^{-1})$. En remarquant que pour tout $0 \leq k \leq d - 2$, $(k + 2)^{-1}1^{-1}\sigma(1^{-1}) \dots \sigma^k(1^{-1}) = \sigma^{k+1}(1^{-1})$, et grâce à l'expression de $l_{m-(d+1)}$, on en déduit que si $m = nd + h + 1$ ($n \geq 0$ et $0 \leq h \leq d - 1$), alors $c_{m-d} = \sigma^{v_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{v_{n-1}}(1^{-1})$ avec pour tout $0 \leq j \leq n - 1$, $v_j = jd + h$. La même remarque après concaténation nous permet de conclure que $|c_m| = |l_{m-1}| + 1$.

Finalement, par hypothèse de récurrence, tous les suffixes de l_{m-1} dont c_{m-d} (si $m \geq d + 1$) ou ϵ (si $m \leq d$) est suffixe sont apparus entre les étapes $m - d$ et $m - 1$ et d'après 6.2.34, on en déduit que tout suffixe de l_m dont c_m est suffixe apparaît à l'étape m .

(4) est une conséquence de (3). Pour tout x point de branchement de classe 2 de $\bigcup_{p \leq k \leq m-1} BP_k^s$, où $p = \min(0, m - d)$, $f_0(x)$ peut s'écrire sous forme automatique. Tout mot apparaissant en m

peut s'écrire sous la forme $f_0(x)\sigma^m(d^{-1})$ pour un certain x et ils sont tous suffixes de l_m . Ce dernier pouvant s'écrire sous forme automatique, tous ses suffixes le peuvent également. \square

On rappelle que d'après la proposition 6.2.16, tout mot de $\delta(\Omega_d^+)$ peut s'obtenir par un développement automatique de l'automate négatif, et tout développement automatique donne un mot de $\delta(\Omega_d^+)$. On peut maintenant énoncer le résultat suivant.

Proposition 6.2.36 *L'application f_0 est une bijection de l'ensemble des points de branchement de classe 2 de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BP_n^s$ dans $\delta(\Omega_d^+)$.*

Preuve f_0 est injective de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BP_n^s$ dans $F_d \cup F(A \cup \{\rho\})$ (proposition 6.2.32). D'après 6.2.35 (3), tout mot de $\delta(\Omega_d^+)$ est atteint par un point de branchement d'un certain L_n^s et par 6.2.35 (4), tout point de branchement est le développement d'un mot de $\delta(\Omega_d^+)$. \square

On déduit d'après 6.2.35 (1) et (2) que si v^{-1} est le plus long développement automatique de classe 2 apparaissant à une étape donnée, alors v est un mot bispécial (cf. proposition 6.2.13). On peut vérifier facilement que la réciproque est vraie. On suppose que $v = \sigma^{u_n}(1) \dots \sigma^{u_0}(1)$ est un mot bispécial. Si $n > 0$ ou $n = 0$ et $u_n \geq d$, alors v^{-1} est le plus grand développement apparaissant à l'étape u_n . Si $n = 0$ et $u_n \leq d - 2$, v^{-1} est le plus grand développement apparaissant à l'étape $u_n + 1$.

Propriété 6.2.37 *Si v est un mot bispécial, alors v^{-1} est le plus long développement automatique de classe 2 apparaissant à une certaine étape. Si v^{-1} est le plus long développement de classe 2 apparaissant à une certaine étape, alors v est bispécial.*

Les points de branchement de classe 1

On se reporte à la figure 6.21 et à la propriété 6.2.20. On constate que seul un point de branchement de classe 2 peut être origine d'une arête colorée ρ_{d+1} . Si un point de branchement y de classe 2 apparaît à une étape n , alors pour tout $n \leq k \leq n + d - 1$, il existe une arête colorée ρ_{d+1} sortante de y dans L_k^s . On note cependant que si $k = n$, alors le point x tel que (y, x, ρ_{d+1}) est une arête de L_n^s , est apparu à une étape $< n$.

Propriété 6.2.38 *Pour tout point de branchement x de classe 1 de L_n^s , il existe un point de branchement y de classe 2 tel que (y, x, ρ_{d+1}) est une arête de L_n^s , et $f_0(y)$ est apparu à une étape m , $n - (d - 1) \leq m \leq n$.*

De plus, si x est apparu à l'étape n , alors y est apparu à une étape $n - (d - 1) \leq m \leq n - 1$.

Si x est un point de branchement de classe 1, on dira également que $f_0(x)$ est un mot de classe 1.

Proposition 6.2.39

- (1) Pour tout point de branchement x de classe 1, $f_0(x) \in \delta(\Omega_{g,1}^+)$.
- (2) ρ est le seul mot de $\delta(\Omega_{g,1}^+)$ à l'étape 0. Pour tout $n \geq 1$, le mot de $\delta(\Omega_{g,1}^+)$ le plus long apparaissant en n est $c_{n-(d-1)}\sigma^{n-1}(1)\sigma^{n-2}(1) \dots \sigma(1)1\rho$ ($n \geq 0$) (en écriture non réduite) où,
 - $c_{n-(d-1)} = \epsilon$ si $n \leq d - 1$,
 - $c_{n-(d-1)}$ est le mot de $\delta(\Omega_d^+)$ le plus court apparaissant à l'étape $n - (d - 1)$.
- (3) Tous les suffixes de ce mot sont apparus à une étape $\leq m$.

Preuve (1) On commence par remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\phi^n(\rho_{d+1}) = \phi^{n-1}(\rho_1)\phi^{n-2}(\rho_1)\dots\phi(\rho_1)\rho_1\rho_{d+1},$$

et on rappelle que $pr_d(\rho_1) = 1$. On obtient ainsi

$$u = pr_d(\phi^n(\rho_{d+1})) = \sigma^{n-1}(1)\sigma^{n-2}(1)\dots\sigma(1)1\rho.$$

Par la formule $\sigma^d(1) = \sigma^{d-1}(1)\dots\sigma(1)1$, le mot de classe 2 le plus long de l'étape n peut s'écrire $l_n = 1^{-1}\sigma(1^{-1})\dots\sigma^{n-1}(1^{-1})$ (proposition 6.2.35). On a alors $l_n u = \rho$. Tout mot v de classe 2 apparaissant à une étape $\leq n$ est un suffixe de l_n , et puisque u est un mot de $\delta(\Omega_{g,1}^+)$, alors v l'est également.

(2) est une conséquence directe de (1) et de la propriété 6.2.38. On montre (3) par récurrence. On suppose que tous les suffixes du mot $c_{n-(d-1)}u$ sont apparus au plus tard à l'étape n . Il nous reste à montrer que le mot de $\delta(\Omega_{g,1}^+)$ le plus court apparaissant à l'étape $n+1$ (on le notera $w_{n+1}\rho$) est le successeur (en terme de longueur) de $c_{n-(d-1)}u$.

Si $n \leq d-1$, on doit vérifier que $|w_{n+1}| = |u| + 1$. D'après 6.2.38, $w_{n+1} = l_n \sigma^n(1)u$. Si $n = 0$, $l_n = \epsilon$, et si $1 \leq n \leq d-1$, alors $l_n = 1^{-1}\sigma(1^{-1})\dots\sigma^{n-1}(1^{-1})$. En remarquant que pour tout $0 \leq k \leq d-2$, $\sigma^{k+1}(1) = \sigma^k(1)\dots\sigma(1)1(k+2)$, on obtient : $w_{n+1} = (n+1)u$, et $|w_{n+1}| = |u| + 1$.

Si $n \geq d$, alors on a $|l_{n-d}| + 1 = |c_{n-(d-1)}|$ par 6.2.35 ; montrer que $w_{n+1} = l_{n-d}u$ impliquera $|w_{n+1}| = |c_{n-(d-1)}u| + 1$. Toujours par 6.2.35, on remarque que $l_n = l_{n-d}\sigma^n(1^{-1})$ et on a ainsi $w_{n+1} = l_n \sigma^n(1)u = l_{n-d}u$. \square

On rappelle que f_0 est injective de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BP_n^s$ dans $F_d \cup F(A \cup \{\rho\})$ (proposition 6.2.32).

Corollaire 6.2.40 *L'application f_0 est une bijection de l'ensemble des points de branchement de classe 1 de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BP_n^s$ dans $\delta(\Omega_{g,1}^+)$.*

Les mots de l'automate positif

On s'intéresse maintenant aux points terminaux des arbres L_n^s ; l'ensemble de ces points sera noté TP_n^s .

Proposition 6.2.41 *Pour tout point x de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} TP_n^s$, $f_0(x)$ est un mot de $\delta(\Omega_g^+)$.*

Preuve Les images par f_0 des points terminaux de L_0^s sont $2, \dots, d$ (pour les voisins de x_{d+1}) et $1, \sigma(1), \dots, \sigma^{d-2}(1)$ (pour les voisins de x_0). On suppose $n \geq 1$.

Si x est un point terminal qui apparaît à une étape n , alors x n'a qu'un unique voisin y dans BT_n^s , et y est un point de BP_n^s . On rappelle que x_0 est la racine de L_n^s .

Si y est un point de branchement de classe 2, alors la dernière lettre de $\gamma_n(x_0, x)$ est ρ_h , avec $\rho_{d+2} \leq \rho_h \leq \rho_{2d-1}$. D'après 6.2.35, on peut écrire $f_0(y)$ sous la forme d'un développement automatique dont l'exposant maximal est $\leq n$, ce qui en fait un suffixe propre de $\sigma^{n+1}(1^{-1})$ (6.2.15 page 131). On rappelle que pour tout $1 \leq k \leq d-2$, $pr(\rho_{d+1+k}) = \phi^k(\rho_1)$ et $pr_d(\phi^k(\rho_1)) = \sigma^k(1)$. Finalement, pour tout $1 \leq k \leq d-2$, le mot $f_0(y)\sigma^{n+k}(1) = f_0(x)$ est un suffixe propre de $\sigma^{n+k}(1)$ et appartient donc à $\delta(\Omega_g^+)$.

Si y est un point de branchement de classe 1, alors celui-ci est apparu à l'étape n , et d'après 6.2.38, il existe un point de branchement z de classe 2 apparu à une étape m , $n - (d-1) \leq m \leq n-1$, et tel que (z, y, ρ_{d+1}) est une arête de L_n^s . Les deux dernières lettres de $\gamma_n(x_0, x)$ sont $\rho_{d+1}\rho_k$ pour $\rho_2 \leq \rho_k \leq \rho_{d-1}$. On rappelle que $pr_d(\rho_{d+1}\rho_k) = k$, et on en déduit que $f_0(x) = f_0(z)\sigma^n(k)$ pour un certain $2 \leq k \leq d-1$. z est apparu à une étape antérieure à $n-1$; si $n-1 < d$, alors $f_0(z)$ est un suffixe propre de $\sigma^{n-1}(1^{-1})$ (6.2.35 et 6.2.15), et $\sigma^n(k) = \sigma^{n-1}(1)\sigma^{n-1}(k+1)$ pour tout $2 \leq k \leq d-1$. Si $n-1 \geq d$, $f_0(z)$ est un suffixe propre de $\sigma^{n-2}(1^{-1})\sigma^{n-1}(1^{-1})$ (6.2.35 et 6.2.15) ; si $2 \leq k \leq d-2$, alors $\sigma^n(k) = \sigma^{n-1}(1)\sigma^{n-2}(1)\sigma^{n-2}(k+2)$ et si $k = d-1$,

$\sigma^n(k) = \sigma^{n-1}(1)\sigma^{n-2}(1)$. Dans tous les cas, $f_0(x)$ est un suffixe propre de $\sigma^n(k)$ et il appartient donc à $\delta(\Omega_g^+)$. \square

Pour tout point x terminal de L_n^s (pour tout $n \in \mathbb{N}$), $f_0(x)$ est un mot de $\delta(\Omega_g^+)$ et il est donc pur positif. On en déduit (pour les mêmes raisons qu'en 6.2.32) que f_0 est injective de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} TP_n^s$ dans $\delta(\Omega_g^+)$.

On va montrer que tous les points de $\delta(\Omega_g^+)$ sont effectivement atteints. On note que pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, $\delta(\Omega_g^+)$ contient exactement d mots de longueur l ; ce sont les suffixes des passés des points fixes w_1, \dots, w_d . Les dernières lettres de ces mots sont respectivement $1, 2, \dots, d$. On remarque également que :

- pour tout $0 \leq k \leq d-1$, la dernière lettre de $\sigma^n(1)$ où $n = k[d]$ est $(k+1)$,
- pour tout $0 \leq k \leq d-1$, si $n = k[d]$, $n > 0$, alors aucun mot n'apparaissant à l'étape n n'a pour dernière lettre k ou $(k+1)[d]$, mais pour tout $h \neq k, (k+1)[d]$, il existe un mot apparaissant en n qui finit par h .

Proposition 6.2.42 *L'application f_0 est une bijection de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} TP_n^s$ dans $\delta(\Omega_g^+)$.*

Preuve Les mots $2, \dots, d$ et $1, \sigma(1), \dots, \sigma^{d-2}(1)$ sont présents à l'étape 0. On va montrer que tous les mots finissant par la lettre 1 sont atteints. Le même raisonnement pourra être fait pour les autres mots.

Des mots finissant par 1 apparaissent aux étapes $[id+2, id+d-1]$ quel que soit i dans \mathbb{N} . Si $2 \leq k \leq d-1$, pour tout u , mot de classe 2 apparaissant en $id+k$, le mot $u\sigma^{id+k}(\sigma^{d-k}(1)) = u\sigma^{(i+1)d}(1)$ apparaît également en $id+k$ et se termine par la lettre 1. D'après 6.2.35 (3), si on note c_{id+2} le mot de classe 2 le plus court apparaissant à l'étape $id+2$, et l_{id+d-1} le mot de classe 2 le plus long apparaissant à l'étape $id+d-1$, tous les suffixes de $\beta_{i,1} = c_{id+2}\sigma^{(i+1)d}(1)$ dont $\alpha_{i,1} = l_{id+d-1}\sigma^{(i+1)d}(1)$ est suffixe apparaissent entre les étapes $id+2$ et $id+d-1$.

On note c_h et l_h les mots de classe 2 les plus courts et plus longs à apparaître à l'étape h . Par convention, si $h \leq 0$, $c_h = l_h = \epsilon$. De plus, pour tout v , mot de classe 2 apparaissant à une étape m , $id+k-(d-1) \leq m \leq id+k-1$, le mot $v\sigma^{id+k}(d-(k-1))$ apparaît en $id+k$ et se termine par 1. D'après 6.2.35 (3) et 6.2.38, tous les suffixes de $c_{id+k-(d-1)}\sigma^{id+k}(d-(k-1))$ dont $l_{id+k-1}\sigma^{id+k}(d-(k-1))$ est suffixe apparaissent à l'étape $id+k$. En remarquant que pour tout $2 \leq k \leq d-2$, $|c_{id+k-(d-1)}\sigma^{id+k}(d-(k-1))| + 1 = |l_{id+(k+1)-1}\sigma^{id+(k+1)}(d-((k+1)-1))|$, on en déduit que tous les suffixes de $\beta_{i,2} = c_{id}\sigma^{id+d-1}(2)$ dont $\alpha_{i,2} = l_{id+1}\sigma^{id+2}(d-1)$ est suffixe apparaissent entre les étapes $id+2$ et $id+d-1$.

On va regrouper les deux types de mots terminaux que l'on vient d'étudier. On vérifie que $|c_{id}\sigma^{id+d-1}(2)| + 1 = |l_{id+d-1}\sigma^{(i+1)d}(1)|$ (ou encore $|\beta_{i,2}| + 1 = |\alpha_{i,1}|$) par les formules $\sigma^d(1) = \sigma^{d-1}(1) \dots \sigma(1)1$ et $\sigma^{d-1}(2) = \sigma^{d-2}(1) \dots \sigma(1)1$, et on en déduit que tous les suffixes de $\beta_{i,1} = c_{id+2}\sigma^{(i+1)d}(1)$ dont $\alpha_{i,2} = l_{id+1}\sigma^{id+2}(d-1)$ est suffixe apparaissent entre les étapes $id+2$ et $id+d-1$.

1 est le seul mot finissant par 1 de l'étape 0 et le mot $1^{-1}\sigma^2(d-1) = 21$ apparaît à l'étape 2. Il ne reste plus qu'à vérifier que $|c_{id+2}\sigma^{(i+1)d}(1)| + 1 = |l_{(i+1)d+1}\sigma^{(i+1)d+2}(d-1)|$ (ou encore $|\beta_{i,1}| + 1 = |\alpha_{i+1,2}|$) (pour tout $i \geq 0$). Cette égalité est déductible de $l_{id+1}\sigma^{(i+1)d}(1) = l_{(i+1)d+1}\sigma^{(i+1)d+1}(1)\sigma^{(i+1)d}(1)$ et on conclut grâce à 6.2.35 (2)(3).

Finalement, tous les mots de $\delta(\Omega_g^+)$ finissant par 1 sont atteints. \square

Bijection de $\Omega_0^+ \cup \Omega_{g,1}^+$ dans $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$

On a montré successivement que f_0 est une bijection de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BP_n^s$ dans $\delta(\Omega_d^+) \cup \delta(\Omega_{g,1}^+)$ et de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} TP_n^s$ dans $\delta(\Omega_g^+)$. On sait par ailleurs que δ est une bijection de $\Omega_0^+ \cup \Omega_{g,1}^+$ dans $\delta(\Omega_0^+ \cup \Omega_{g,1}^+)$, et qu'il y a une bijection entre BT_n^s et BT_n pour tout n . On définit finalement la bijection

$$f_Q : \Omega_0^+ \cup \Omega_{g,1}^+ \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n.$$

6.2.9 Les points fixes dans l'arbre

On rappelle la proposition 6.2.35 (2). Pour tout $m \geq 1$, le plus long développement automatique d'un mot de classe 2 apparaissant en m est $\sigma^{u_0}(1^{-1}) \dots \sigma^{u_n}(1^{-1})$ ($n \geq 0$) avec,

- si $m = (n+1)d$, $n > 0$, alors pour tout $0 \leq i \leq n$, $u_i = (i+1)d$,
- si $m = kd + h$, avec $k \geq 0$, $1 \leq h \leq d-1$, $n = h+k-1$, alors pour tout $0 \leq i \leq h-1$, $u_i = i$, et pour tout $h \leq i \leq h+k-1$, $u_i = (i-h+1)d + h$.

Propriété 6.2.43 Soit v le plus long développement automatique d'un mot de classe 2 apparaissant en $m > 0$ (ou ϵ si $m = 0$).

- (1) Si $m < d$, v^{-1} est le début du développement en préfixes des mots $\omega_{i,2}$, où $m+1 \leq i \leq d$, et pour tout $1 \leq k \leq d-2$, $v\sigma^{m+k}(1)$ est le début du développement en suffixes de $\omega_{m+1,2}$.
- (2) Si $m \geq d$ et $m = id + h - 1$, $1 \leq h \leq d$, alors v^{-1} est le début du développement en préfixes de $\omega_{h,2}$, et pour tout $1 \leq k \leq d-2$, $v\sigma^{m+k}(1)$ est le début du développement en suffixes de $\omega_{h,2}$.

Preuve On commence par remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma^n(1) = 12\sigma(2) \dots \sigma^{n-1}(2)$.

(1) $v = 1^{-1}\sigma(1^{-1}) \dots \sigma^{m-1}(1^{-1})$, et on rappelle puisque $m < d$, $\sigma^m(1) = \sigma^{m-1}(1) \dots \sigma(1)1(m+1)$. On conclut facilement par les formules $\sigma^{m+k}(1) = \sigma^m(12\sigma(2) \dots \sigma^{k-1}(2))$ et $13 = \sigma(2)$, $12\sigma(3) = \sigma^2(2)$, et $12\sigma(2) \dots \sigma^{m-2}(2)\sigma^{m-1}(3) = \sigma^m(2)$ si $m \geq 2$.

(2) On procède par récurrence sur m par pas de d . Si $v\sigma^{m+k}(1)$ est le début du développement en suffixes de $\omega_{h,2}$, alors $v\sigma^{m+d}(1^{-1})$ est le plus long développement automatique d'un mot de classe 2 apparaissant en $m+d$ (d'après 6.2.35 (2)) et les mots $w_k = v\sigma^{m+d}(1^{-1})\sigma^{m+d+k}(1)$, $1 \leq k \leq d-2$, apparaissent en même temps. Par $\sigma^{m+d+k}(1) = \sigma^{m+d}(12\sigma(2) \dots \sigma^{k-1}(2))$, on obtient $w_k = v\sigma^{m+d}(2\sigma(2) \dots \sigma^{k-1}(2))$. Il reste à écrire $\sigma^{m+d}(2) = \sigma^{m+d-1}(13) = \sigma^{m+k}(12\sigma(2) \dots \sigma^{d-2-k}(2))\sigma^{m+d-1}(3)$ pour pouvoir conclure. \square

6.2.10 Injection de L dans \overline{T}

L'application ξ

On rappelle que $\omega = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma^n(1)$ est le point fixe (unilatéral à droite) de σ , que $\omega_{1,2}^+$ est la projection de $\omega_{1,2}$ sur Ω^+ , et que P est le point de T fixe par H . On va montrer (proposition 6.2.44) que $Q(\omega) = P \in T$. On a montré que f_Q est une bijection de $\Omega_0^+ \cup \Omega_{g,1}^+$ dans $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$. En particulier c'est une bijection de Ω_0^+ dans $f_Q(\Omega_0^+)$ et on peut définir l'application ξ ; pour tout v de Ω_0^+

$$\begin{aligned} \xi & : f_Q(\Omega_0^+) & \rightarrow & T \\ & f_Q(v) & \mapsto & Q(v) \end{aligned}$$

Il s'agit de montrer que ξ conserve les distances. On notera ξ_n la restriction de ξ à $BT_n \cap f_Q(\Omega_0^+)$, et on montrera que ξ_n conserve les distances quel que soit n .

Note *De même que dans le premier exemple, on commence par montrer par récurrence que ξ conserve les distances, puis on étend, par densité de $f_Q(\Omega_d^+)$ dans L , les définitions de f_Q et ξ ; on obtient ainsi le théorème 6.2.52 (page 150).*

La distance dans L est notée d_L ; on remarque que si s et t de BT_n sont à distance x , alors par définition de la substitution d'arbre, ils seront à distance x dans tout L_m , $m \geq n$, et à distance x dans L . On désignera également par d_L la distance dans n'importe quel L_n . Il nous suffira de montrer que pour tout couple (u, v) de Ω_0^+ , $d_L(f_Q(u), f_Q(v)) = d_\infty(Q(u), Q(v))$.

On commence par ξ_0 . L'application ν_0 définie en 6.2.7 (page 136) nous permet de déduire

- $f_Q(\omega) = O$,
- $f_Q(1\omega) = 1(\eta^{d-1})$,
- $\forall 2 \leq j \leq d-1, f_Q(\sigma^{j-1}(1)\omega) = j(\eta^{d-1})\eta^{-(j-1)}$,
- $f_Q(\omega_{1,2}^+) = 0^1$,
- $\forall 2 \leq k \leq d-1, f_Q(k\omega) = 0^1 k \eta^{d-(k-1)}$,
- $f_Q(d\omega) = 0^1 1^\eta$.

Propriété 6.2.44 *Pour tout élément $v \in F_d$, $Q(v\omega) = vP$.*

Par la propriété $\sigma^{-1}(v)H = Hv$ pour tout v de F_d , on déduit $d_\infty(P, \sigma^n(1)P) = \eta^{-n}d_\infty(P, 1P)$. Ainsi, la suite $(\sigma^n(1))_n$ converge vers ω , et la suite $(\sigma^n(1)P)_n$ converge vers P ; d'après la proposition 2.3.5 (page 48), $Q(\omega) = P$. L'équivariance de Q permet de vérifier la propriété.

On rappelle que l'identification du groupe fondamental $\pi_1(G, *)$ avec F_d est faite selon

- $1 \simeq \rho_1$,
- $k \simeq \rho_{d+1}\rho_k$ pour tout $2 \leq k \leq d$,

et qu'on la longueur de l'arc ρ_h ($1 \leq h \leq d+1$) de G est donné par la h -ième coordonnée du vecteur $[(\eta^d - 1) \ \eta^{d-1} \ \eta^{d-2} \ \dots \ \eta \ 1]$. ρ_1 et $\rho_{d+1}\rho_k$ (quel que soit $2 \leq k \leq d$) sont des chemins légaux, et on se réfère à la propriété 2.3.3 (page 48) pour déduire que

$$\begin{aligned} d_\infty(Q(\omega), Q(\sigma^j(1)\omega)) &= \eta^{-j}d_\infty(P, 1P) = \eta^{-j}(\eta^d - 1), \quad 1 \leq j \leq d-2 \\ d_\infty(Q(\omega), Q(k\omega)) &= d_\infty(P, kP) = 1 + \eta^{d-(k-1)} \quad \text{pour } 2 \leq k \leq d. \end{aligned}$$

De plus, on a montré que l'arbre L_n^s est discerné quel que soit $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que

- pour tout $2 \leq h < k \leq d$, le chemin $\rho_k^{-1}\rho_h$ (de G) est légal,
- pour tout $0 \leq h < k \leq d-2$, le chemin $\rho_1^{-1}\phi^{h-k}(\rho_1)$ est légal,
- si $2 \leq k \leq d$ et $0 \leq h \leq d-2$, le chemin $(\phi^{-h}(\rho_k))^{-1}\rho_1$ est légal.

On a ainsi

- pour tout $2 \leq h < k \leq d$, $d_\infty(Q(k\omega), Q(h\omega)) = d_\infty(kP, hP) = \eta^{d-(k-1)} + \eta^{d-(h-1)}$,
- pour tout $0 \leq h < k \leq d-2$, $d_\infty(Q(\sigma^k(1)\omega), Q(\sigma^h(1)\omega)) = d_\infty(\sigma^k(1)P, \sigma^h(1)P) = (\eta^d - 1)(\eta^{-k} + \eta^{-h})$,
- si $2 \leq k \leq d$ et $0 \leq h \leq d-2$, $d_\infty(Q(k\omega), Q(\sigma^h(1)\omega)) = d_\infty(kP, \sigma^h(1)P) = 1 + \eta^{d-(k-1)} + (\eta^d - 1)\eta^{-h}$.

Finalement, ξ_0 conserve les distances. On suppose que ξ_n conserve les distances et on étudie ξ_{n+1} .

Définition 6.2.45 *On dit qu'un sous-arbre e de L_n^s est 2-simple s'il est l'enveloppe convexe dans L_n^s d'un ensemble E_t uniquement constitué de point terminaux et de points de branchement de classe 2 de L_n^s , et si e ne contient aucun point de branchement de classe 2 à part ceux de E_t .*

On donnera par la suite une définition équivalente pour les sous-arbre de L_n . Il n'existe qu'un seul type de sous-arbre 2-simple de L_n^s qui n'est plus 2-simple dans L_{n+1}^s ; ce sont les arbres égaux (au sens de $\mathcal{S}(A_\tau)$) à $B_{x_{d+1},1}(L_0^s)$, la boule de rayon 1 autour du point x_{d+1} (voir figure 6.20). Soit e un sous-arbre de L_n^s tel que $e =_{\mathcal{S}(A_\tau)} B_{x_{d+1},1}(L_0^s)$ et e est l'enveloppe convexe de E_t dans L_n^s . Alors l'enveloppe convexe de E_t dans L_{n+1}^s est égale (toujours au sens de $\mathcal{S}(A_\tau)$) à L_0^s . Pour tout $e =_{\mathcal{S}(A_\tau)} L_0^s$ de L_{n+1}^s , si e est l'enveloppe convexe de E_t dans L_{n+1}^s , on définit le sous-arbre e_r de L_{n+1} comme l'enveloppe convexe de $\nu_{n+1}(E_t)$. Vérifier que ξ_{n+1} conserve les distances revient à vérifier qu'elle les conserve sur les sous-arbres e_r de L_{n+1} . Le raisonnement effectué sur ξ_0 , et la propriété 6.2.23 nous permettent de conclure.

La récurrence est ainsi complétée; pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $\xi_n : BT_n \rightarrow T$ conserve les distances. On en déduit, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $BT_n \subset BT_{n+1}$, que la proposition suivante est vérifiée.

Proposition 6.2.46 *L'application ξ définie pour tout v de Ω_0^+ par*

$$\begin{array}{rcl} \xi & : & f_Q(\Omega_0^+) \rightarrow T \\ & & f_Q(v) \mapsto Q(v) \end{array}$$

conserve les distances.

Densité des points de branchement de classe 2 et des points terminaux dans L

On dira d'un point de L qu'il est de classe 2 s'il est l'image par ν_n (pour un n quelconque) d'un point de branchement de classe 2.

On remarque que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, tout sommet de L_n^s est à distance au plus 2 d'un point de branchement de classe 2. On déduit alors de la propriété 6.2.23 (page 138) que si $x \in L_n$, alors il existe un point de branchement de classe 2 de L_n à distance $\leq 2\eta^{d-n}$ (par exemple). Ce constat nous permet de montrer la proposition suivante.

Proposition 6.2.47 *L'ensemble des points de branchement de classe 2 de L est dense (pour la topologie métrique) dans L .*

Preuve Soit $x \in L$ et $(x_n)_n$ une suite convergente vers x avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in L_n$. On choisit un réel ϵ et un entier m tel que $\epsilon - 2\eta^{d-m} > 0$. Il existe un entier $n_0 \geq m$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $d_L(x, x_n) < \epsilon - 2\eta^{d-m}$ et une suite $(y_n)_n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, où y_n est un point de branchement de classe 2 de L_n , et $d_L(x_n, y_n) \leq 2\eta^{d-n}$. Alors, pour tout $n \geq n_0 \geq m$, $d_L(x, y_n) < \epsilon - 2\eta^{d-m} + 2\eta^{d-n} \leq \epsilon$. \square

On peut montrer de la même manière que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} TP_n$ est également dense dans L .

ξ et f_Q étendent leurs domaines

Proposition 6.2.48 *Pour tout élément v de Ω^+ , il existe une suite $(v_n)_n$ de mots de $\mathfrak{L}(\Omega)$ telle que*

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \omega \in \Omega^+$,
- $(v_n)_n$ converge vers $v \in \Omega^+$,
- la suite $(v_n P)_n$ de T converge dans \overline{T} .

Preuve Si v est un mot de $\Omega^+ \setminus \Omega_0^+$ ou de Ω_d^+ , il existe un mot uv de Ω et on peut associer au mot $S^{-1}(uv)$ une unique suite $(p_i, \alpha_i, s_i)_{i \geq 0}$ de l'automate des préfixes-suffixes vérifiant :

$$\forall m_0 \in \mathbb{N}, \exists m > m_0 \text{ tel que } s_m \neq \epsilon.$$

On obtient grâce aux suffixes un développement automatique (de l'automate positif décrit figure 6.16 page 130) de v ; $v = \sigma^{u_0}(k_0) \dots \sigma^{u_n}(k_n) \dots$ (avec $2 \leq k_i \leq d$ pour tout $i \in \mathbb{N}$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $v_n = \sigma^{u_0}(k_0) \dots \sigma^{u_n}(k_n)$. La suite $(v_n)_n$ tend effectivement vers v , et puisque tout v_n s'écrit sous forme d'un développement automatique, $v_n \omega$ est bien un élément de Ω^+ . De plus,

$$d_\infty(v_{n-1}P, v_nP) = d_\infty(P, \sigma^{u_n}(k_n)P) \leq \eta^{-u_n} d_\infty(P, k_nP) \leq \eta^{-u_n} (1 + \eta^{d-1})$$

et $(v_nP)_n$ est une suite de Cauchy.

Si v est un mot de Ω_g^+ , la suite des suffixes du développement $(p_i, \alpha_i, s_i)_{i \geq 0}$ associé au mot $S^{-1}(uv)$ de Ω est ultimement constante égale à ϵ . On note $v_0 = \sigma^{u'_0}(k_0) \dots \sigma^{u'_{n_0}}(k_{n_0})$, où $j = u'_{n_0}$ est l'entier maximal pour lequel $s_j \neq \epsilon$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_0 \sigma^{u_n}(2)$, avec $u_1 = j + (k_n - 1)$ et $u_n = u_1 + dn + 1$. La suite $(\sigma^{u_n}(2))_{n \geq 1}$ tend vers ω et la suite $(v_n)_n$ tend vers v . Tout v_n s'écrit sous forme d'un développement automatique; $v_n \omega$ est dans Ω^+ . Enfin (pour $n \geq 2$),

$$d_\infty(v_{n-1}P, v_nP) = d_\infty(\sigma^{u_{n-1}}(2)P, \sigma^{u_n}(2)P) \leq \eta^{-u_{n-1}} (1 + \eta^{d-1}) + \eta^{-u_n} (1 + \eta^{d-1}),$$

et $(v_nP)_n$ est encore une suite de Cauchy. \square

Pour tout élément v de $\Omega^+ \setminus \Omega_0^+$, on choisit une suite $(v_n)_n$ de mots finis comme dans la proposition 6.2.48. Puisque ξ conserve les distances sur $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} TP_n$, la suite $(f_Q(v_n \omega))_n$ est également une suite de Cauchy de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} TP_n$, et est donc convergente dans L (compact).

On définit alors $f_Q : \Omega^+ \rightarrow L$. La restriction de f_Q à $\Omega_0^+ \cup \Omega_{g,1}^+$ a été définie précédemment. Si $v \in \Omega^+ \setminus (\Omega_0^+ \cup \Omega_{g,1}^+)$, alors on a mis en évidence une suite $(v_n)_n$ qui converge vers v et telle que $(f_Q(v_n \omega))_n$ converge dans L ; on note alors $f_Q(v) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_Q(v_n \omega)$.

Proposition 6.2.49 *Si u et v sont deux mots distincts de Ω^+ vérifiant $d_L(f_Q(u), f_Q(v)) = \rho$, alors $d_\infty(Q(u), Q(v)) = \rho$.*

Preuve On choisit deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ de mots finis comme dans la proposition 6.2.48. $(u_n)_n$ tend vers u , $(v_n)_n$ tend vers v , et les suites $(f_Q(u_n \omega))_n$ et $(f_Q(v_n \omega))_n$ sont des suites de Cauchy de L qui tendent vers $f_Q(u)$ et $f_Q(v)$ respectivement; on note $\rho = d_L(f_Q(u), f_Q(v))$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_L(f_Q(u_n \omega), f_Q(v_n \omega)) = d_\infty(Q(u_n \omega), Q(v_n \omega)) = d_\infty(u_n P, v_n P)$, et les suites $(u_n P)_n$ et $(v_n P)_n$ tendent vers $Q(u)$ et $Q(v)$ respectivement. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|\rho - d_L(f_Q(u_n \omega), f_Q(v_n \omega))| < \frac{\epsilon}{2}$ et $|d_\infty(Q(u), Q(v)) - d_\infty(u_n P, v_n P)| < \frac{\epsilon}{2}$, ce qui donne $|\rho - d_\infty(Q(u), Q(v))| < \epsilon$. Finalement, $d_\infty(Q(u), Q(v)) = \rho$. \square

La proposition est en particulier vraie pour les mots $u, v \in \Omega^+$ tels que $f_Q(u) = f_Q(v)$, ce qui nous permet d'étendre l'ensemble de définition de ξ .

Remarque 6.2.50 *La nouvelle application ξ définie pour tout $v \in \Omega^+$ par*

$$\begin{aligned} \xi & : f_Q(\Omega^+) & \rightarrow & \overline{T} \\ & f_Q(v) & \mapsto & Q(v) \end{aligned}$$

conserve encore les distances. On en déduit, d'après la proposition 2.3.5 (page 48), que si $(v_n)_n$ (où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \omega \in \Omega^+$) converge vers $v \in \Omega^+$ et $(f_Q(v_n \omega))_n$ converge dans L , alors $(f_Q(v_n \omega))_n$ converge vers $f_Q(v)$.

Proposition 6.2.51 *L'application $f_Q : \Omega^+ \rightarrow L$ ainsi définie est surjective.*

Preuve Soit $x \in L \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$; $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} TP_n$ étant dense dans L , il existe une suite $(x_p)_p$ d'éléments de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} TP_n$ convergente vers x . f_Q est une bijection de Ω_g^+ dans $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} TP_n$; on choisit donc la suite $(u_p \omega)_p$ de Ω_g^+ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f_Q(u_p \omega) = x_p$. Par compacité de Ω^+ , on peut choisir une sous-suite $(v_p \omega)_p$ de $(u_p \omega)_p$ convergente vers un élément v de Ω^+ . Puisque $x \in L \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$, $v \notin \Omega_0^+$ et $|v_p| \rightarrow +\infty$ lorsque $p \rightarrow +\infty$. $(v_p)_p$ converge également vers v et $(f_Q(v_p \omega))_p$ converge vers x . La remarque 6.2.50 nous permet alors de conclure que $f_Q(v) = x$. \square

On peut donner grâce à cette proposition la nouvelle application $\xi : L \rightarrow \bar{T}$ définie pour tout $v \in \Omega^+$, par $\xi(f_Q(v)) = Q(v)$.

Théorème 6.2.52 L'application ξ définie pour tout v de Ω^+ par

$$\begin{array}{ccc} \xi & : & L \quad \rightarrow \quad \bar{T} \\ & & f_Q(v) \quad \mapsto \quad Q(v) \end{array}$$

conserve les distances. ξ est une bijection isométrique de L dans $Q(\Omega^+)$.

6.2.11 Une première décomposition de L_n

Soit u^{-1} un élément de $\delta(\Omega_d^+)$ qui apparaît à l'étape n . On note $x = f_Q(u^{-1}\omega)$, $x_h = f_Q(u^{-1}\sigma^n(\sigma^h(1))\omega)$, pour $0 \leq h \leq d-2$, et $y_k = f_Q(u^{-1}\sigma^n(k)\omega)$, pour $2 \leq k \leq d$. Chacun de ces points sépare l'espace $\overline{\mathcal{R}^d} \setminus \{x_h\}$ en $2d$ composantes connexes, et l'une d'elle contient x . On notera $Cn_{x_h}(x)$ (resp. $Cn_{y_k}(x)$) la composante connexe issue de x_h (resp. y_k) et contenant x . Si $E_t = \{x_h, y_k, 0 \leq h \leq d-2, 2 \leq k \leq d\}$, on définit

$$L(x) = (L \cap (\bigcap_{z \in E_t} Cn_z(x))) \cup E_t.$$

On s'intéresse à l'antécédent de $L(x)$ par l'application f_Q .

Si u est un mot de $\mathfrak{L}(\Omega)$, l'ensemble des mots de Ω^+ dont u est le préfixe est noté C_u , et l'ensemble des mots v de Ω^+ tels que uv est encore un mot de Ω^+ est noté P_u .

Autour des mots de $\delta(\Omega_d^+)$

Proposition 6.2.53 Si u^{-1} est un élément de $\delta(\Omega_d^+)$, alors $L(f_Q(u^{-1}\omega)) = f_Q(P_u)$.

On note qu'on peut rendre la propriété vraie pour le mot vide ϵ en considérant que celui-ci est apparu à l'étape 0; $L = L(f_Q(\omega)) = f_Q(P_\epsilon) = f_Q(\Omega^+)$.

Cela est en fait suffisant pour initialiser une récurrence. On supposera que pour tout mot u_0^{-1} de $\delta(\Omega_d^+)$ apparaissant à une étape $\leq n-1$, la propriété $L(f_Q(u_0^{-1}\omega)) = f_Q(P_{u_0})$ est vérifiée. Si $u^{-1} \in \delta(\Omega_d^+)$ apparaît à l'étape n , alors $v^{-1} = u^{-1}\sigma^n(d)$ est un mot de $\delta(\Omega_d^+)$ apparu à une étape antérieure m , et u^{-1} est un des d mots $v^{-1}\sigma^{m+k}(d^{-1})$, $1 \leq k \leq d$ (cf. proposition 6.2.34 page 142). Une simple vérification permet d'obtenir les propriétés suivantes.

Propriété 6.2.54 Si u^{-1} est un point de $\delta(\Omega_d^+)$ apparaissant à l'étape n , alors

- pour tout $0 \leq h \leq d-2$, $u^{-1}\sigma^n(\sigma^h(1))\omega \in P_u$,
- pour tout $2 \leq k \leq d$, $u^{-1}\sigma^n(k)\omega \in P_u$,
- pour tout $1 \leq k \leq d$, $u^{-1}\sigma^{n+k}(d^{-1})\omega \in P_u$, et l'inclusion
$$L(u^{-1}\sigma^{n+k}(d^{-1})\omega) \subset L(u^{-1}\omega)$$

est vérifiée.

Une éventuelle récurrence, couplée à la proposition 6.2.34, permet de déduire la conséquence suivante.

Conséquence 6.2.55 *Si x est un point de branchement de classe 2 ou un point terminal de $L(f_Q(u^{-1}\omega))$, alors l'antécédent (par f_Q) de x dans Ω_0^+ est également dans P_u .*

$L(f_Q(u^{-1}\omega))$ est compact en tant que fermé du compact L . Si x est un point quelconque de $L(f_Q(u^{-1}\omega)) \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$, il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $L(f_Q(u^{-1}\omega)) \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} TP_n$ convergente vers x (par densité) et une suite $(w_n)_n$ d'éléments de $\delta(\Omega_g^+)$ tels que $w_n\omega \in P_u$ et $f_Q(w_n\omega) = x_n$. $(w_n\omega)_n$ converge (quitte à prendre une sous-suite) vers un mot w par compacité de Ω^+ . De plus, $|w_n| \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$ puisque $x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$. w est également la limite de $(w_n)_n$ et $w \in P_u$ (ce dernier étant ouvert-fermé); enfin, $f_Q(w) = x$ (par remarque 6.2.50). On obtient $L(f_Q(u^{-1}\omega)) \subset f_Q(P_u)$.

L'autre inclusion dépendra de la proposition suivante.

Proposition 6.2.56 *Si $v^{-1} \in \delta(\Omega_d^+)$ apparaît à l'étape m , et si $u_h^{-1} = v^{-1}\sigma^{m+h}(d^{-1})$, $1 \leq h \leq d$, alors pour tout $1 \leq i < j \leq d$*

$$P_{u_i} \cap P_{u_j} = \{v^{-1}\omega\}.$$

Preuve *Ecrire $u_h v^{-1}\omega = \sigma^{m+h}(d)\omega$, pour tout $1 \leq h \leq d$ suffit à montrer que $v^{-1}\omega$ est effectivement dans l'intersection. ω est l'unique mot infini à droite spécial à gauche (6.2.7 page 128); on en déduit que $v^{-1}\omega$ est le seul élément de cette intersection. \square*

Maintenant, par l'hypothèse de récurrence, $L(f_Q(v^{-1}\omega)) = f_Q(P_v)$; en particulier, pour tout w de $\delta(\Omega_0^+)$ tel que $w\omega \in P_u$, on a $f_Q(w\omega) \in L(f_Q(v^{-1}\omega)) \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} BT_n$ (en effet $P_u \subset P_v$ puisque v est suffixe de u). Par la conséquence 6.2.55 (qu'on appliquera en fait aux points u_h différents de u), et se rappelant que f_Q est une bijection de Ω_0^+ dans $f_Q(\Omega_0^+)$, on déduit que $f_Q(w\omega) \in L(f_Q(u^{-1}\omega))$ (s'il était dans $L(f_Q(u_h^{-1}\omega)) \setminus L(f_Q(u^{-1}\omega))$, $u_h \neq u$, on aurait $w\omega \neq v^{-1}\omega$ et $w\omega \in P_{u_h} \cap P_u$, ce qui est impossible).

On choisit w dans $\Omega^+ \setminus \Omega_0^+$, w^- tel que $w^-w \in \Omega$, et u un suffixe de w^- (w est donc dans P_u). Le mot $S^{-1}(w^-w)$ a un développement en préfixes-suffixes dans lequel les préfixes (resp. suffixes) sont non tous nuls; on note $(p_i, \alpha_i, s_i)_{i \geq 0}$ ce développement. On obtient un développement automatique de w ; $w = \sigma^{u_0}(k_0) \dots \sigma^{u_n}(k_n) \dots$, avec $2 \leq k_i \leq d$ pour tout $0 \leq i \leq n$.

Proposition 6.2.57 *Il existe j_w tel que pour tout $j \geq j_w$, le mot $u\sigma^{u_0}(k_0) \dots \sigma^{u_j}(k_j)\omega$ ($2 \leq k_i \leq d$ pour tout $0 \leq i \leq j$) est un mot de Ω_0^+ .*

Preuve *Le mot u est un suffixe de w^- . Il existe donc un rang h_w tel que le développement donné par la suite (finie) $(p_i, \alpha_i, s_i)_{i \leq h}$ où $h \geq h_w$, c'est-à-dire $\sigma^h(p_h) \dots p_0 \alpha_0 s_0 \dots \sigma^h(s_h)$ a exactement pour suffixe $u\sigma^{u_0}(k_0) \dots \sigma^{u_j}(k_j)$, où j est supérieur à un certain j_w . On pourra supposer que ce chemin fini se termine au sommet 1 (quitte à allonger le chemin et à augmenter j). L'étude des points fixes de l'automorphisme extérieur nous assure qu'il n'y a pas de couple de mots bi-infinis ayant même passé et futurs différents sur $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S^n(\Omega_{\text{per}})$; la suite de préfixes-suffixes $(p_i, \alpha_i, s_i)_{i \leq h}[(\epsilon, 1, \epsilon)(1, d, \epsilon) \dots (1, 3, \epsilon)(1, 2, \epsilon)]^*$ correspond donc à un unique mot (par Γ^{-1}), et ce mot contient $u\sigma^{u_0}(k_0) \dots \sigma^{u_j}(k_j)\omega$, assurant que ce dernier est bien dans Ω_0^+ . \square*

Finalement, si $j \geq j_w$, $\sigma^{u_0}(k_0) \dots \sigma^{u_j}(k_j)\omega \in P_u$. On note alors $(w_n)_n$ la suite définie pour tout n par $w_n = \sigma^{u_0}(k_0) \dots \sigma^{u_{j+n}}(k_{j+n})$, pour n'importe quel $j \geq j_w$. $(w_n)_n$ converge vers w et pour tout n , $w_n\omega \in P_u$. On vérifiera facilement que la suite $(Q(w_n\omega))_n$ est alors une suite de Cauchy (F_d agit par isométries sur T et $w_{n-1}^{-1}w_n = \sigma^{u_{j+n}}(k_{j+n})$), et converge vers $Q(w)$ par 2.3.5 (page 48). Par isométrie, la suite des $f_Q(w_n\omega)$ converge vers $f_Q(w)$ dans L . Or, pour tout n , $f_Q(w_n\omega)$ est

un élément de $L(f_Q(u^{-1}\omega))$, qui est compact. On déduit finalement que $f_Q(w) \in L(f_Q(u^{-1}\omega))$.

La récurrence est donc complétée, et le résultat annoncé dans la proposition 6.2.53 est vérifié : si u^{-1} est un élément de $\delta(\Omega_d^+)$, alors $L(f_Q(u^{-1}\omega)) = f_Q(P_u)$.

Etude de la non-injectivité de f_Q

Note Ce paragraphe est quasiment identique à son homologue du premier exemple ; le corollaire 6.2.60 énonce le résultat dont nous avons besoin pour la suite.

Soit v un élément de Ω^+ et v^- un mot infini à gauche tel que $v^-v \in \Omega$. Si $v^-v \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_{per}$, l'automate des préfixes-suffixes donne les développements de certains suffixes de v^- ; on les notera $v_n = \sigma^{u_n}(1) \dots \sigma^{u_0}(1)$. Si $v^-v \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_{per}$ l'automate ne produira qu'une suite finie de préfixes dont le développement sera par exemple $\sigma^{u_k}(1) \dots \sigma^{u_0}(1)$; dans ce cas, il suffit de voir que si v^-v est un shifté de $\omega_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma^{dn}(i.1)$ (pour un certain i , $1 \leq i \leq d$), alors pour tout u_{k+1} tel que $u_{k+1} - u_k \geq 2$ et $u_{k+1} = (i-1)[d]$, $\sigma^{u_{k+1}}(1)\sigma^{u_k}(1) \dots \sigma^{u_0}(1)$ est un suffixe de v^- . On notera dans ce cas $v_n = \sigma^{u_n}(1) \dots \sigma^{u_0}(1)$ si $n \leq k$ et $v_n = \sigma^{u_n}(1)\sigma^{u_k}(1) \dots \sigma^{u_0}(1)$, où u_{k+1} est le plus petit indice tel que $u_{k+1} - u_k \geq 2$, $u_{k+1} = (i-1)[d]$, et $u_n = u_{k+1} + d(n - (k+1))$ sinon.

On pourra se reporter à la conséquence 6.2.55 pour vérifier que dans les deux cas, la suite $(L(f_Q(v_n^{-1}\omega)))_n$ est une suite de compacts emboîtés dont la suite des diamètres tend vers 0 (par la propriété 6.2.23 page 138). Puisque $f_Q(v)$ appartient à chaque élément de cette suite (par $L(f_Q(v_n^{-1}\omega)) = f_Q(P_{v_n})$), on en déduit

$$\{f_Q(v)\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} L(f_Q(v_n^{-1}\omega)).$$

On peut facilement déduire de cette définition que si u^-u et u^-v sont deux mots de Ω (avec u^- un mot infini à gauche et u, v deux mots de Ω^+), alors $f_Q(u) = f_Q(v)$. On va démontrer que la réciproque est également vraie.

Proposition 6.2.58 *Tout point de $f_Q(\Omega_0^+)$ a un unique antécédent dans Ω^+ par f_Q .*

Preuve On vérifie la propriété pour $f_Q(\omega)$ et on conclura grâce à l'équivariance. f_Q étant une bijection de Ω_0^+ dans $f_Q(\Omega_0^+)$, aucun mot de Ω_0^+ n'a pour image $f_Q(\omega)$ par f_Q . Soit v est un élément de $\Omega^+ \setminus \Omega_0^+$. Si v^-v est un mot de Ω , l'automate des préfixes-suffixes produit deux entiers u_0 et u_1 tels que $v \in P_{\sigma^{u_1}(1)\sigma^{u_0}(1)}$. $f_Q(v)$ est alors un élément de $f_Q(\sigma^{u_0}(1^{-1})\sigma^{u_1}(1^{-1})\omega)$. Une simple observation de la figure 6.21 (page 137) et la propriété 6.2.20 permettent d'obtenir l'équivalence :

$$f_Q(v) \in L(f_Q(u^{-1}\omega)) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}; u^{-1} = \sigma^k(1^{-1})$$

Finalement, $f_Q(v)$ est bien différent de $f_Q(\omega)$. \square

Proposition 6.2.59 *Si u et v sont deux points de Ω^+ tels que $f_Q(u) = f_Q(v)$, alors il existe un mot infini à gauche u^- tel que u^-u et u^-v sont deux points de Ω .*

Preuve Si $f_Q(u) = f_Q(v)$ est dans $f_Q(\Omega_0^+)$, alors $u = v$ d'après 6.2.58.

Si $f_Q(u) = f_Q(v)$ est dans $L \setminus f_Q(\Omega_0^+)$, alors u et v sont des éléments de $\Omega^+ \setminus \Omega_0^+$. On suppose l'existence de deux mots infinis à gauche u^- et v^- , tels que

- $u^-u \in \Omega$ et $v^-v \in \Omega$,
- $u^-v \notin \Omega$ et $v^-u \notin \Omega$.

L'automate des préfixes-suffixes produira u_s suffixe de u^- et v_s suffixe de v^- tels que

- u_s^{-1} et v_s^{-1} sont des éléments de $\delta(\Omega_d^+)$,

- u_s (resp. v_s) n'est pas un suffixe de v_s (resp. u_s),
- $u \in P_{u_s}$ et $v \in P_{v_s}$,
- $u \notin P_{v_s}$ et $v \notin P_{u_s}$.

On déduit de la conséquence 6.2.55 que si u_s et v_s ne sont pas suffixe l'un de l'autre, alors l'intersection de $L(f_Q(P_{u_s}))$ et $L(f_Q(P_{v_s}))$ est constitué d'au plus un point, et ce point est dans $f_Q(\Omega_0^+)$. Finalement, $d_L(f_Q(u), f_Q(v)) > 0$, une contradiction. \square

Corollaire 6.2.60 Si x est un point de $L(f_Q(u^{-1}\omega))$, alors pour tout v de Ω^+ tel que $f_Q(v) = x$, $v \in P_u$.

Preuve $L(f_Q(u^{-1}\omega)) = f_Q(P_u)$ d'après 6.2.53; il existe donc v de P_u tel que $f_Q(v) = x$. On déduit alors de 6.2.59 que les autres antécédents de x sont également dans P_u . \square

Remarque 6.2.61 On note μ l'unique mesure de probabilité du système dynamique (Ω^+, S) . Jusqu'à la fin de ce chapitre, toute partition de Ω^+ sera en fait une partition modulo un ensemble de mesure nulle pour μ .

L_n engendre une partition en cylindres de Ω^+

On dit qu'un point de L_n est un point de classe 2 si c'est l'image par ν_n (paragraphe 6.2.7 page 136) d'un point de branchement de classe 2 de L_n^s .

Définition 6.2.62 On appelle sous-arbre 2-simple de L_n , tout sous-arbre maximal (pour l'inclusion) dont l'intérieur ne contient aucun point de branchement de classe 2.

Soit e un sous-arbre 2-simple de L_n . Pour un certain $m \geq n$, e est un sous-arbre 2-simple de L_{m-1} et ne l'est plus dans L_m ; son intérieur contient exactement un sommet de BT_m . On sera alors dans la situation décrite dans la proposition 6.2.53. En supposant que le point de BT_m contenu dans l'intérieur de e est $f_Q(u^{-1}\omega)$ (u est alors un mot fini positif), on dira que e a **génééré** P_u .

On rappelle que si un mot fini $u \in \delta(\Omega_0^+)$ est tel que $f_Q(u\omega) \in BT_n$ et $f_Q(u\omega) \notin BT_{n-1}$, alors on dit que u est **apparu** à l'étape n . On pourra se reporter au paragraphe 6.2.8 (page 141) pour les notations.

Proposition 6.2.63 Si u^{-1} est un mot (de $\delta(\Omega_d^+)$) apparaissant à l'étape n , alors les d sous-arbres 2-simples adjacents à $f_Q(u^{-1}\omega)$ dans L_n , génèrent $P_{1u}, P_{2u}, \dots, P_{du}$ (pas forcément respectivement).

Preuve Si u^{-1} apparaît à l'étape n , alors les d sous-arbres 2-simples adjacents génèrent $P_{u_1}, P_{u_2}, \dots, P_{u_d}$, avec $u_k = \sigma^{n+k-1}(1)u$, $1 \leq k \leq d$ (6.2.34). On suppose que la dernière lettre de $\sigma^{n+k-1}(1)$ est z_k ; les z_k sont 2 à 2 distincts.

Si v est dans $P_{z_k u}$, alors il est dans P_u , et $f_Q(v)$ est dans $L(f_Q(u^{-1}\omega))$. De plus,

$$L(f_Q(u^{-1}\omega)) = \bigcup_{1 \leq k \leq d} L(f_Q(u_k^{-1}\omega)).$$

Si $f_Q(v)$ est dans $L(f_Q(u_j^{-1}\omega))$ pour un certain j , alors d'après la proposition 6.2.53 et le corollaire 6.2.60, tous les antécédents de $f_Q(v)$ sont des éléments de $P_{u_j} \cap P_{z_k u}$. Si $u_j \neq u_k$, alors $z_j \neq z_k$ et puisque ω est le seul mot infini à droite qui soit spécial à gauche, on en déduit que $P_{u_j} \cap P_{z_k u} = \{u^{-1}\omega\}$. Ainsi si v est un élément de $P_{z_k u} \setminus \{u^{-1}\omega\}$ alors c'est forcément un élément de P_{u_k} . Puisque $u^{-1}\omega \in P_{u_k}$, on en déduit que $P_{z_k u} \subset P_{u_k}$. L'autre inclusion est évidente puisque $z_k u$ est un suffixe de u_k , et on obtient $P_{z_k u} = P_{u_k}$. \square

Proposition 6.2.64 Si v^{-1} est le plus long mot de $\delta(\Omega_d^+)$ à apparaître à l'étape n , alors tout sous-arbre 2-simple de L_n génère P_u pour un certain u vérifiant $|u| = |v| + 1$.

Preuve Soit e un sous-arbre 2-simple de L_n . e est adjacent à un sommet $f_Q(w^{-1}\omega)$, et e génère $P_{zw} = P_{w_0}$ où $z \in \{1, \dots, d\}$ et $w_0 = \sigma^{m+k-1}(1)w$ avec m l'étape d'apparition de w^{-1} et $1 \leq k \leq d$. Si v^{-1} est le plus grand élément de $\delta(\Omega_d^+)$ qui apparaît à l'étape n , alors

$$|zw| \leq |v| + 1 \leq |\sigma^{m+k-1}(1)w|$$

(car w^{-1} est apparu au plus tard à l'étape n , et $w^{-1}\sigma^{m+k-1}(1^{-1})$ n'est pas encore apparu). Il existe donc un mot u de longueur de $|v| + 1$ tel que

- u est un suffixe de w_0 ,
- zw est un suffixe de u ,
- $P_{zw} = P_u$. \square

Proposition 6.2.65 Si v^{-1} est le plus long mot de $\delta(\Omega_d^+)$ à apparaître à l'étape n , alors pour tout mot u de $\mathcal{L}(\Omega)$ tel que $|u| = |v| + 1$, il existe un sous-arbre 2-simple de L_n qui génère P_u .

Preuve Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, L_n est une union de sous-arbres 2-simples. Si v^{-1} est le plus long mot de $\delta(\Omega_d^+)$ à apparaître à l'étape n et u est un mot de $\mathcal{L}(\Omega)$ tel que $|u| = |v| + 1$, alors il existe un mot w , $|w| = |v| + 1$, tel que P_w est généré par un sous-arbre 2-simple e de L_n et $f_Q(P_w) \cap f_Q(P_u)$ est constitué d'une infinité de points. On rappelle que si $w_1 \neq w_2$ et $|w_1| = |w_2|$, l'intersection $P_{w_1} \cap P_{w_2}$ comporte au plus 1 point (cela vient du fait que ω est le seul mot infini spécial à gauche); par 6.2.59, l'intersection $f_Q(P_{w_1}) \cap f_Q(P_{w_2})$ comporte au plus 1 point. On en conclut que $u = w$ et que e génère P_u . \square

Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$ on note \mathcal{P}_m la partition de Ω^+ constituée des ensembles P_u où u est un mot de $\mathcal{L}(\Omega)$ de longueur m .

Théorème 6.2.66 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier m tel que

- pour tout $P_v \in \mathcal{P}_m$, il existe un unique sous-arbre 2-simple qui génère P_v ,
- réciproquement, pour tout sous-arbre 2-simple e de L_n , il existe un unique élément P_v de \mathcal{P}_m généré par e ,
- $m - 1$ est la longueur du plus long mot de $\delta(\Omega_d^+)$ à apparaître à l'étape n .

On dit que L_n a **engendré** la partition \mathcal{P}_m .

Des illustrations de ce résultat (dans le cas $d = 3$) sont données figures 6.23 (page 160) et 6.26 (page 161).

Propriétés des partitions engendrées

Ce paragraphe étudie les partitions de Ω^+ qui peuvent être engendrées par les arbres L_n . On note μ l'unique mesure de probabilité sur Ω^+ invariante par shift. μ est définie sur tout cylindre par $\mu(C_u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \#\{0 \leq k < n; \omega_k \dots \omega_{k+|u|-1} = u\}$ où $\#$ désigne le cardinal; pour tout $u \in \mathcal{L}(\Omega)$, $\mu(C_u) > 0$. Si P_u et P_v sont les éléments d'une partition \mathcal{P}_n quelconque, on dit que $P_u \sim P_v$ si et seulement si $\mu(P_u) = \mu(P_v)$. On s'intéresse au cardinal de l'ensemble \mathcal{P}_n / \sim .

On a vu au paragraphe précédent l'importance des ensembles P_u . μ étant invariante par le shift, l'égalité $\mu(P_u) = \mu(C_u)$ est vérifiée pour tout $u \in \mathcal{L}(\Omega)$. On travaillera sur les ensembles C_u dans la suite de ce paragraphe.

On rappelle que les préfixes de ω sont les seuls mots spéciaux à gauche, et que les suffixes de $\bar{\omega}$, sont les seuls mots spéciaux à droite.

λ est la valeur propre dominante de la matrice d'incidence de σ . La mesure définie est telle que pour tout u dans le langage, $\mu(\sigma(C_u)) = \lambda^{-1}\mu(C_u)$. Le lemme suivant permettra d'utiliser cette propriété par la suite.

Lemme 6.2.67 *Si u est un mot de $\mathfrak{L}(\Omega)$ dont la dernière lettre est différente de d , alors $\sigma(C_u) = C_{\sigma(u)}$.*

Preuve *L'inclusion $\sigma(C_u) \subset C_{\sigma(u)}$ est évidente. Soit $v \in C_{\sigma(u)}$, $v = \sigma(u)w$, et puisque d n'est pas la dernière lettre de u , alors 1 n'est pas la dernière lettre de $\sigma(u)$ et w commence par 1 . Or, tout mot (infini) commençant par 1 a un antécédent par σ dans Ω^+ , c'est-à-dire qu'il existe $w_0 \in \Omega^+$ tel que $\sigma(w_0) = w$. Une manière simple de s'en assurer est d'écrire le développement en préfixes-suffixes d'un mot $w^- \cdot \alpha w \in \Omega$. Dans ce cas, $v = \sigma(uw_0)$, assurant que v est dans $\sigma(C_u)$. \square*

λ vérifie $\lambda^d = \sum_{0 \leq k \leq d-1} \lambda^k$ et on en déduit que l'égalité

$$1 = \sum_{0 \leq k \leq d-1} \lambda^{k-d}$$

est vérifiée.

Proposition 6.2.68 *Soit u un préfixe de ω (possiblement ϵ) et $\mu(C_u) = x$. Alors $\mu(C_{1u}), \mu(C_{2u}), \dots, \mu(C_{du})$ prennent les valeurs (pas forcément respectives) $\lambda^{k-d}x$, $0 \leq k \leq d-1$.*

Preuve *Si u est un préfixe de ω , alors u est préfixe de $\sigma(u)$. On pourra supposer u spécial à droite, en remarquant que si ce n'est pas le cas, il existe un mot u_0 spécial à droite (dont u est préfixe) tel que $C_u = C_{u_0}$.*

Il n'existe qu'une seule lettre l_0 de $\{1, \dots, d\}$ pour laquelle $\sigma(l_0)u$ est encore spécial à droite ; si l est un élément de $\{1, \dots, d\}$ et $l \neq l_0$, $\sigma(l)u$ n'est pas spécial à droite. Le développement des préfixes de ω spéciaux à droite nous permet de dire qu'il n'existe aucun préfixe v de $\sigma(u)$ tel que u est préfixe de v , $|u| < |v| < |\sigma(u)|$ et v est spécial à droite. On en conclut que $C_{\sigma(l)\sigma(u)} = C_{\sigma(l)u}$. u étant spécial à droite, sa dernière lettre est 1 , et par 6.2.67, $\sigma(C_{lu}) = C_{\sigma(l)\sigma(u)}$, ce qui donne $\sigma(C_{lu}) = C_{\sigma(l)u}$. On rappelle que tout mot de longueur 1 différent de 1 est non spécial à gauche. On a ainsi, pour tout $l \neq l_0$:

$$\begin{aligned} \mu(C_{lu}) &= \lambda \mu(C_{(l+1)u}) & \text{si } l \neq d, \\ \mu(C_{lu}) &= \lambda \mu(C_{1u}) & \text{si } l = d. \end{aligned}$$

On note $y = \mu(C_{(l_0+1)u})$ si $l_0 \neq d$ et $y = \mu(C_{1u})$ si $l_0 = d$; on a alors $\sum_{0 \leq k \leq d-1} \lambda^{-k}y = x$, ce qui donne $y = \lambda^{-1}x$. \square

On va pouvoir préciser le cardinal des ensembles \mathcal{P}_n / \sim après un dernier lemme. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $E_n = \{\mu(C_u) ; u \in \mathfrak{L}(\Omega), |u| = n\}$.

Lemme 6.2.69 *Si u est un préfixe du point fixe ω , alors $\mu(C_u)$ est un élément maximal de $E_{|u|}$. De plus, u est spécial à droite si et seulement si pour tout $v \in \mathfrak{L}(\Omega)$ tel que $|v| = |u|$, $v \neq u$, on a $\mu(C_u) > \mu(C_v)$.*

Preuve *Soit $v \in \mathfrak{L}(\Omega)$ un mot de longueur $|u|$. Si v n'est pas un préfixe du point fixe, alors il existe un préfixe w du point fixe, tel que $|w| > |u|$, v est un suffixe (propre) de w et $\mu(C_w) = \mu(C_v)$; en effet si v n'est pas spécial à gauche $\alpha v \in \mathfrak{L}(\Omega)$ ($\alpha \in \{1, \dots, d\}$), alors $\mu(C_{\alpha v}) = \mu(C_v)$. Or, puisque u est un préfixe de w , alors $C_u \supset C_w$ et $\mu(C_u) \geq \mu(C_w) = \mu(C_v)$.*

v est toujours un mot de longueur $|u|$, u est préfixe de ω et w est un préfixe de ω tel que v est un suffixe propre de w et $\mu(C_w) = \mu(C_v)$. On note $w = uw_0$; si u est spécial à droite, alors il existe w_1 tel que $|w_1| = |w_0|$, $w_1 \neq w_0$ et uw_1 est dans le langage. Dans ce cas, $C_u \supset C_{uw_0} \cup C_{uw_1}$ et $\mu(C_u) > \mu(C_w) = \mu(C_v)$ (car C_{uw_0} et C_{uw_1} sont de mesures strictement positives).

Si pour tout v tel que $|v| = |u|$, $v \neq u$, on a $\mu(C_u) > \mu(C_v)$, on note α une lettre de $\{1, \dots, d\}$ telle que $u\alpha$ est dans le langage. Si v est le suffixe de $u\alpha$ de longueur $|u|$, alors v n'est pas spécial à gauche et $\mu(C_v) = \mu(C_{u\alpha})$. On a alors $\mu(C_u) > \mu(C_{u\alpha})$, ce qui implique que u est spécial à droite. \square

Proposition 6.2.70 Soit u un préfixe du point fixe ω .

- $E_1 = \bigcup_{0 \leq k \leq d-1} \{\lambda^{-(1+k)}\}$,
- $\forall n \geq 2$,
 - si le préfixe u_{n-1} de ω de longueur $n-1$ est spécial à droite, alors il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $E_n = \bigcup_{0 \leq k \leq d-1} \{\lambda^{-(j+k)}\}$,
 - sinon, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $E_n = \bigcup_{0 \leq k \leq d} \{\lambda^{-(j+k)}\}$.

Preuve Dans cette preuve, on désignera par u_n le préfixe de ω de longueur n .

Par récurrence. On obtient directement de 6.2.68 que $E_1 = \bigcup_{0 \leq k \leq d-1} \{\lambda^{-(1+k)}\}$. 1 est le seul mot de E_1 spécial à gauche, $\mu(C_1) = \lambda^{-1}$ d'après 6.2.69, et on obtient par 6.2.68 que les $\mu(C_{h1})$, $1 \leq h \leq d$ prennent les valeurs $\lambda^{-1-(1+k)}$, $0 \leq k \leq d-1$. Si $l \neq 1$, l n'est pas spécial à gauche et $\mu(C_{1l}) = \mu(C_l)$. On en déduit que $E_2 = \bigcup_{0 \leq k \leq d-1} \{\lambda^{-(2+k)}\}$. On suppose que les propriétés annoncées sont vraies à tous les rangs $\leq n$.

Si u_n et u_{n-1} sont spéciaux à droite, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $E_n = \bigcup_{0 \leq k \leq d-1} \{\lambda^{-(j+k)}\}$ par hypothèse de récurrence, et par 6.2.69, C_{u_n} est le seul cylindre de mesure λ^{-j} . On peut déduire de la proposition 6.2.68 que $E_{n+1} = \bigcup_{1 \leq k \leq d} \{\lambda^{-(j+k)}\}$.

Si u_n est spécial à droite, et u_{n-1} ne l'est pas, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $E_n = \bigcup_{0 \leq k \leq d} \{\lambda^{-(j+k)}\}$ et C_{u_n} est le seul cylindre de mesure λ^{-j} . On en déduit que $E_{n+1} = \bigcup_{1 \leq k \leq d} \{\lambda^{-(j+k)}\}$.

Si u_n n'est pas spécial à droite, et u_{n-1} est spécial à droite, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $E_n = \bigcup_{0 \leq k \leq d-1} \{\lambda^{-(j+k)}\}$ et C_{u_n} n'est pas le seul cylindre de mesure λ^{-j} ; $E_{n+1} = \bigcup_{0 \leq k \leq d} \{\lambda^{-(j+k)}\}$.

Si u_n et u_{n-1} ne sont spéciaux à droite ni l'un ni l'autre, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $E_n = \bigcup_{0 \leq k \leq d} \{\lambda^{-(j+k)}\}$ et C_{u_n} n'est pas le seul cylindre de mesure λ^{-j} . On a alors $E_{n+1} = E_n$.

Les propriétés passent donc aux successeurs. \square

On peut finalement conclure que $\#(\mathcal{P}_0/\sim) = d$, $\#(\mathcal{P}_n/\sim) = d$ si le préfixe de ω de longueur $n-1$ est spécial à droite, et $\#(\mathcal{P}_n/\sim) = d+1$ sinon. Ce résultat est à rapprocher du théorème 6.2.66 et de la propriété 6.2.37.

Théorème 6.2.71 L_0 engendre \mathcal{P}_1 . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'arbre L_n engendre une partition de Ω^+ en \mathcal{P}_m avec $\#(\mathcal{P}_m/\sim) = d$. Toute partition \mathcal{P}_m telle que $\#(\mathcal{P}_m/\sim) = d$ est engendrée par un arbre L_n .

6.2.12 D'autres décompositions de L_n

Autour des mots de $\delta(\Omega_{g,1}^+)$

Si u est un mot de $\mathcal{L}(\Omega)$, on rappelle que C_u est l'ensemble des mots de Ω^+ dont u est préfixe. On dit qu'un point de L_n est un point de classe 1 si c'est l'image par ν_n (paragraphe 6.2.7 page 136) d'un point de branchement de classe 1 de L_n^s .

Définition 6.2.72 On appelle sous-arbre 1-simple de L_n , tout sous-arbre maximal (pour l'inclusion) dont l'intérieur ne contient aucun point de branchement de classe 1.

On va obtenir une partition de Ω^+ en cylindre grâce aux arbres 1-simples de L_n .

L'ensemble $f_Q(C_u)$ peut être obtenu par translation (de vecteur u) de l'ensemble $f_Q(P_u)$. On a montré précédemment que $f_Q(P_u)$ est connexe, et il en est donc de même pour $f_Q(C_u)$.

Propriétés 6.2.73

- (1) Pour tout $1 \leq i \leq d$, $f_Q(\omega_{1,2}^+) = f_Q(\omega_{i,2}^+)$ (où $\omega_{i,2}^+$ est la projection de $\omega_{i,2}$ sur Ω^+).
- (2) Pour tout $u \in \mathfrak{L}(\Omega)$ spécial à droite, si $1 \leq k < h \leq d$, alors $f_Q(C_{uk}) \cap f_Q(C_{uh}) = \{f_Q(u\omega_{1,2}^+)\}$.
- (3) Tout point de branchement $x = f_Q(u\omega_{1,2}^+)$ de classe 1 partage L en d composantes connexes et chacune d'elle contient $f_Q(C_{uk})$ pour un certain $1 \leq k \leq d$.

Soit e un sous-arbre 1-simple de L_n . e est l'enveloppe convexe d'un ensemble E_t constitué de points terminaux et de points de branchement de classe 1 (par maximalité). On notera $Cv(E_t)$ l'enveloppe convexe de E_t dans L . Si C est un sous-ensemble de Ω^+ tel que $f_Q(C) = Cv(E_t)$, alors on dira que e a généré C .

Proposition 6.2.74 On note $l_n\rho$ le mot de $\delta(\Omega_{g,1}^+)$ le plus long apparaissant à l'étape n . Tout sous-arbre 1-simple génère C_u , avec $|u| = |l_n| + 1$.

Preuve La proposition est vérifiée à l'étape 0 en considérant que ρ est le seul mot de $\delta(\Omega_{g,1}^+)$ apparu à l'étape 0. On suppose la proposition vraie aux étapes $\leq n-1$. Soit e un sous-arbre 1-simple de L_{n-1} ; e génère C_v avec $|v| = |l_{n-1}| + 1$.

Si e est encore 1-simple dans L_n , il faut montrer que $C_v = C_u$ où $|u| = |l_n| + 1$ et v est préfixe de u . Cela revient à montrer qu'il n'y a pas de préfixe propre de u de longueur $\geq |v|$ qui soit spécial à droite. On suppose qu'il existe et on l'appelle w . Puisqu'il est spécial à droite, $w\rho$ est un mot de $\delta(\Omega_{g,1}^+)$ et puisque v est un préfixe propre de u de longueur $\geq |v|$, il est de longueur $> l_{n-1}$ et $\leq l_n$. On en déduit qu'il est apparu à l'étape n . Puisque v est un préfixe de w , alors $f_Q(w\omega_{1,2}^+)$ est dans l'intérieur de e (puisque $w\rho$ est apparu à l'étape n) et e n'est pas 1-simple dans L_n .

Si e n'est plus 1-simple dans L_n , on note $w\rho$ le nouveau mot (on pourra vérifier qu'il est effectivement unique) de $\delta(\Omega_{g,1}^+)$ apparu. D'après 6.2.73 (3), $f_Q(w\omega_{1,2}^+)$ partage e en d composantes connexes; ces composantes génèrent $C_{v_1}, C_{v_2}, \dots, C_{v_d}$. Soit $1 \leq \alpha \leq d$; on doit montrer que $C_{v_\alpha} = C_{u_\alpha}$ avec $|u_\alpha| = |l_n| + 1$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de préfixe propre spécial à droite de u_α dont v_α soit préfixe. Si w' en est un, $w'\rho$ est apparu à l'étape n , et $f_Q(w'\omega_{1,2}^+)$ est un autre point de branchement de classe 1 de l'intérieur de e dans L_n , ce qui est impossible. \square

Proposition 6.2.75 Si $v\rho$ est le plus long mot de $\delta(\Omega_{g,1}^+)$ à apparaître à l'étape n , alors pour tout mot u de $\mathfrak{L}(\Omega)$ tel que $|u| = |v| + 1$, il existe un sous-arbre 1-simple de L_n qui génère C_u .

Preuve Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, L_n est une union de sous-arbres 1-simples. Si $v\rho$ est le plus long mot de $\delta(\Omega_{g,1}^+)$ à apparaître à l'étape n et u est un mot de $\mathfrak{L}(\Omega)$ tel que $|u| = |v| + 1$, alors il existe un mot w , $|w| = |v| + 1$, tel que C_w est généré par un sous-arbre 1-simple e de L_n et $f_Q(C_w) \cap f_Q(C_u)$ est constitué d'une infinité de points. Par la proposition 6.2.59 et l'étude des points fixes de l'automorphisme extérieur, si $w_1 \neq w_2$ et $|w_1| = |w_2|$, alors l'intersection $f_Q(C_{w_1}) \cap f_Q(C_{w_2})$ comporte au plus 1 point. On en conclut que $u = w$ et que e génère C_u . \square

Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$ on note \mathcal{C}_m la partition de Ω^+ constituée des ensembles C_u où u est un mot de $\mathfrak{L}(\Omega)$ de longueur m .

Théorème 6.2.76 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier m tel que

- pour tout $C_v \in \mathcal{C}_m$, il existe un unique sous-arbre 1-simple qui génère C_v ,
- réciproquement, pour tout sous-arbre 1-simple e de L_n , il existe un unique élément C_v de \mathcal{C}_m généré par e ,
- si $w\rho$ est le plus long mot de $\delta(\Omega_{g,1}^+)$ à apparaître à l'étape n , alors $m - 1 = |w|$.

On dit que L_n a **engendré** la partition \mathcal{C}_m .

Des illustrations de ce résultat (dans le cas $d = 3$) sont données figures 6.24 (page 160) et 6.27 (page 162).

La décomposition en arc simple

Définition 6.2.77 On appelle *arc simple* de L_n , tout sous-arbre maximal (pour l'inclusion) dont l'intérieur ne contient aucun point de BT_n .

Propriété 6.2.78 Pour tout arc simple e_0 de L_n , il existe un unique sous-arbre 1-simple e_1 de L_n et un unique arbre 2-simple e_2 de L_n tels que $e_0 \subset e_1$ et $e_0 \subset e_2$. On a alors $e_0 = e_1 \cap e_2$.

On note $l_n^{(1)}\rho$ le plus grand élément de $\delta(\Omega_{g,1}^+)$ de l'étape n et $l_n^{(2)}$ le plus grand élément de $\delta(\Omega_d^+)$ de l'étape n .

Théorème 6.2.79 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un couple m_1, m_2 d'entiers tels que

- pour tout couple (P_u, C_v) de $\mathcal{P}_{m_2} \times \mathcal{C}_{m_1}$, si $P_u \cap C_v \neq \emptyset$, alors il existe un unique arc simple qui génère $P_u \cap C_v$,
- réciproquement, pour tout arc simple e de L_n , il existe un unique couple (P_u, C_v) de $\mathcal{P}_{m_2} \times \mathcal{C}_{m_1}$ tel que $P_u \cap C_v$ est généré par e ,
- $m_1 - 1 = |l_n^{(1)}|$,
- $m_2 - 1 = |l_n^{(2)}|$.

Des illustrations de ce résultat (dans le cas $d = 3$) sont données figures 6.25 (page 160) et 6.28 (page 162).

On termine avec une propriété mystérieuse de cette décomposition en arc simple.

Proposition 6.2.80 Si m_1 et m_2 sont définis comme dans le théorème précédent, alors le couple (m_1, m_2) vérifie

$$\#(\mathcal{P}_{m_1+m_2} / \sim) = d.$$

Preuve On note $l_n^{(2)}$ le mot le plus long de $\delta(\Omega_d^+)$ à apparaître à l'étape n et $l_n^{(1)}\rho$ le mot le plus long de $\delta(\Omega_{g,1}^+)$ à apparaître à l'étape n . Il suffit en fait de montrer (d'après 6.2.71) que $|l_n^{(2)}| + |l_n^{(1)}| + 1 = |l_{n+1}^{(2)}|$. On se reporte aux propositions 6.2.35 (page 142) et 6.2.39 (page 143).

Dans le cas $n \geq d$, $l_n^{(2)} = 1^{-1}\sigma(1^{-1}) \dots \sigma^{n-1}(1^{-1})$ et $|l_n^{(1)}| + 1 = |l_{n-d}^{(2)}\sigma^{n-1}(1) \dots \sigma(1)1|$ après réduction. On obtient $|l_n^{(2)}| + |l_n^{(1)}| + 1 = 2 \times |l_n^{(2)}| - |l_{n-d}^{(2)}|$ et $|l_{n+1}^{(2)}| = |l_n^{(2)}| + |\sigma^n(1)|$ et on conclut grâce à la formule $\sigma^d(1) = \sigma^{d-1}(1) \dots \sigma(1)1$.

Dans le cas $n < d$, $|l_n^{(1)}| = |\sigma^{n-1}(1) \dots \sigma(1)1|$ et $|l_n^{(2)}| + |l_n^{(1)}| + 1 = 2 \times |l_n^{(2)}| + 1$. On conclut en remarquant que $\sigma^n(1) = \sigma^{n-1}(1) \dots \sigma(1)1(n+1)$. \square

6.2.13 Cœur et fractal de Rauzy

Pour $d = 3$, la substitution est de type Pisot, et puisque pour toute lettre i , $\sigma(i)$ a pour première lettre 1, on en déduit que la condition de forte coïncidence est vérifiée : pour tout $i, j \in A$, il existe k, n tels que la k -ième lettre de $\sigma^n(i)$ et la k -ième lettre de $\sigma^n(j)$ sont égales et les abélianisés des préfixes de longueur $k - 1$ de $\sigma^n(i)$ et $\sigma^n(j)$ sont égaux. D'après [6] et [23]

(chapitre 3), cela est suffisant pour définir un fractal de Rauzy et un échange de morceaux (à mesure de Lebesgue nulle près).

On note π l'application qui à tout mot de Ω^+ associe la projection de son abélianisé dans le plan contractant, parallèlement à la direction dilatante. Pour tout point x de L , l'ensemble $\pi(f_Q^{-1}(\{x\}))$ est réduit à un point. On peut donc définir, pour tout élément w de Ω^+ , l'application

$$\spadesuit : L \rightarrow R \\ f_Q(w) \mapsto \pi(w),$$

où R est le fractal de Rauzy.

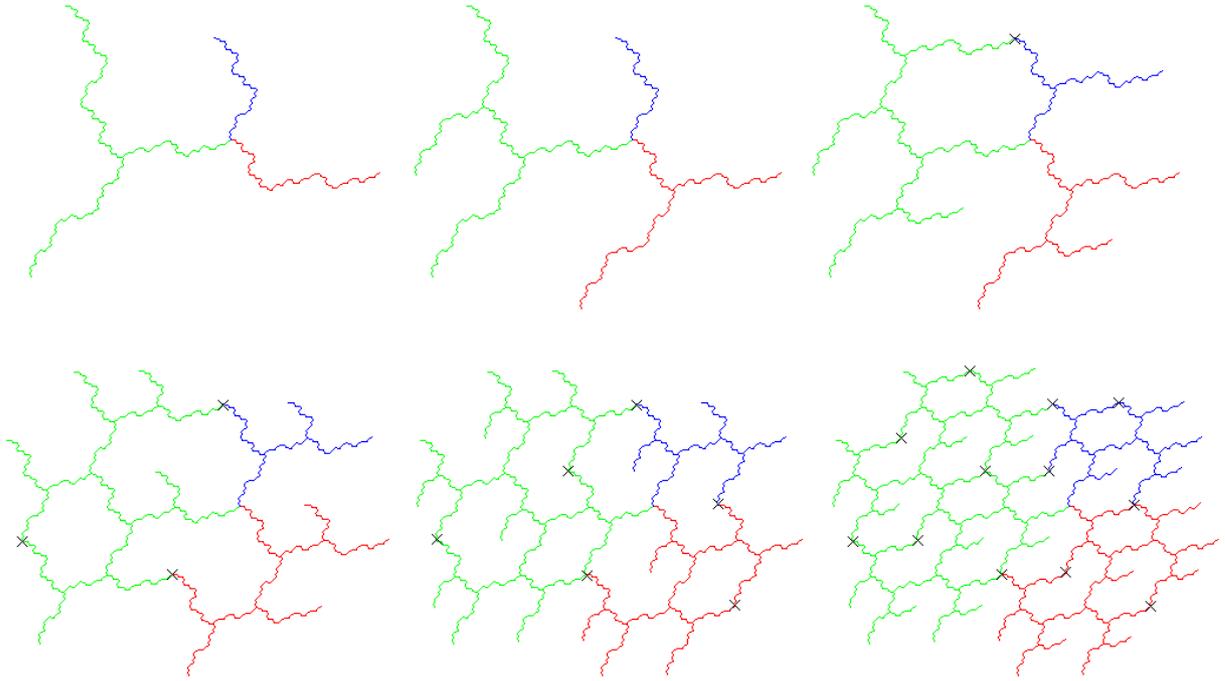


FIG. 6.22: Représentations de $\spadesuit(L_0)$, $\spadesuit(L_1)$, $\spadesuit(L_2)$, $\spadesuit(L_3)$, $\spadesuit(L_4)$ et $\spadesuit(L_5)$.

Remarque 6.2.81 *Les croix noires (présentes sur $\spadesuit(L_2)$, $\spadesuit(L_3)$, $\spadesuit(L_4)$ et $\spadesuit(L_5)$) indiquent les points x de R tels que le cardinal de l'ensemble $f_Q(\pi^{-1}(\{x\}))$ est strictement > 1 . Ces situations sont des défauts de la représentation planaire ; en effet, certains couples de points de Ω^+ dont les images par f_Q sont distinctes ont même abélianisé, et ont donc même image par π .*

La figure 6.23 (resp. 6.24, 6.25) illustre le théorème 6.2.66 (page 154) (resp. 6.2.76 (page 157), 6.2.79 (page 158)) ;

- sur la figure 6.23, les sous-arbres 2-simples (vert, rouge et bleu) de L_0 ont engendrés respectivement P_a , P_b , et P_c ,
- sur la figure 6.24, les sous-arbres 1-simples (vert, rouge et bleu) de L_0 ont engendrés respectivement C_a , C_b , et C_c ,
- sur la figure 6.25, les arcs simples (jaune, vert, bleu, rouge, cyan) de L_0 ont engendrés respectivement $P_a \cap C_a$, $P_a \cap C_b$, $P_a \cap C_c$, $P_b \cap C_a$, et $P_c \cap C_a$.

On illustre maintenant les mêmes théorèmes en se basant sur L_3 . Sur la figure 6.26, on représente le fractal de Rauzy en attribuant une même couleur à $\pi(P_u)$ et $\pi(P_v)$ (où P_u et P_v sont dans \mathcal{P}_8) si $\mu(P_u) = \mu(P_v)$; $\pi(P_u)$ et $\pi(P_v)$ sont égaux à translation près. On note que tout sous-arbre (maximal pour l'inclusion) entièrement contenu dans $\pi(P_u)$ pour un certain u est

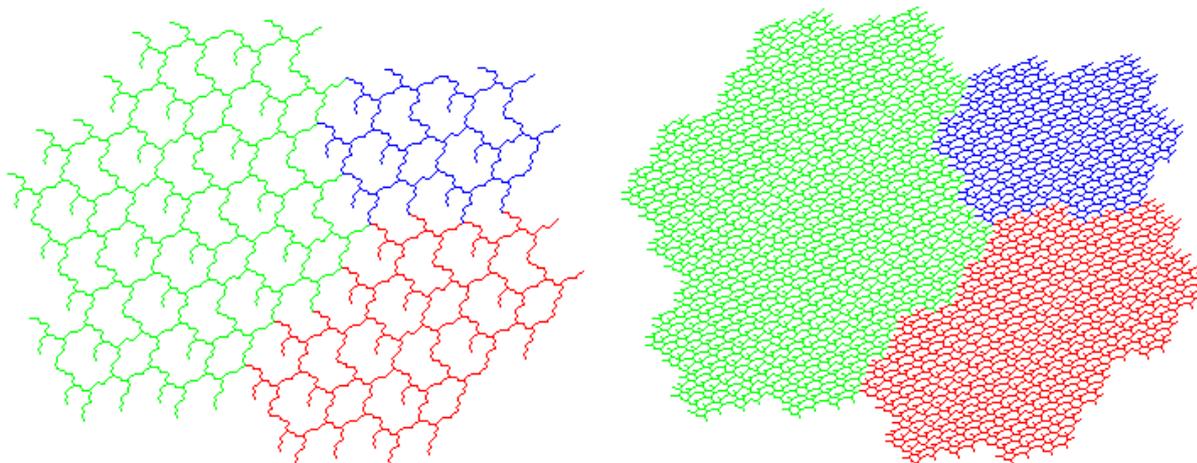


FIG. 6.23: Représentation de $\spadesuit(L_7)$ et $\spadesuit(L_{12})$.

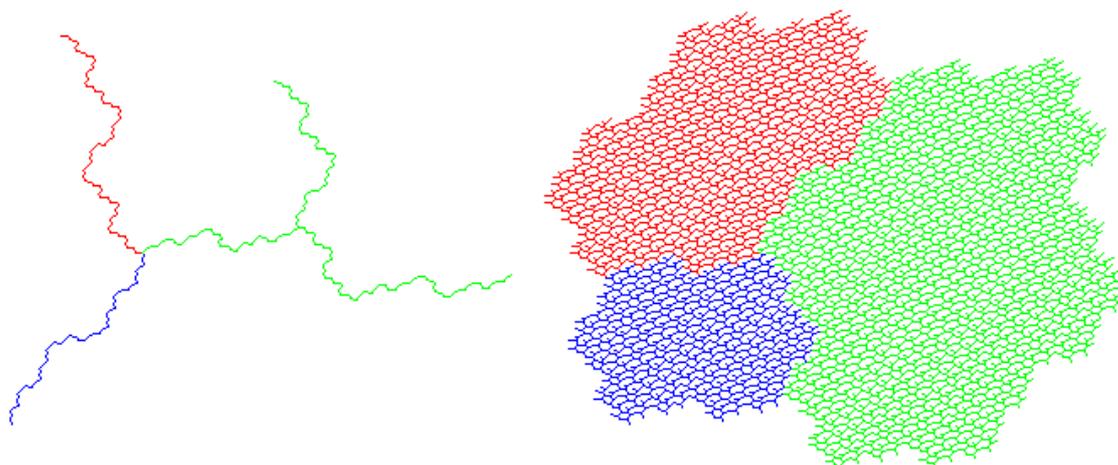


FIG. 6.24: Représentation de $\spadesuit(L_0)$ et $\spadesuit(L_{12})$.

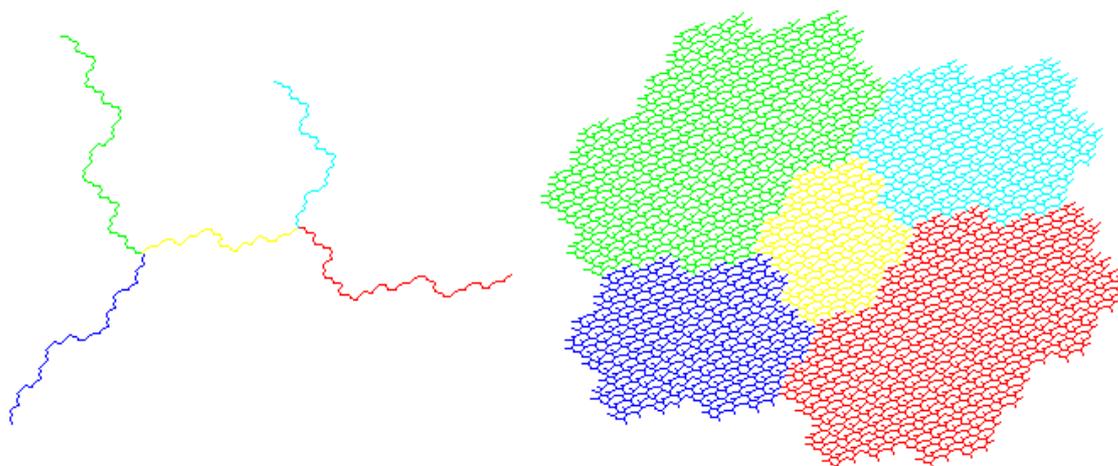


FIG. 6.25: Représentation de $\spadesuit(L_0)$ et $\spadesuit(L_{12})$.

l'image par \spadesuit d'un sous-arbre 2-simple de L_3 . Sur la figure 6.27, on attribue une même couleur à $\pi(C_u)$ et $\pi(C_v)$ (où C_u et C_v sont dans \mathcal{C}_7) si $\mu(C_u) = \mu(C_v)$; $\pi(C_u)$ et $\pi(C_v)$ sont égaux à translation près. On note que tout sous-arbre (maximal pour l'inclusion) entièrement contenu dans $\pi(C_u)$ pour un certain u est l'image par \spadesuit d'un sous-arbre 1-simple de L_3 . L'intersection est représentée sur la figure 6.28. L'image par \spadesuit de L_3 est représenté sur les trois figures.

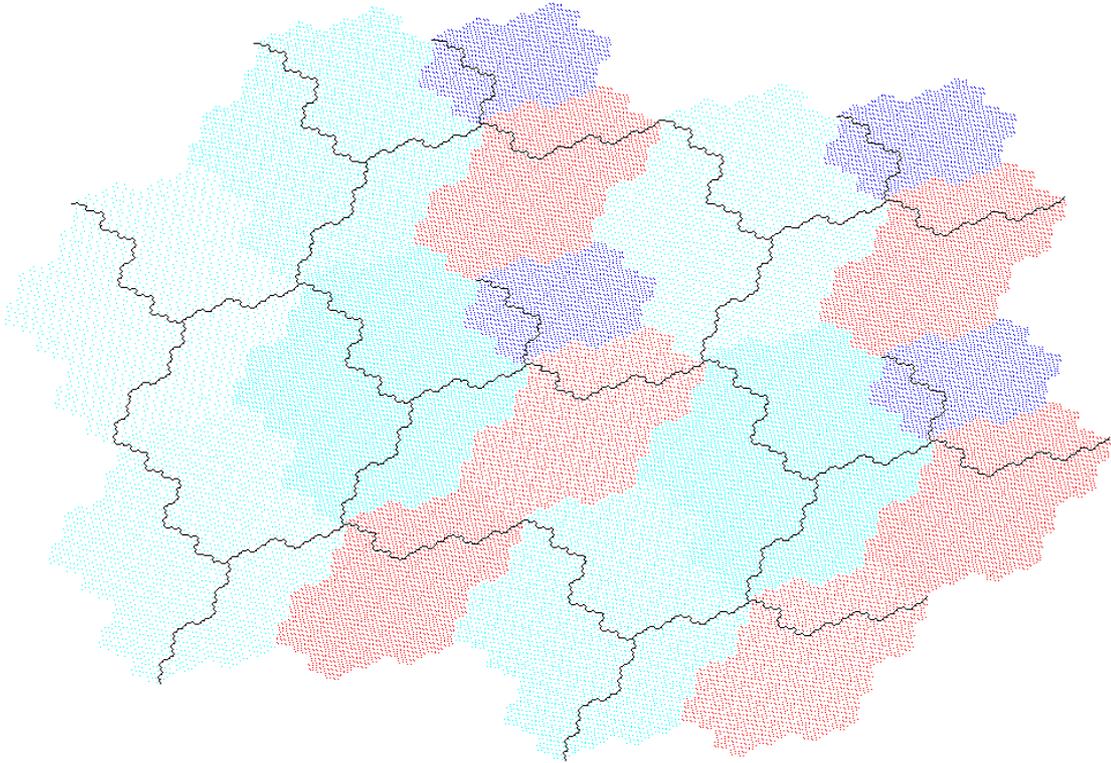


FIG. 6.26: Représentation de R (selon \mathcal{P}_8) et $\spadesuit(L_3)$.

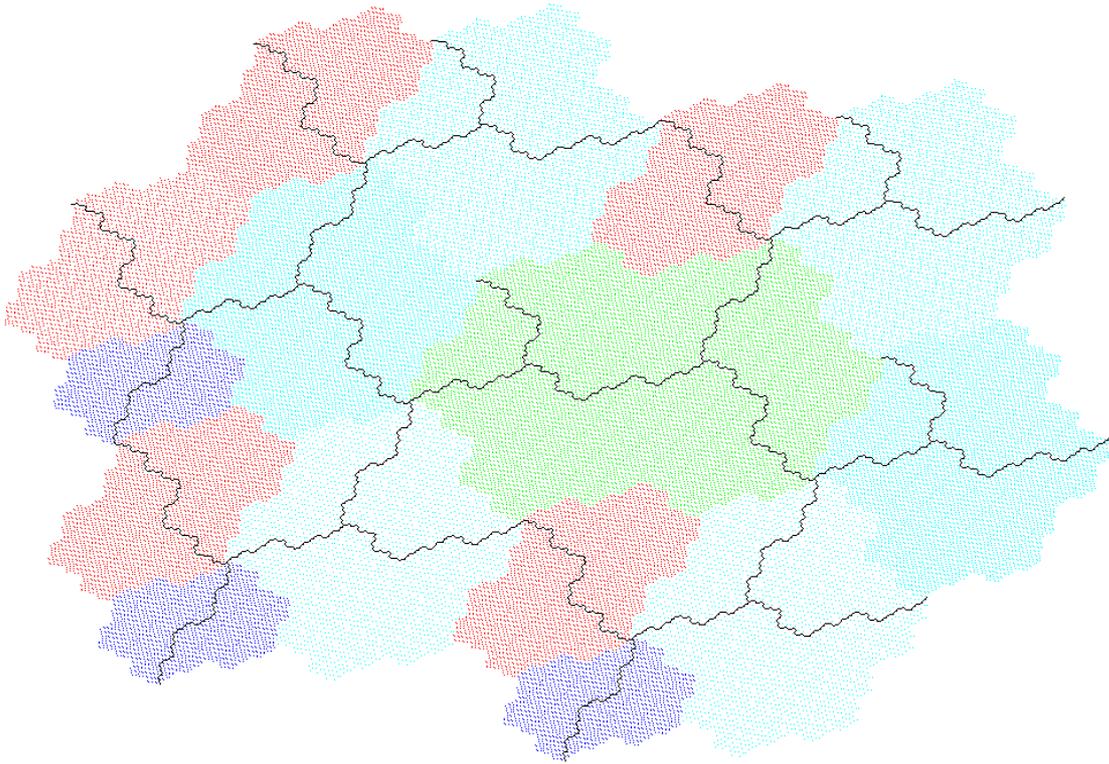


FIG. 6.27: Représentation de R (selon \mathcal{C}_7) et $\spadesuit(L_3)$.

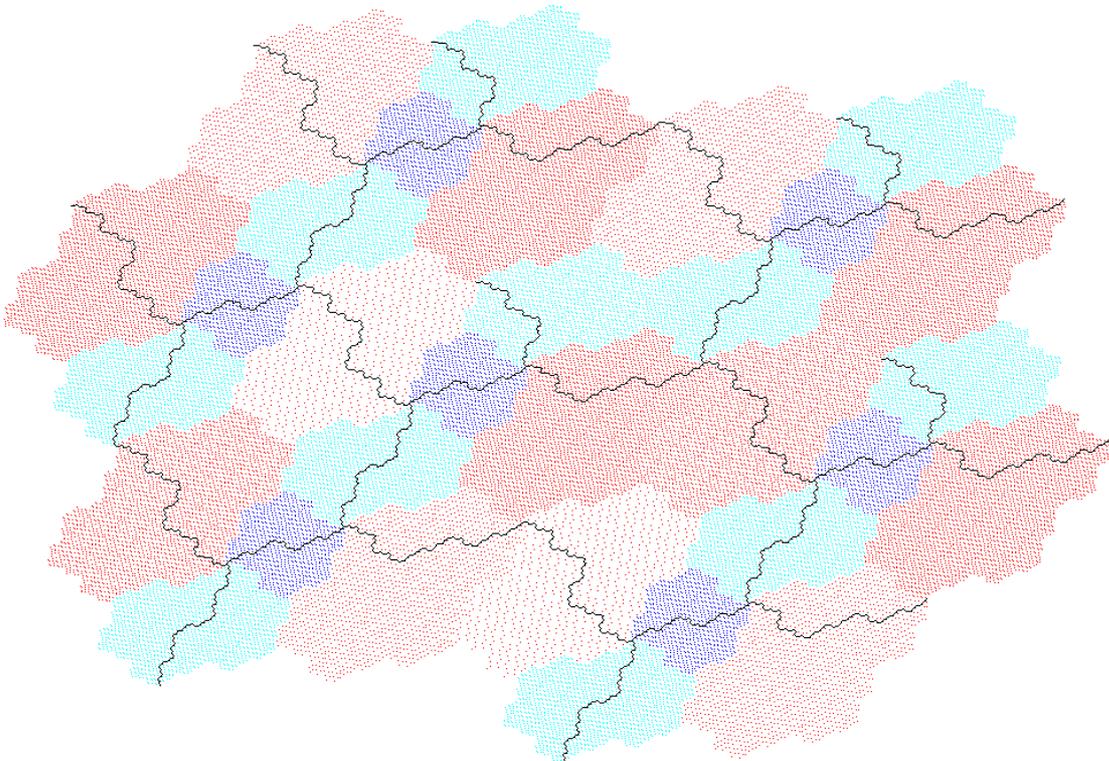


FIG. 6.28: Représentation de R (selon $\mathcal{P}_8 \cap \mathcal{C}_7$) et $\spadesuit(L_3)$.

6.3 Vers des cas plus généraux

Une substitution primitive inversible σ sur un alphabet A engendre un système dynamique (Ω^+, S) où Ω^+ peut être vu comme une partie de $F(A)$. On peut construire un arbre invariant T associé à σ^{-1} et, si l'action de $F(A)$ sur T est à orbites denses, l'application $Q : \partial F(A) \rightarrow \overline{T} \cup \partial T$ équivariante surjective associée. L'objectif est de savoir dans quels cas l'ensemble $Q(\Omega^+)$ peut être atteint par une substitution d'arbre. Pour avoir une idée de la réponse, il faut comprendre pourquoi les deux exemples proposés précédemment ont eu de bons résultats.

On donne ici quelques facteurs susceptibles d'affecter la construction d'une substitution d'arbre qui décrit $Q(\Omega^+)$. Φ_1 est la classe extérieure associée à σ^{-1} .

Les points fixes de σ

Essentiellement, les images par Q des points fixes de l'automorphisme extérieur représenté par σ donnent les emplacements des points communs aux domaines qui constituent l'échange de domaines. Si la borne des points fixes n'est pas atteinte par σ , un argument géométrique montrera que $Q(\Omega^+)$ ne peut pas être connexe ; c'est un ensemble de Cantor. Compte tenu du caractère auto-similaire de $Q(\Omega^+)$, il est tout à fait envisageable que l'on puisse adapter les définitions des substitutions d'arbre afin d'obtenir $Q(\Omega^+)$; on parlera alors de substitutions sur des graphes sans cycles, et pas forcément connexes.

Φ_1 n'est pas forcément iwip

Si Φ_1 n'est pas iwip, on ne pourra pas trouver de représentation train-track. En fait, la construction d'arbre invariant d'un automorphisme peut se faire sans représentation train-track. L'article [10] introduit les représentants train-track partiels (qui sont proches des train-track relatifs définis dans [4]), et énonce la proposition suivante.

Proposition 6.3.1 *Etant donné un automorphisme extérieur Φ , il existe un représentant train-track partiel qui induit Φ .*

On pourra donc construire un arbre invariant à partir de n'importe quel automorphisme.

Φ_1 peut admettre une représentation train-track sur un graphe différent de la rose

Le second exemple donne une très bonne illustration de ce qu'il y a faire dans ce cas ; on note cependant que la représentation train-track est sans chemin de Nielsen.

La représentation train-track de Φ_1 peut avoir des chemins de Nielsen.

Il y a deux types de chemins de Nielsen ; on peut se débarrasser de certains d'entre eux grâce à un algorithme du même type que celui proposé par [4] dans le cadre de la recherche de train-track. La substitution suivante illustre le phénomène.

Soit σ la substitution primitive inversible sur $A = \{1, 2, 3\}$ définie par :

$$\begin{array}{ll} \sigma & : \quad 1 \mapsto 21 \\ & \quad 2 \mapsto 21213 \\ & \quad 3 \mapsto 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \sigma^{-1} & : \quad 1 \mapsto 3^{-1}1 \\ & \quad 2 \mapsto 3 \\ & \quad 3 \mapsto 1^{-1}1^{-1}2 \end{array}$$

La représentation sur la rose de l'automorphisme σ^{-1} est train-track. Un moyen de se rendre compte qu'il y a un chemin de Nielsen est de constater que $\sigma^{-1}(13) = 3^{-1}11^{-1}1^{-1}2 = 3^{-1}1^{-1}2$. La paire 13 produit une annulation, et on retrouve $(13)^{-1}$ dans son image par σ^{-1} .

Obtenir $Q(\Omega^+)$ par une substitution d'arbre dont le tronc est codé par σ^{-1} devient alors compromis ; notamment, on ne pourra placer le point 13ω (où $\omega = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma^n(1)$) qu'à la limite,

ce qui va à l'encontre des résultats obtenus sur les deux classes d'exemples. On peut cependant se débarrasser de ce chemin de Nielsen en donnant une autre représentation train-track h_0 sur le graphe G de la figure 6.29. On choisit un ensemble $A_\rho = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4\}$ de 4 entiers successifs. On identifie le groupe fondamental $\pi_1(G, *)$ de G avec $F(A)$ par

- $1 \simeq \rho_1\rho_4$,
- $2 \simeq \rho_2$.
- $3 \simeq \rho_4^{-1}\rho_3$.

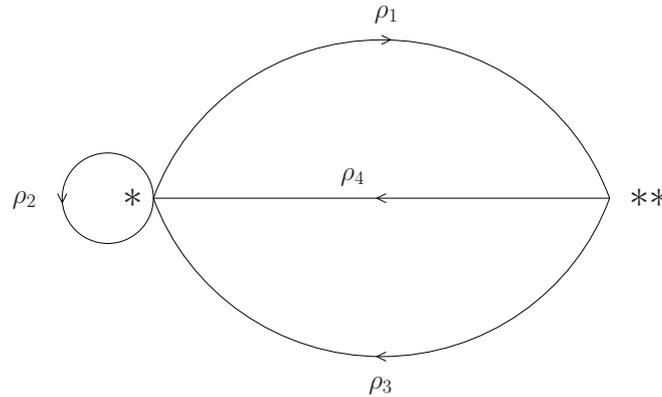


FIG. 6.29: Graphe G ; $h_0 : G \rightarrow G$ est train-track.

Si on identifie $\pi_1(G, *)$ avec $\pi_1(G, h_0(*))$ en choisissant le chemin trivial comme chemin de $*$ à $h_0(*)$, h_0 induit l'automorphisme

$$\begin{array}{rcl} \phi^{-1} & : & F(A_\rho) \rightarrow F(A_\rho) \\ & & \rho_1 \mapsto \rho_3^{-1} \\ & & \rho_2 \mapsto \rho_4^{-1}\rho_3 \\ & & \rho_3 \mapsto \rho_1^{-1} \\ & & \rho_4 \mapsto \rho_4\rho_1\rho_4 \end{array}$$

sur le groupe libre muni de la base A_ρ . Une substitution d'arbre τ associée à σ est donnée en figure 6.30, et l'arbre initial L_0^s est représenté figure 6.31.

A priori, rien ne s'oppose à l'obtention de $Q(\Omega^+)$ si la représentation train-track n'a aucun de chemin de Nielsen. Dans certains cas, on ne peut pas se débarrasser de tous les chemins de Nielsen. Il semble qu'il y ait ici un vrai problème et il est possible que les substitutions d'arbre ne permettent pas d'obtenir $Q(\Omega^+)$.

6.4 Quelques conjectures

On a vu l'importance des facteurs spéciaux dans les études des deux classes d'exemples (voir propriétés 6.1.33 page 107, 6.1.60 page 117, 6.2.37 page 143, 6.2.66 page 154). En fait, être spécial à gauche (resp. à droite) n'est pas important en soit, ce qu'il faut, c'est être préfixe du futur (resp. suffixe du passé) d'un des points fixes de l'automorphisme extérieur. Dans les cas étudiés, ces deux propriétés étaient équivalentes ; la conjecture suivante tente de généraliser cette équivalence.

Conjecture 6.4.1 *Soit σ une substitution primitive inversible sur un alphabet de cardinal d ; (Ω, S) est le système dynamique symbolique engendré par σ et $\mathcal{L}(\Omega)$ est son langage. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- la fonction de complexité p du langage vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p(n) = (d-1)n + 1$,
- la borne donnée dans la proposition 3.0.12 (page 50) est atteinte.

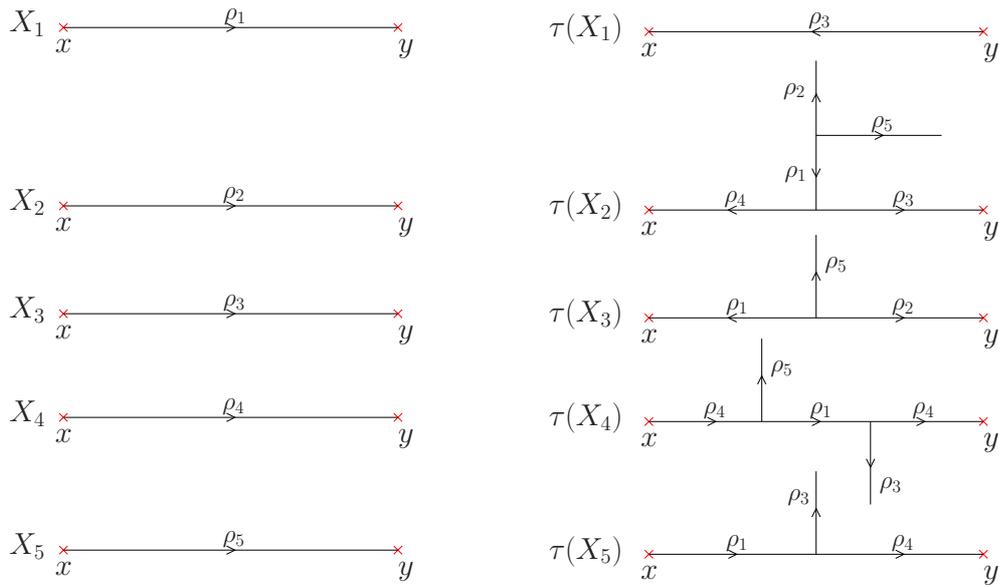


FIG. 6.30: Substitution d'arbre associée à σ .

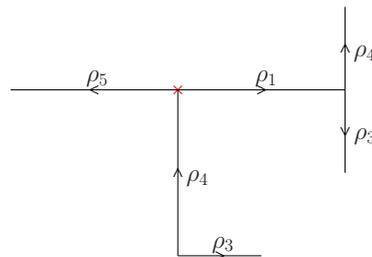


FIG. 6.31: Représentation de L_0^s .

Les trois conjectures ci-dessous partageront les hypothèses suivantes. Soit σ une substitution primitive inversible sur un alphabet A (on note également σ l'automorphisme de $F(A)$ associé) et (Ω^+, S) et (Ω, S) les systèmes dynamiques symboliques engendrés par σ . On suppose que σ^{-1} est iwip, et que le coefficient de dilatation de son représentant train-track est > 1 . On note T l'arbre invariant de σ^{-1} , et on construit l'application $Q : \partial F(A) \rightarrow \overline{T} \cup \partial T$ associée.

Dans les exemples proposés, les points fixes de l'automorphisme extérieur jouent un rôle crucial ; ils révèlent la non-injectivité de l'application Q (ou f_Q) (deux mots u et v de Ω^+ ont même image par f_Q si et seulement si il existe un mot u^- infini à gauche tel que $u^-u \in \Omega$ et $u^-v \in \Omega$) et délimitent ainsi les domaines qui constituent l'échange de domaines. Dans les sous-sections 6.1.9 (page 108) et 6.2.9 (page 146), on explique également la présence de leurs développements en préfixes-suffixes dans les substitutions d'arbre considérées. De manière informelle, on peut voir la substitution d'arbre comme un outil permettant d'approcher, partant de l'orbite d'un mot, les points fixes de l'automorphisme extérieur. Les deux conjectures suivantes portent sur l'influence des points fixes sur l'ensemble $Q(\Omega^+)$, et par transition sur une éventuelle substitution d'arbre associée.

Conjecture 6.4.2 *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- la borne donnée dans la proposition 3.0.12 (page 50) est atteinte,

- $Q(\Omega^+)$ est connexe.

Conjecture 6.4.3 Si $(u^{(1,1)}, \dots, u^{(n_1,1)}), (u^{(1,2)}, \dots, u^{(n_2,2)}), \dots, (u^{(1,p)}, \dots, u^{(n_p,p)})$ sont des points fixes distincts de la classe extérieure de σ , alors le degré des points de l'enveloppe convexe de $Q(\Omega^+)$ est $\leq \max_{1 \leq i \leq p} n_i$. Notamment, si pour tout $1 \leq i \leq p$, $n_i = 2$, alors l'enveloppe convexe de $Q(\Omega^+)$ est un intervalle.

Enfin, en se basant sur la discussion de la section 6.3, on conjecture sur l'existence d'une substitution d'arbre ou de graphe sans cycles dont l'arbre limite est isométrique à $Q(\Omega^+)$.

Conjecture 6.4.4 Si σ^{-1} admet un représentant train-track sans chemin de Nielsen, alors il existe une substitution d'arbre dont l'arbre limite est isométrique à l'enveloppe convexe de $Q(\Omega^+)$ et une substitution de graphe sans cycles dont l'arbre limite est isométrique à $Q(\Omega^+)$.

Bibliographie

- [1] Pierre Arnoux, Valérie Berthé, Arnaud Hilion, and Anne Siegel. Fractal Representation of the Attractive Lamination of an Automorphism of the Free Group. *Annales de l'Institut Fourier*, 56 :2161–2212, 2006.
- [2] M.-P. Béal and D. Perrin. Symbolic Dynamics and Finite Automata. *Handbook of Formal Languages*, 2 :463–506, 1997.
- [3] Mladen Bestvina, Mark Feighn, and Michael Handel. Laminations, Trees, and Irreducible Automorphisms of Free Group. *GAF*, 7 :215–244, 1997.
- [4] Mladen Bestvina and Michael Handel. Train-Tracks and Automorphisms of Free Groups. *Annals of Mathematics*, 135 :1–51, 1992.
- [5] Vincent Canterini and Anne Siegel. Automate des Préfixes-Suffixes Associé à une Substitution Primitive. *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 13 :353–369, 2001.
- [6] Vincent Canterini and Anne Siegel. Geometric Representation of Substitutions of Pisot Type. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353 no. 12 :5121–5144, 2001.
- [7] Thierry Coulbois, Arnaud Hilion, and Martin Lustig. R-Trees and Laminations for Free Groups II : The Dual Lamination of an R-Tree. *Journal of the London Mathematical Society*, 78 no. 3 :737–754, 2008.
- [8] Thierry Coulbois, Arnaud Hilion, and Martin Lustig. R-Trees, Dual Laminations, and Compact Systems of Partial Isometries. 2008.
- [9] K. J. Falconer. *The Geometry of Fractal Sets*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 1985.
- [10] Damien Gaboriau, Andre Jaeger, Gilbert Levitt, and Martin Lustig. An Index for Counting Fixed Points of Automorphisms of Free Groups. *Duke Math. J.*, 93 :425–452, 1998.
- [11] George Hedlund. Endomorphisms and Automorphisms of the Shift Dynamical System. *Mathematical Systems Theory*, 3 :320–375, 1969.
- [12] Arnaud Hilion. Lamination Duale à un Arbre Réel. *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie (Grenoble)*, 24 :9–21, 2007.
- [13] Gilbert Levitt and Martin Lustig. Periodic Ends, Growth Rates, Hölder Dynamics for Automorphisms of Free Groups. *Comment. Math. Helv.*, 75 no. 3 :415–429, 2000.
- [14] Gilbert Levitt and Martin Lustig. Irreducible Automorphisms of F_n Have North-South Dynamics on Compactified Outer-Space. *Journal of the Inst. of Math. Jussieu*, 2 :59–72, 2003.
- [15] Gilbert Levitt and Martin Lustig. Automorphisms of Free Groups Have Asymptotically Periodic Dynamics. 2008.
- [16] D. Lind and B. Marcus. *Symbolic Dynamics and Coding*. 1985.
- [17] R. Daniel Mauldin and S. C. Williams. Hausdorff Dimension in Graph Directed Constructions. *Transaction of the American Mathematical Society*, 309, Number 2, 1988.

-
- [18] Ali Messaoudi. Frontière du Fractal de Rauzy et Système de Numération Complexe. *Acta Arith.*, 95 :195–224, 2000.
- [19] Brigitte Mossé. Reconnaissabilité des Substitutions et Complexité des Suites Automatiques. *Bull. Soc. Math. France*, 124 :329–346, 1996.
- [20] Yakov B. Pesin. *Dimension Theory in Dynamical Systems*. Chicago Lectures in Mathematics. The University of Chicago Press, 1997.
- [21] N. Pytheas Fogg. *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics*. Lecture Notes in Mathematics, 1794. Springer-Verlag, 2002. Edited by V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit and A. Siegel.
- [22] M. Queffélec. *Substitution Dynamical Systems-Spectral Analysis*. Lecture Notes in Mathematics, 1294. Springer-Verlag, 1987.
- [23] Anne Siegel. *Représentations Géométrique, Combinatoire et Arithmétique des Systèmes Substitutifs de Type Pisot*. PhD thesis, Université de la Méditerranée, 2000.
- [24] R. F. Williams. Classification of Subshifts of Finite Type. *Annals of Mathematics*, 98 :128–153, 1973.

RESUME : Dans cette thèse, on s'intéresse au problème de la représentation géométrique des systèmes symboliques substitutifs. On se place dans le cadre des substitutions inversibles, que l'on étend en automorphismes de groupe libre. La dynamique de ces derniers est parfois étudiée au moyen d'arbres réels munis d'une action du groupe libre par isométries. Ces méthodes sont mises en commun avec des résultats habituels sur les substitutions.

On étudie un peu plus en détails le système dynamique symbolique (Ω, S) (où S est l'application shift) engendré par une substitution primitive inversible σ (σ désigne également l'automorphisme associé). Notamment, si σ est un élément de l'automorphisme extérieur Φ , on montre que le développement en préfixes-suffixes (par rapport à σ) d'un mot bi-infini de Ω est ultimement périodique si et seulement si il est fixe par un élément de Φ . On en déduit une méthode pour caractériser les couples (u, v) de mots de Ω vérifiant $u_i = v_i$ pour tout i de \mathbb{N} (resp. $-\mathbb{N}^*$).

On introduit les substitutions d'arbre. Combinatoirement, elles peuvent être vues comme des généralisations des substitutions sur les mots. Les points fixes des substitutions d'arbre sont d'abord étudiés. Puis, on se sert de cette analyse pour associer un compact à toute substitution d'arbre vérifiant certaines conditions combinatoires ; ce compact est muni d'une action minimale de pseudo-groupe.

On étudie également les substitutions d'arbre d'un point de vue métrique. On a ainsi un moyen simple de construire des arbres fractals auto-similaires ; on montre que ceux-ci peuvent être vus comme des invariants de constructions graphes-dirigées au sens de Mauldin et Williams.

Enfin, on se sert des substitutions d'arbre pour représenter des systèmes symboliques substitutifs sur deux classes d'exemples. Pour une substitution, on construit un arbre réel par substitution d'arbre et on définit un échange de domaines conjugué au système symbolique initial.

ABSTRACT : We study ways of giving geometric representations to symbolic substitutive systems. We consider invertible substitutions, and see them as automorphisms of the free group. Real trees endowed with actions of the free group by isometries are often used to study the dynamics of these automorphisms. These methods will be exploited alongside usual results on substitutions.

We study properties of the symbolic dynamical system (Ω, S) (S is the shift map) generated by a primitive invertible substitution σ (σ also refers to the induced automorphism). Specifically, if σ is an element of the outer morphism Φ , we prove that the prefix-suffix development (with respect to σ) of a bi-infinite word of Ω is ultimately periodic if and only if it is a fixed word of an element of Φ . We then give methods to identify pairs (u, v) of words in Ω verifying $u_i = v_i$ for all i in \mathbb{N} (resp. $-\mathbb{N}^*$).

Tree substitutions are introduced. From a combinatorial side, these can be seen as generalisations of substitutions on words. We start the study by identifying fixed points of tree substitutions. We use this analysis to associate a compact set to each tree substitution which verify simple combinatorial properties ; this compact set will be endowed with a minimal action of a pseudogroup.

We also study tree substitutions from a metric point of view. They give an easy way to obtain self-similar fractal real trees ; we show that these trees can be seen as invariants of graph-directed constructions (in the sense of Mauldin and Williams).

Lastly, we use tree substitutions to give geometric representations to substitutive symbolic systems on two sets of examples. For each substitution, we produce a real tree using a tree substitution, and we define a domain exchange which is conjugate to the original symbolic system.

Mots clés : dynamique symbolique, substitutions, automorphismes de groupe libre, arbres réels, substitutions d'arbre, automate des préfixes-suffixes