Université de Tours
Mathématiques

Licence 2ème année
2015 – 2016

Contrôle Continu - Mars 2016

Durée : 2 h
Documents et calculatrices interdits

1. Questions de cours et de compréhension
Pour les questions qui suivent, seules les réponses soigneusement justifiées seront prises en compte. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

1. Quelle est la définition du noyau $Ker(f)$ de f ?
2. Quelle est la définition du rang $Rg(f)$ de f ?
   On suppose maintenant que $Rg(f) = 1$.
3. Quelle est la dimension de $Ker(f)$?
4. En déduire que 0 est valeur propre de f.
5. Donner un exemple d'un tel endomorphisme f (c'est-à-dire qui vérifie les hypothèses ci-dessus). On pourra donner sa matrice dans la base canonique.

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$.
2. Donner un système d'équations caractérisant le sous-espace vectoriel $Im(f) = Vect\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$. Quelle est sa dimension ?
3. En utilisant la question précédente, justifier le fait que A n'est pas inversible.
4. Calculer une base de $Ker(f)$.
5. Les sous-espaces vectoriels $Im(f)$ et $Ker(f)$ sont-ils supplémentaires ?
6. Quelle est la matrice de f dans la base $(e_1, e_2, e_1 + e_3)$?
7. f est-il diagonalisable ? (on ne demande pas de le diagonaliser)

3. Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A n'est pas diagonalisable mais est trigonalisable.
2. Trouver $T, P \in M_2(\mathbb{R})$ telles que P inversible, T est triangulaire supérieure et $A = PTP^{-1}$.
3. Calculer e^A.