

## Examen - Mars 20135

Durée : 2 h

Documents et calculatrices interdits

### 1. Questions de cours et de compréhension

Pour les questions qui suivent, seules les réponses soigneusement justifiées seront prises en compte.

1. Soient  $A, B \in M_2(\mathbb{R})$  des matrices carrées réelles de taille 2. Est-il toujours vrai que  $e^{A+B} = e^A e^B$  ?
2. Trouver une matrice  $A \in M_2(\mathbb{R})$  qui n'est diagonalisable ni sur  $\mathbb{R}$  ni sur  $\mathbb{C}$ .
3. Trouver une matrice  $A \in M_2(\mathbb{R})$  qui est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  mais pas sur  $\mathbb{R}$ .
4. Montrer que si  $A^2 = 0$  alors la seule valeur propre de  $A$  est 0.

### 2. On considère dans $\mathbb{R}^3$ , les vecteurs suivants

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ ,  $E = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$  et  $F = \text{Vect}\{v_4, v_5\}$ .

1. Sans calcul, dites pourquoi  $F$  est de dimension 2. Que peut-on dire de la dimension de  $E$  ?
2. Sans calcul, dites pourquoi  $E$  et  $F$  ne sont pas supplémentaires.
3. Donner une description de  $E$  et  $F$  par des équations.
4. Quelle est la dimension de  $E$  ?
5. Donner une base de  $E \cap F$ .

### 3. Soit $A$ la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ . Quelles sont les valeurs propres de  $A$  ?
2. Justifier le fait que  $A$  est diagonalisable.
3. Trouver  $D, P \in M_2(\mathbb{R})$  telles que  $P$  inversible,  $D$  est diagonale et  $A = PDP^{-1}$ .
4. Calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### 4. Soit $A$ la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $A$  n'est pas diagonalisable mais est trigonalisable.
2. Trouver  $T, P \in M_2(\mathbb{R})$  telles que  $P$  inversible,  $T$  est triangulaire supérieure et  $A = PTP^{-1}$ .