Examen de Mars 2014

Durée : 2 h
Documents, appareils électroniques et calculatrices interdits

Exercice 1 (questions simples)
1- $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x+y-z)(x-y-z) = 0\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
2- Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs suivants

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ m \\ m-2 \end{pmatrix}.$$

Le système (v_1, v_2, v_3) selon certaines valeurs de $m \in \mathbb{R}$ est-il libre ou lié ?
3- Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathrm{End}(E)$. On suppose que $u^2 + u = Id$. L'endomorphisme u est-il inversible ?

Exercice 2
On considère dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs suivants

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ v_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui définissent les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, $E = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ et $F = \langle v_4, v_5, v_6 \rangle$.
1- Calculer $\dim E$ et $\dim F$.

2- Calculer $\dim(E+F)$ et $\dim(E \cap F)$; E et F sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

3- Caractériser $E \cap F$ par des équations linéaires.

Exercice 3
Soit $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique (i,j,k) est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

1. Sans aucun calcul, trouver une valeur propre de f et un vecteur propre (non nul) associé.
2. Calculer le polynôme caractéristique de f. Quel est le spectre de f ?
3. Déterminer les sous-espaces propres de f. f est-il diagonalisable ?
4. Trouver une base (u,v,w) de $\mathbb{R}^3$ telle que $u \in \mathrm{Ker}(f - 6Id)$, $v \in \mathrm{Ker}(f + 4Id)$ et (v,w) est une base de $\mathrm{Ker}(f+4Id)^2$.
5. Quelle est la matrice de f dans la base (u,v,w) ? Et dans la base (v,u,w) ?
6. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. On précisera le principe et les étapes de ce calcul.