Partiel de mathématique - SM2 - Mars 2013

Exercice 1

Dans R^3 muni de sa base cannonique $B_0 = \{i, j, k\}$, on considére la famille de vecteurs $B = \{a_1; a_2; a_3\}$ définie par : $a_1 = (1, 1, 2)$; $a_2 = (0, 3, 2)$ et $a_1 = (0, 3, 3)$.

1. Montrer que B est une base.
2. Ecrire les coordonnées des vecteurs de B_0 dans la bas B.
3. On considére l'application linéaire$f$ dont la matrice dans la base cannonique B_0 est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -15 & -7 & 11 \\ -14 & -6 & 10 \end{pmatrix}$$

4. Calculer le déterminant de A. Cette matrice est-elle inversible ?
5. Donner une base de $Ker(f)$ dans la base canonique. Quel est le rang de A ? Donner une base de $Im(A)$?
6. Donner les coordonnées de $f(a_1)$, $f(a_2)$ et $f(a_3)$ dans la base B, puis la matrice de f dans la base B
7. Calculer le polynome caractéristique de A. Sans nouveau calcul, répondre aux questions : A est-elle diagonalisable ? Existe-t-il une bas dans laquelle A est triangulaire ?.

Exercice 2

Dans R^3 muni de sa base canonique $B_0 = \{i, j, k\}$, on considére l'application linéaire$f$ dont la matrice dans la base cannonique B_0 est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynome caractéristique de A.
2. Quelles sont les valeurs propres de A. A est-elle diagonalisable ? A est-elle inversible ?
3. Donner une base de vecteurs propres de A
4. Ecrire le théoréme de Cayley-Hamilton puis l'appliquer pour obtenir la matrice inverse de A.