Université de Tours
Mathématiques

Licence SM 2ème année
2011 – 2012

Partiel de mars 2012

Durée : 2 h
Documents et calculatrices interdits

1. Questions de cours et de compréhension

1. Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.
2. Donner une matrice 2×2 à coefficients réels qui ne possède aucune valeur propre réelle (justifier).
3. Donner une matrice 2×2 à coefficients réels qui n'est diagonalisable ni sur $\mathbb{R}$ ni sur $\mathbb{C}$ (justifier).

2. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. Quelles sont les valeurs propres de de A ?
2. Expliquer pourquoi, sans aucun calcul supplémentaire, on peut montrer que A est diagonalisable.
3. Trouver $D, P \in M_2(\mathbb{R})$ telles que P inversible, D est diagonale et $A = P^{-1}DP$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n.

3. Soit $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f. Quel est le spectre de f ?
2. Calculer les espaces propres de f. f est-il diagonalisable ?
3. Trouver une base (u, v, w) de $\mathbb{R}^3$ telle que $u \in \text{Ker}(f - 2Id)$, $v \in \text{Ker}(f - Id)$ et (v, w) est une base de $\text{Ker}(f - Id)^2$.
4. Quelle est la matrice de f dans la base (u, v, w) ? Et dans la base (v, u, w) ?
5. Calculer e^{tA} pour tout $t \in \mathbb{R}$.
6. Donner l'unique solution X du système différentiel $X' = AX$ qui vérifie $X(0) = (1, 2, 2)$.
7. Donner l'unique solution X du système différentiel $X' = AX$ qui vérifie $X(1) = (0, 1, 0)$.
8. Résoudre $X' = AX + b(t)$ où pour tout $t \in \mathbb{R}$, $b(t) = (t, -2t, 0)$.