Corrigé CC Mars 2016

Ex 1 1) $\ker f = \{ x \in \mathbb{R}^2 / f(x) = 0 \}$

2) $Rg(f) = \dim f(\mathbb{R}^2)$

3) Thm du rang : $\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^2 - Rg\, f = 1$

4) $\ker f$ n'est pas réduit à $\{0\}$ d'après (3). Soit donc $x \in \ker f$, $x \neq 0$. On a $f(x) = 0 = 0.x$ ce qui mq $0 \in Sp(f)$

5) Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto Ax \end{cases}$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – f vérifie les hypothèses demandées

Ex2 : 1) $f(e_1) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

De m̂, $f(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) Soit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. $v \in Im f \iff Rg\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} Rg\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & x \\ 5 & 2 & 1 & y \\ 6 & 2 & 0 & z \end{pmatrix}$

Calculons ce rang par la méthode du pivot :

$$\begin{matrix} -3 & -1 & 0 & x \\ 5 & 2 & \boxed{1} & y \\ 6 & 2 & 0 & z \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 3 & \boxed{1} & 0 & -x \\ -1 & 0 & \boxed{1} & y+2x \\ 0 & 0 & 0 & z+2x \end{matrix}$$

Le système $\begin{matrix} -3 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{matrix}$ est donc de rang 2, d'où : $\underbrace{\dim Im f}_{Rg\, f} = 2$

De plus, $(*)$ est vérifié ssi $z + 2x = 0$.

cette équation caractérise donc $Im f$.

3) si A était inversible, f serait bijective et donc surjective : nécessairement, on aurait $\dim Im f = 3$, ce qui est faux d'après 2).

4) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker f \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ que l'on résout par la méthode du pivot :

$$\begin{matrix} -3 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 3 & \boxed{1} & 0 \\ -1 & 0 & \boxed{1} \end{matrix}$$

ce qui donne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker f \iff \begin{cases} y = -3x \\ z = x \end{cases}$

On en déduit $\ker f = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

5) Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker f \cap Im f$. d'après les questions précédentes, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $2x + z = 0$. Cela implique $x = y = z = 0$

On en déduit : $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ (1)

De plus, $\dim(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f) = \underbrace{\dim \operatorname{Ker} f}_{1} + \underbrace{\dim \operatorname{Im} f}_{2} - \underbrace{\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f)}_{0}$

$= 3$

ce qui mq $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$

Avec (1), on obtient que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires.

6) $f(e_1) = -3e_1 + 5e_2 + 6e_3 = -9e_1 + 5e_2 + 6(e_1+e_3)$

$f(e_2) = -e_1 + 2e_2 + 2e_3 = -3e_1 + 2e_2 + 2(e_1+e_3)$

$f(e_1+e_3) = f(e_1) + f(e_3) = -3e_1 + 6e_2 + 6e_3 = -9e_1 + 6e_2 + 6(e_1+e_3)$

d'où : $\underset{(e_1,e_2,e_1+e_3)}{\operatorname{Mat}} f = \begin{pmatrix} -9 & -3 & -9 \\ 5 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

7) $P_A(X) = -X^3 - X^2 + 3X = -X(X^2 + X - 3)$

$X^2 + X - 3$ a deux racines : $\alpha_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ et $\alpha_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$

donc A (donc f) possède 3 valeurs propres distinctes. D'après le cours, f est diagonalisable.

<u>Ex3</u> : 1) $P_A(X) = (X-6)^2$. Donc si A est diagonalisable, il existe P inversible tq $A = P \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}}_{6I} P^{-1} = 6I$, ce qui est faux. A n'est donc pas diagonalisable

2) Calculons $\operatorname{Ker}(A-6I)$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A-6I) \iff x+y=0$ donc $\operatorname{Ker}(A+6I) = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

$(A-6I)^2 = 0$ donc $E'_6 = \operatorname{Ker}(A-6I)^2 = \mathbb{R}^2 = \operatorname{Vect}\{u, v\}$ où $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. D'après le cours : $A = PTP^{-1}$ où $T = \begin{pmatrix} 6 & \alpha \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

<u>Calcul de α</u> : $Av = 6v + \alpha u$ ie $\underbrace{(A-6I)v}_{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} = \alpha \underbrace{u}_{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

d'où $\alpha = 1$ et $T = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

3) Posons $N = A - 6I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. $N^2 = 0$ d'où :

$e^A = e^{6I+N} \underset{\text{car } 6I \text{ et } N \text{ commutent}}{=} e^{6I} e^N = e^6 I \underbrace{(I+N)}_{\text{car } N^2=0} = e^6 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$