

Contrôle Continu - Mai 2016

Durée : 2 h

Documents et calculatrices interdits

Barème indicatif :

- Exercice 1 : 5 points ;
- Exercice 2 : 7 points ;
- Exercice 3 : 8 points.

1. Questions de cours et de compréhension

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique.

1. Rappeler la définition de f paire et f impaire.

Supposons que f est impaire. Soit $n \geq 0$.

2. Que vaut $f(0)$? Justifier soigneusement.
3. Quelle est la parité des fonctions $x \rightarrow f(x) \cos(nx)$ et $x \rightarrow f(x) \sin(nx)$? Justifier soigneusement.
4. Montrer que $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0$.
5. Tracer rapidement le graphe des fonctions f_1 , f_2 et f_3 2π -périodique définies par (on pourra les dessiner sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$)
 - $f_1(t) = t$ si $t \in [-\pi, \pi[$;
 - $f_2(t) = t$ si $t \in [0, 2\pi[$;
 - f_3 est paire et $f = t$ si $t \in [0, \pi]$;

2. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f . Quel est le spectre de f ?
2. Calculer les espaces propres de f . f est-il diagonalisable ?
3. Trouver une base (u, v, w) de \mathbb{R}^3 telle que $u \in \text{Ker}(f - Id)$, $v \in \text{Ker}(f - 2Id)$ et (v, w) est une base de $\text{Ker}(f - 2Id)^2$.
4. Quelle est la matrice T de f dans la base (u, v, w) ? Et dans la base (v, u, w) ?
5. Calculer e^A .

3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -périodique telle que f est paire, et telle que, pour tout $x \in]0, \pi]$, $f(x) = 1 - \frac{2x}{\pi}$.

1. Exprimer en fonction de $x \in [-\pi, 0]$, la valeur de $f(x)$.
2. Tracer le graphe de f sur $[-\pi, \pi]$.

3. Que vaut le coefficient de Fourier $b_n(f)$? (on ne demande pas de le justifier)
4. Calculer le coefficient de Fourier

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(nt) dt.$$

On pourra distinguer les cas où n est pair et le cas où il est impair.

5. Écrire explicitement la série de Fourier $S_f(x)$ et donner sa valeur en fonction de $x \in [-\pi, \pi]$.
6. Calculer $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n+1)^2}$.
7. Calculer $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.
8. Calculer $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$.