

## Examen - Mai 2015

Durée : 2 h

Documents et calculatrices interdits

### 1. Questions de cours et de compréhension

Pour les questions qui suivent, seules les réponses soigneusement justifiées seront prises en compte.

1. Donner un exemple  $A$  de matrice non nulle dont le déterminant est 0.
2. Existe-t-il une matrice  $B$  telle que  $e^B = A$  où  $A$  est la matrice de la question précédente ?

### 2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ . Trouver l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' + y = \alpha \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

### 3. Soit $A$ la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ . En déduire que  $A$  n'a qu'une seule valeur propre.
2. Justifier le fait que  $A$  n'est pas diagonalisable.
3. Calculer  $e^{tA}$  pour  $t \in \mathbb{R}$ .
4. Trigonaliser  $A$ .
5. Quelle est la solution générale du système  $X' = AX$  où l'inconnue  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  est  $C^1$  ?

### 4. Soit $A$ la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ . Quelles sont les valeurs propres de  $A$  ?
2. Calculer  $e^{tA}$ .
3. Trouver une solution particulière du système  $X' = AX + B$  où l'inconnue  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  est  $C^1$  et lorsque, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $B(t) = (te^t, 0)$ .
4. Même question lorsque, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $B(t) = (2, 0)$ .