

Examen de mai 2014

Durée : 2 h

Documents et calculatrices interdits

1. Questions de cours et de compréhension

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée réelle de taille $n \in \mathbb{N}^*$. On note P_A son polynôme caractéristique. On suppose que $P_A(0) = 0$.
 - (a) La matrice A est-elle inversible ?
 - (b) La matrice e^A est-elle inversible ?
2. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^1 \ln(t) dt$ est convergente.

2. Calculer e^{tA} pour $t \in \mathbb{R}$ pour les matrices suivantes (on pourra diagonaliser, trigonaliser ou utiliser la méthode de son choix selon la situation)

1.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. On considère le système différentiel

$$X' = AX + B \tag{S}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les solutions du système homogène associé.
2. Trouver une solution particulière du système (S) lorsque, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
 - (a) $B(t) = (2t, t - 3)$.
 - (b) $B(t) = (te^{3t}, (t + 1)e^{3t})$;

4. Soient

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{ds}{s\sqrt{4+s}} \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s\sqrt{4+s}}.$$

1. Sans les calculer, étudier la convergence des intégrales I et J .

Soit $a > 1$. On pose

$$I_a = \int_1^a \frac{ds}{s\sqrt{4+s}}.$$

2. Effectuer le changement de variables $u = \sqrt{4+s}$ dans l'intégrale I_a .
3. Calculer I_a .
4. Calculer I .