Université de Tours
Mathématiques

Licence SM 2ème année
2012 – 2013

Examen d'avril 2013

Durée : 2 h
Documents et calculatrices interdits

1. Questions de cours et de compréhension
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée réelle de taille $n \in \mathbb{N}^*$. On note $I \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice identité. On suppose que le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = -(X-3)^3$.

1. Que vaut n ?
2. Quel est le déterminant de A ?
3. Montrer que si $A \neq 3I$, A n'est pas diagonalisable.
4. Justifier le fait que $(A-3I)^3 = 0$.
5. En écrivant (et en justifiant) que $e^A = e^{3I}e^{A-3I}$, en déduire que $e^A = e^3(A^2/2 - 2A + \frac{5}{2}I)$

2. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. Quelles sont les valeurs propres de A ?
2. Trouver $T, P \in M_2(\mathbb{R})$ telles que P inversible, T est triangulaire supérieure et $A = PTP^{-1}$.
3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer e^{tA}.
4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Décrire en fonction de a, b, l'ensemble des solutions de

$$\begin{cases} -2x - 2y &= a \\ 2x + 2y &= b. \end{cases}$$

   On considère le système différentiel

$$X' = AX + B \tag{E}$$

   où pour tout $t \in \mathbb{R}$, $B(t) = (e^{3t}, 0)$.

5. Trouver $U_0, U_1, U_2 \in \mathbb{R}^2$ tels que $(U_0 + U_1 t + U_2 t^2)e^{3t}$ soit une solution particulière de (E).

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$I(n) = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{(s^3+1)^n} ds.$$

1. Justifier que si $n = 0$, l'intégrale $I(n)$ est divergente et que si $n \geq 1$, elle est convergente.

2. Pour tout $x > 0$, calculer
$$I_1(x) = \int_0^x \frac{ds}{s+1}.$$
3. Pour tout $x > 0$, calculer
$$I_2(x) = \int_0^x \frac{ds}{s^2 - s + 1}.$$
4. Pour tout $x > 0$, calculer
$$I_3(x) = \int_0^x \frac{(2s-1)ds}{s^2 - s + 1}.$$
5. Pour tout $x > 0$, exprimer
$$\int_0^x \frac{ds}{s^3 + 1} ds$$
en fonction de $I_1(x)$, $I_2(x)$ et $I_3(x)$.
6. Calculer $I(1)$.
7. Calculer $I(2)$.