Université de Tours
Mathématiques

Licence SM 2ème année
2011 – 2012

Examen d'avril 2012

Durée : 2 h
Documents et calculatrices interdits

1. Questions de cours et de compréhension

1. Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée réelle de taille n. On note $I \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice identité.
   (a) Est-il vrai que $e^0 = I$?
   (b) Est-il vrai que e^A est toujours inversible ? (justifier)
2. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(u)du$ converge. A-t-on nécessairement $\lim_{u\to+\infty} f(u) = 0$? (justifier rapidement).

2. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. Quelles sont les valeurs propres de A ?
2. Expliquer pourquoi, sans aucun calcul supplémentaire, on peut montrer que A est diagonalisable.
3. Trouver $D, P \in M_2(\mathbb{R})$ telles que P inversible, D est diagonale et $A = P^{-1}DP$.
4. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer e^{tA}.
5. On considère le système différentiel

$$X' = AX + B \qquad (E).$$

   (a) Montrer qu'il existe une solution particulière de (E) de la forme U_0e^t où $U_0 \in \mathbb{R}^2$ lorsque pour tout $t \in \mathbb{R}$, $B(t) = (0, e^t)$.
   (b) Montrer qu'il existe une solution particulière de (E) de la forme $(V_0 + V_1t)e^{2t}$ où $V_0, V_1 \in \mathbb{R}^2$ lorsque pour tout $t \in \mathbb{R}$, $B(t) = (e^{2t}, 0)$.

3. 1. Donner la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt \quad \text{et} \quad \int_0^1 \cos^2(t)\ln(t)dt.$$

2. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 2t + 3}$$

converge puis la calculer.

3. (a) Trouver des réels $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{t}{t^2+5t+6} = \frac{a}{t+2} + \frac{b}{t+3}.$$

(b) Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{tdt}{t^2+5t+6}$$

converge puis la calculer.