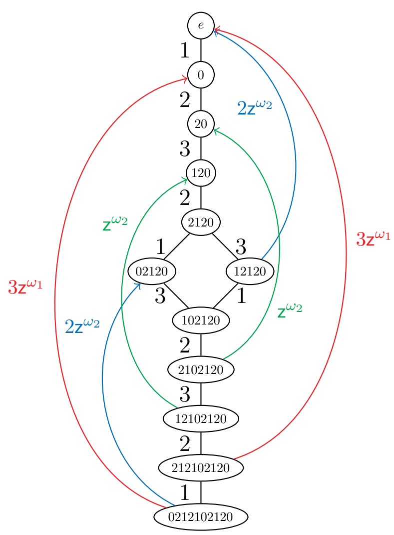
STRUCTURE CONSTANTS OF THE HOMOLOGY RINGS OF AFFINE GRASSMANNIANS IN TYPE G_2

JÉRÉMIE GUILHOT, CÉDRIC LECOUVEY AND PIERRE TARRAGO

Abstract. In this note we explicitely compute the structure constants of the homology ring of affine Grassmannians in type G_2 using the theory of multiplicative graphs.

All the notations are taken from the paper *Homology rings of affine grassmannians and positively multiplicative graphs* available on arxiv at ....

Below is the graph Γ_{B_0} in type G_2 together with its adjacency matrix $A_{\Gamma_{\mathsf{B}_0}}$:



$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathsf{z}^{\omega_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}^{\omega_1} & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}^{\omega_1} \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}^{\omega_2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}^{\omega_2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathsf{z}^{\omega_2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

Figure 1. The graph Γ_{B_0} in type $\tilde{G}_2$ and its adjacency matrix.

The graph Γ_{B_0} has maximal dimension and is multiplicative at e. It follows by Proposition 2.4.(1) that the matrix M_e is invertible and the columns of M_e^{-1} give the vectors of the basis $\mathsf{B}' = \{\mathsf{b}_0 = 1, \ldots, \ldots, \mathsf{b}_{n-1}\}$ expressed in the basis $\{1, A_{\Gamma_{\mathsf{B}_0}}, \ldots, A^{n-1}_{\Gamma_{\mathsf{B}_0}}\}$. In the following we set $\mathsf{z}_1 = \mathsf{z}^{\omega_1}$ and $\mathsf{z}_2 = \mathsf{z}^{\omega_2}$. We find

$$M_e = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 72\mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 2592\mathsf{z}_1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 72\mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 5184\mathsf{z}_1 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 288\mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1296\mathsf{z}_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2592\mathsf{z}_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7776\mathsf{z}_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4320\mathsf{z}_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 72 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 144 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 432 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 864 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 864 & 0
\end{pmatrix}$$

$$M_e^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & -3\mathsf{z}_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_1/\mathsf{z}_2 & -3\mathsf{z}_1/\mathsf{z}_2 & 0 & -\mathsf{z}_2/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathsf{z}_2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathsf{z}_2/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathsf{z}_2/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/72 & -1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/72 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/144 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/432 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/864 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/864 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/(5184\mathsf{z}_2) & 1/(1728\mathsf{z}_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

By unicity of the multiplicative basis satisfying $\mathsf{b}_0 = 1$, we see that the basis B' has to be equal to the basis $\mathsf{B} = \{\mathrm{Mat}_{\mathsf{B}_0}(\xi_w) \mid w \in \mathsf{B}_0\}$ where B_0 is the basis of the homology ring of affine Grassmanians defined by the fundamental domain B_0. This provides an explicit algorithm to compute the structure constants with respect to the basis B (these are given by the columns of the matrix in the basis B) and thus the structure constants of the homology ring of affine Grassmanians in type G_2. We have computed explicitely the basis B below. To compute the product

$$\xi_{s_2s_1s_2s_0}\xi_{s_1s_2s_1s_0s_2s_1s_2s_0}$$

one looks at the 10th column of $\mathrm{Mat}_{\mathsf{B}_0}(\xi_{s_2s_1s_2s_0})$ (or equivalently since the algebra Λ is commutative, at the 5th column of $\mathrm{Mat}_{\mathsf{B}_0}(\xi_{s_1s_2s_1s_0s_2s_1s_2s_0})$) and find

$$\begin{aligned} \xi_{s_2s_1s_2s_0}\xi_{s_1s_2s_1s_0s_2s_1s_2s_0} &= \mathsf{z}_2^2\xi_e + 2\mathsf{z}_1\xi_{s_2s_0} + 2\mathsf{z}_2\xi_{s_1s_0s_2s_1s_2s_0} \\ &= \xi_{t^2_{\omega_2}} + 2\xi_{s_2s_0t_{\omega_1}} + 2\xi_{s_2s_0t_{\omega_1}} \end{aligned}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathsf{B}_0}(\xi_e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathsf{B}_0}(\xi_{s_0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathsf{z}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathsf{B}_0}(\xi_{s_2s_0}) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_1 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathsf{B}_0}(\xi_{s_1s_2s_0}) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 2\mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathsf{z}_1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_2 & \mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 2\mathsf{z}_1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_1 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathsf{z}_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathsf{B}_0}(\xi_{s_2s_1s_2s_0}) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 3\mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_1 & 0 & \mathsf{z}_2^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathsf{z}_1 & 0 & \mathsf{z}_2^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathsf{z}_2 & 3\mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_1 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathsf{z}_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathsf{B}_0}(\xi_{s_1s_2s_1s_2s_0}) = \begin{pmatrix}
0 & 2\mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_1 & 0 & 0 & \mathsf{z}_2^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_1 & 0 & \mathsf{z}_2^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_2 & \mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & z \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathsf{z}_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathsf{B}_0}(\xi_{s_0s_2s_1s_2s_0}) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9z_1 & 0 & 3z_2^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3z_1 & 0 & z_2^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3z_1 & 0 & z_2^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3z_1 & 0 & 3z_2^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_2 & 3z_2 & 0 & 0 & 0 & 3z_1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3z_2 & 0 & 0 & 0 & 9z_1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3z_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathsf{B}_0}(\xi_{s_1s_0s_2s_1s_2s_0}) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 3z_1 & 0 & 0 & 2z_2^2 & 0 & 0 & 0 & 6z_2z_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_1 & 3z_1 & 0 & z_2^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2z_1 & 0 & z_2^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3z_1 & 0 & z_2^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2z_1 & 0 & 2z_2^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_2 & 3z_2 & 0 & 0 & 0 & 3z_1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_2 & z_2 & 0 & 0 & 0 & z_1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2z_2 & 0 & 0 & 0 & 3z_1 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2z_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathsf{B}_0}(\xi_{s_2s_1s_0s_2s_1s_2s_0}) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 3z_1 & 0 & z_2^2 & 3z_2^2 & 0 & 0 & 0 & 3z_2z_1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3z_1 & 0 & 0 & z_2^2 & 0 & 0 & 0 & 3z_2z_1 \\
0 & z_2 & 0 & 0 & 0 & z_1 & 3z_1 & 0 & 2z_2^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3z_1 & 0 & 2z_2^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3z_1 & 0 & z_2^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3z_1 & 0 & 3z_2^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_1 & 0 & z_2^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2z_2 & 3z_2 & 0 & 0 & 0 & 3z_1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2z_2 & 0 & 0 & 0 & 3z_1 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3z_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathsf{B}_0}(\xi_{s_1s_2s_1s_0s_2s_1s_2s_0}) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 3z_1 & 0 & z_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2z_2z_1 & 0 & 2z_2^3 \\
0 & 0 & 0 & 2z_1 & 0 & 0 & z_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2z_1 & 0 & 0 & z_2^2 & 0 & 0 & 0 & 2z_2z_1 \\
0 & z_2 & 0 & 0 & 0 & z_1 & 3z_1 & 0 & 2z_2^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2z_1 & 0 & z_2^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3z_1 & 0 & z_2^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2z_1 & 0 & z_2^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_2 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 2z_1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 3z_1 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathsf{B}_0}(\xi_{s_2s_1s_2s_1s_0s_2s_1s_2s_0}) = \begin{pmatrix} 0 & 3\mathsf{z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_2\mathsf{z}_1 & 0 & \mathsf{z}_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3\mathsf{z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_2^3 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mathsf{z}_1 & 0 & 0 & \mathsf{z}_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_1 & 0 & 0 & \mathsf{z}_2^2 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_2\mathsf{z}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_1 & 3\mathsf{z}_1 & 0 & \mathsf{z}_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_1 & 0 & \mathsf{z}_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathsf{z}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathsf{B}_0}(\xi_{s_0s_2s_1s_2s_1s_0s_2s_1s_2s_0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6\mathsf{z}_2\mathsf{z}_1 & 0 & 2\mathsf{z}_2^3 & 0 & 9\mathsf{z}_1^2 \\ 0 & 3\mathsf{z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_2\mathsf{z}_1 & 0 & \mathsf{z}_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3\mathsf{z}_1 & 0 & \mathsf{z}_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathsf{z}_2\mathsf{z}_1 & 0 & 2\mathsf{z}_2^3 \\ 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_1 & 0 & \mathsf{z}_2^2 & 3\mathsf{z}_2^2 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_2\mathsf{z}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_1 & 0 & 0 & 2\mathsf{z}_2^2 & 0 & 0 & 0 & 6\mathsf{z}_2\mathsf{z}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9\mathsf{z}_1 & 0 & 3\mathsf{z}_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{z}_1 & 0 & 0 & \mathsf{z}_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_1 & 0 & \mathsf{z}_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathsf{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mathsf{z}_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$